

Cálculo 3 - 2022.2

Prova de reposição (VR)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://angg.twu.net/2022.2-C3.html>

Questão 1.

(Total: 10.0 pts)

Lembre que “ ∂C ” é “a fronteira do conjunto C ” e que se F é uma função de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} então F^{-1} é a “imagem inversa de F ”, que é definida de um jeito quando o argumento é um número e de outro jeito quando o argumento é um conjunto. Se $a \in \mathbb{R}$ e $C \subset \mathbb{R}$, então:

$$\begin{aligned} F^{-1}(a) &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = a \} \\ F^{-1}(C) &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) \in C \} \end{aligned}$$

Sejam:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= x^2 + y^2, \\ G(x, y) &= xy, \\ C_1 &= F^{-1}(4) \\ C_2 &= F^{-1}([-1, 4]) \\ C_3 &= G^{-1}(1) \\ C_4 &= G^{-1}([-1, 1]) \\ C_5 &= C_2 \cap C_4 \\ C_6 &= \partial(C_5) \\ D &= C_5 \\ (x_0, x_1) &= (1, 0) \\ H(x, y) &= (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 \\ M &: \quad D \rightarrow \mathbb{R} \\ &\quad (x, y) \mapsto H(x, y) \end{aligned}$$

- a) (1.0 pts) Desenhe a região D .
- b) (1.0 pts) Dê as coordenadas aproximadas dos “bicos” de ∂D .
- c) (1.0 pts) Desenhe as curvas de nível da função M .
- d) (1.0 pts) Diga quais são os mínimos locais, máximos locais e pontos de sela da função M .
- e) (1.0 pts) Chame os pontos do item (d) de P_1, P_2, \dots, P_N e dê as coordenadas aproximadas de cada um deles. Repare que eu não estou dizendo quem é N — você vai ter que descobrir.
- f) (1.0 pts) Para cada um dos pontos $P_i = (x_i, y_i)$ do item anterior calcule $\nabla H(x_i, y_i)$ e represente graficamente $(x_i, y_i) + \nabla H(x_i, y_i)$.

Para conseguir fazer os itens acima você vai ter que fazer um monte de “passos intermediários” — como desenhar alguns conjuntos, diagramas de numezinhos e curvas de nível. Eu não vou dizer quais são esses passos intermediários — você vai ter que descobrir quais eles são, e escrever cada um deles de um jeito legível.

- g) (4.0 pts) Descubra quais são esses “passos intermediários” e faça-os!

Dica 1: é quase impossível fazer os itens acima em ordem, tipo primeiro o a, depois o b, etc, e por último o g. Faça eles na ordem que conseguir.

Dica 2: alguns itens podem te ajudar a descobrir que você fez um outro item errado. Se isso acontecer ou conserte o item errado ou explique em português o que você descobriu — respostas incoerentes umas com as outras podem fazer você perder pontos.

$$F(x,y) = \begin{array}{ccc|ccc} 8 & 5 & 4 & 5 & 8 & \\ 5 & 2 & 1 & 2 & 5 & \\ \hline 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & \\ \hline 5 & 2 & 1 & 2 & 5 & \\ 8 & 5 & 4 & 5 & 8 & \end{array}$$

$$G(x,y) = \begin{array}{ccc|ccc} -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & \end{array}$$

$$C_1 = F^{-1}(4) = \text{circle}$$

$$C_2 = F^{-1}([1, 4]) = \text{shaded circle}$$

$$C_3 = G^{-1}(1) = \text{hyperbola}$$

$$C_4 = G^{-1}([-1, 1]) = \text{shaded hyperbola}$$

$$C_5 = C_2 \cap C_4 = \text{shaded intersection}$$

$$C_6 = \partial C_5 = \text{boundary of } C_5$$

$$D = C_5$$

$$H(x,y) = (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2 \\ = (x-1)^2 - (y-0)^2$$

$$= \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -4 & -3 & 0 & \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 3 & \\ \hline 4 & 0 & 0 & 1 & 4 & \\ \hline 3 & 0 & -1 & 0 & 3 & \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 0 & \end{array}$$

ESBOÇO
DE
GABARITO

a) $D =$

b) COORDENADAS APERTAS
DOS PÍCS:
 $(-0,5, 2)$ $(0,5, 2)$

$(-2, 0, 5)$ $(2, 0, 5)$

$(-0,5, -2)$ $(0,5, -2)$

c)

d) 5-SELTA
M - MÁXIMO
m - MÍNIMO

e)

$$f) \nabla H = (H_x, H_y) \\ = (-2(x-1), -2y)$$

$$\nabla H(P_1) = (0, 0)$$

$$\nabla H(P_2) = (2, 0)$$

$$\nabla H(P_3) = (-2, 0)$$

$$\nabla H(P_4) = (0, -2)$$

$$\nabla H(P_5) = (0, 2)$$