Cálculo 3 - 2022.2

Aulas 1 e 2: introdução ao curso
(e a trajetórias)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C3.html

Sobre a aula 1

Na aula 1 nós usamos as idéias dos 8 primeiros slides daqui,

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-intro.pdf

e do slide 10 daqui,

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-plano-tang.pdf#page=10

...pra desenhar casos particulares das figuras das seções 7.4 e 7.5 do "GA1" do Felipe Acker:

http://angg.twu.net/acker/acker__ga_livro1_2019.pdf#page=43

Introdução ao vetor velocidade

Em cursos de Cálculo 3 “pra matemáticos” a gente normalmente começa definindo o vetor velocidade como um limite. O Felipe Acker faz isso muito bem nos capítulos 2 e 3 do “GA4”,

http://angg.twu.net/acker/acker__ga_livro4_2019.pdf

Eu costumava fazer mais ou menos isso no curso de Cálculo 3, e a gente gastava uma aula inteira aprendendo a decifrar a fórmula daquele limite e visualizar o que ela queria dizer.

Dessa vez vamos tentar fazer algo diferente.
Vamos começar com exemplos e animações.
Assista este vídeo aqui até o 9:00,

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-bezier.pdf
https://www.youtube.com/watch?v=aVwxzDHniEw

mas considere que tudo até o 6:34...

Introdução ao vetor velocidade (cont.)

...mas considere que tudo no vídeo até o 6:34 são idéias avançadas que a gente só vai entender nuns exercícios que a gente vai fazer daqui a algumas aulas. Por enquanto reserve praticamente toda a sua atenção pro trecho entre 6:34 e 9:00, que é o trecho que a Freya Holmér mostra os vetores velocidade e aceleração pra algumas curvas de Bézier.

A gente vai fazer o seguinte. Nós vamos acreditar que *em geral* quando temos uma trajetória $P(t) = (x(t), y(t))$ o vetor velocidade dessa trajetória é $P'(t) = (x'(t), y'(t))$. Nós vamos ver vários exemplos disso, e vamos deixar pra entender os detalhes desse "em geral" quando formos entender a definição "pra matemáticos" do vetor velocidade.

Exercício 1: uma trajetória com um bico

Dê uma olhada no item 1e da VS do semestre passado:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C3-VS.pdf#page=2

Faça o que essa questão pede e represente graficamente $Q(t)+Q'(t)$ pra um monte de outros valores de t também — até você entender como essa trajetória se comporta. *Dica:* ela é um movimento retilíneo uniforme até um determinado instante, aí ela muda de vetor velocidade subitamente e vira um outro movimento retilíneo uniforme.

Exercício 2: um trajetória com teleporte

Represente graficamente a trajetória abaixo. Ela é parecida com a anterior, mas nessa tem um momento em que a partícula desaparece do ponto em que em estava e se teleporta pra outro lugar.

$$R(t) \;=\; \begin{cases} (t,4) & \text{quando } t \leq 6, \\ (5, 11-t) & \text{quando } 6 < t. \end{cases}$$

Dicas pro exercícios 1 e 2

Este vídeo aqui tem algumas figuras sobre como desenhar trajetórias:

`http://www.youtube.com/watch?v=3yWLubqHsic`

`http://angg.twu.net/eev-videos/2020.2-C3-intro.mp4`

Quase todo mundo achou muito difícil desenhar a trajetória do exercício 2 — se a gente calcula $R(t)$ só pra valores inteiros de t a gente não consegue descobrir como a $R(t)$ se comporta entre $t = 6$ e $t = 7$...

Um jeito de resolver isso é calcular $R(t)$ para $t = 6.1$, $t = 6.2$, $\ldots$, $t = 6.9$, desenhar esses pontos no gráfico, e aí tentar descobrir qual é o comportamento da $R(t)$ pra todos os valores em $[6, 7]$.

Um outro jeito é considerar que $R(t) = (x(t), y(t))$ e tentar entender as funções $x(t)$ e $y(t)$, que são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

“VT”

Vou me referir a esse PDF aqui como “VT”,
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C3-vetor-tangente.pdf
e aos exercícios 1 e 2 dele como “VTex1”, “VTex2”.

Faça os exercícios VTex1 e VTex2.

Órbita

Este exercício vai dar uma figura que é a órbita de uma lua.
O resultado vai ser algo como a figura da última página daqui,
`http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C3-orbita.pdf`
mas olhe pra essa figura durante só uns poucos segundos.

Neste exercício você vai tentar redescobrir essa figura sozinho, e você vai tentar descobrir como desenhar uma aproximação bem razoável pra ela só somando uns vetores no olhômetro e sem fazer nenhuma conta complicada — por exemplo, você vai evitar usar uma aproximação numérica pra $(\cos(\frac{1}{12} \cdot 2\pi), \mathrm{sen}(\frac{1}{12} \cdot 2\pi))$; ao invés disso você vai usar a representação gráfica deste ponto no $\mathbb{R}^2$.

Órbita (cont.)

Seja $h = \frac{1}{12} \cdot 2\pi$.
Esse h vai ser uma "hora". Vou explicar isso no quadro.
Sejam:

$$\begin{array}{rcl} P(t) & = & (\cos t, \operatorname{sen} t), \\ Q(t) & = & (\cos 4t, \operatorname{sen} 4t), \\ R(t) & = & \frac{1}{2}(\cos 4t, \operatorname{sen} 4t) = (\frac{1}{2}\cos 4t, \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4t), \\ S(t) & = & P(t) + R(t). \end{array}$$

a) Represente graficamente $P(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.
b) Represente graficamente $P(t) + P'(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.

c) Represente graficamente $Q(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.
d) Represente graficamente $Q(t) + Q'(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.

e) Represente graficamente $Q(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.
f) Represente graficamente $Q(t) + Q'(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.

g) Represente graficamente $S(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.
h) Represente graficamente $S(t) + S'(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.

Órbita (cont.)

Nos itens a até f você deve ter obtido pontos sobre círculos e vetores tangentes aos círculos apoiados nestes pontos. Nos itens g e h você deve ter obtido algo bem mais complicado: pontos e vetores apoiados nestes pontos, mas você ainda não sabe direito sobre que curva eles estão.

Reveja o trecho entre 6:34 e 9:00 do vídeo da Freya Holmér. A trajetória que ela analisa é bem "suave", no sentido de que ela não bicos ou teleportes, e a derivada da aceleração dela é constante.

No item h você obteve alguns pontos e vetores velocidade *de uma trajetória que você não sabe direito qual é...* você só tem uma lembrança vaga do "traço" dessa trajetória, porque você viu a figura-spoiler durante uns poucos segundos.

Órbita (cont.)

i) Desenhe uma trajetória bem suave que nos instantes $t = 0h$, $1h$, …, $12h$ passe pelos pontos que você obteve no item g. Aqui você vai conseguir uma aproximação bem tosca pro “traço” da trajetória $S(t)$.

j) Desenhe uma trajetória bem suave que nos instantes $t = 0h$, $1h$, …, $12h$ passe pelos pontos que você obteve no item h, e que naqueles instantes tenha exatamente os vetores velocidade que você também desenhou no item h. Aqui você provavelmente vai conseguir uma aproximação bastante boa pro “traço” da trajetória $S(t)$.

k) Refaça o desenho do item j pra ele ficar mais caprichado e simétrico e tal. Quando você achar que conseguiu fazer uma versão caprichada boa olhe de novo a figura-spoiler e compare o seu desenho com ela.