Cálculo 3 - 2022.2

Aula 27: Máximos e mínimos

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C3.html

Introdução

Quando a gente aprende polinômios a gente aprende uma matéria chamada "estudo do sinal de uma função", em que a gente aprende a marcar em $\mathbb{R}$ em que regiões as funções que nos interessam são positivas, negativas, ou 0... algo como isso aqui, mas desenhado de outro jeito:

$$\begin{array}{rccccc}
 & (-\infty,2) & 2 & (2,5) & 5 & (5,+\infty) \\
g(x)=x-2 & <0 & =0 & >0 & >0 & >0 \\
h(x)=x-5 & <0 & <0 & <0 & =0 & >0 \\
f(x)=(x-2)(x-5) & >0 & =0 & <0 & =0 & >0
\end{array}$$

Depois a gente aprende derivada e segunda derivada, e aí a gente estende essa idéia pra representar também as regiões em que derivada é positiva, negativa, ou 0, e as regiões em que a segunda derivada é positiva, negativa, ou 0, e a gente usa isso pra descobrir onde a função é crescente ou decrescente, onde a concavidade dela está pra baixo ou pra cima, e onde ela tem máximos e mínimos locais e máximos e mínimos globais. Dê uma olhada nas figuras das seções 5.1 até 5.4 do Miranda:

http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=122

Repare que o Miranda chama esse assunto de "extremos relativos" e "extremos absolutos"; o Bortolossi vai estender essas idéias pra mais dimensões nos capítulos 10, 11 e 12 dele, e ele vai usar outra terminologia: "máximos locais" e "máximos globais".

Estudo de sinal em $\mathbb{R}^2$ por numerozinhos

Se você achar a abordagem de hoje muito complicada *comece* pela de 2021... assista estes dois vídeos,

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=2noSv8hyNIk

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas-2.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=noVh-RsK5Jo

e faça os exercícios das páginas 8 até 13 daqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-diag-nums.pdf#page=8

Importante: nas aulas sobre máximos e mínimos eu escrevi muitas coisas no quadro que eu ainda não tive tempo de digitar. Você pode acessar os quadros destas aulas aqui:

http://angg.twu.net/2022.2-C3/C3-quadros.pdf#page=26

Um truque com derivadas direcionais

Vou começar supondo que

$$\begin{array}{rcl} z & = & a \\ & + & bx + cy \\ & + & dx^2 + exy + fy^2 \end{array}$$

e que o ponto que nos interessa é $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Depois que nós tivermos entendido bem as contas no ponto $(0, 0)$ a gente vai ver como refazê-las numa versão um pouco mais geral, em que (x_0, y_0) é um ponto qualquer.

Queremos generalizar as definições de mínimo local e máximo local do Miranda, que estão aqui,
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=124
pra $\mathbb{R}^2$. Vou usar um truque com derivadas direcionais.

Vou dizer que o ponto $(0, 0)$ é um mínimo local "na direção $\overrightarrow{(\alpha, \beta)}$" se a função $z(t) = z(x(t), y(t)) = z(\alpha t, \beta t)$ tem um mínimo local em $t = 0$, e vou dizer que a função z tem um mínimo local em $(0, 0)$ se o ponto $(0, 0)$ é um mínimo local "em todas as direções" — exceto pela "direção" $\overrightarrow{(\alpha, \beta)} = \overrightarrow{(0, 0)}$, que a gente considera que "não é uma direção válida", e "não interessa".

Se isto aqui for verdade,

$$\begin{array}{l} \forall \overrightarrow{(\alpha, \beta)} \neq \overrightarrow{(0, 0)}. \\ \frac{d}{dt}(z(\alpha t, \beta t)) = 0 \text{ e} \\ \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}(z(\alpha t, \beta t)) > 0 \end{array}$$

então o ponto $(0, 0)$ vai ser um mínimo local da função $z(x, y)$. Repare que lá no início eu defini que z era um polinômio de grau 2 em x e y;

Versão mega-rápida das páginas 365–394 do Bortolossi

Links:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C3-funcoes-homogeneas.pdf
http://angg.twu.net/2022.2-C3/C3-quadros.pdf#page=17
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-10.pdf

Digamos que $r_1, r_2, r, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$,
$\alpha, \beta > 0$, e $r_3 = x + \beta i$, $r_4 = x - \beta i$, e:

$$\begin{array}{rcl} z(x,y) & = & dx^2 + exy + fy^2, \\ h(x) & = & z(x,1). \end{array}$$

Então:

se	$h(x) = (x - r_1)(x - r_2)$	então $(0,0)$ é um ponto de sela,
se	$h(x) = \alpha(x - r_1)(x - r_2)$	então $(0,0)$ é um ponto de sela,
se	$h(x) = -\alpha(x - r_1)(x - r_2)$	então $(0,0)$ é um ponto de sela,
se	$h(x) = (x - r)^2$	então $(0,0)$ é como a figura da p.388,
se	$h(x) = \alpha(x - r)^2$	então $(0,0)$ é como a figura da p.388,
se	$h(x) = -\alpha(x - r)^2$	então $(0,0)$ é como a figura da p.388,
se	$h(x) = (x - r_3)(x - r_4)$	então $(0,0)$ “tem concavidade pra cima”,
se	$h(x) = \alpha(x - r_3)(x - r_4)$	então $(0,0)$ “tem concavidade pra cima”,
se	$h(x) = -\alpha(x - r_3)(x - r_4)$	então $(0,0)$ “tem concavidade pra baixo”.

Exercício

Digamos que

$$\begin{aligned} z(x,y) &= dx^2 + exy + fy^2, \\ h(x) &= z(x,1). \end{aligned}$$

Para cada uma das funções $h(x)$ abaixo diga qual é a função $z(x,y)$ associada a ela e faça o diagrama de sinais dessa função $z(x,y)$.

a) $h(x) = (x-1)(x+2)$
b) $h(x) = 2(x-1)(x+2)$
c) $h(x) = -3(x-1)(x+2)$
d) $h(x) = (x-1)^2$
e) $h(x) = 2(x-1)^2$
f) $h(x) = -3(x-1)^2$
g) $h(x) = (x-(2+i))(x-(2-i))$
h) $h(x) = 2(x-(2+i))(x-(2-i))$
i) $h(x) = -3(x-(2+i))(x-(2-i))$