Cálculo 3 - 2022.2

Aula 13: Plano tangente,
reta normal e derivada direcional.

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C3.html

Links

(Depois)

Introdução

Na aula passada nós vimos que num plano com esta equação

$$z \;=\; F(x,y) \;=\; a+bx+cy$$

dá pra encontrar os coeficientes da equação desse plano só olhando pro diagrama de numerozinhos, fazendo isto aqui:

$$\begin{array}{rcl} a &=& F(0,0) \\ b &=& F(x+1,y)-F(x,y) \\ c &=& F(x,y+1)-F(x,y) \end{array}$$

A interpretação geométrica de $b = F(x+1,y) - F(x,y)$ é a seguinte. Digamos que a gente escolheu um ponto (x,y) de $\mathbb{R}^2$. A gente vai considerar que esse é o nosso "ponto original", e a gente desloca ele uma unidade pra direita. O melhor modo de entender deslocamentos é pensando em termos de "antes" e "depois"; "antes" nós estávamos em (x,y) e "depois" nós andamos pra $(x+1,y)$. A gente geralmente vai usar o subscrito '$\cdot_0$' pra indicar "antes" e o subscrito '$\cdot_1$' pra indicar "depois"; então $(x_0,y_0) = (x,y)$ e $(x_1,y_1) = (x+1,y)$, e $(\Delta x, \Delta y) = (1,0)$. Além disso temos

$$\begin{array}{rclcl} z &=& F(x,y) \\ z_0 &=& F(x_0,y_0) &=& F(x,y) \\ z_1 &=& F(x_1,y_1) &=& F(x+1,y), \end{array}$$

e então:

$$b \;=\; F(x+1,y)-F(x,y) \;=\; z_1 - z_0 \;=\; \Delta z$$

Também dá pra interpretar o c de uma forma parecida, só que no caso do c o deslocamento é diferente: $(x_1,y_1)-(x_0,y_0) = (0,1)$. Se a gente souber usar direito esses truques notacionais a gente vai conseguir formalizar mais ou menos facilmente idéias como essa aqui:

> Num plano $z = F(x,y) = a+bx+cy$ o valor de b é o Δz quando $(\Delta x, \Delta y) = (1,0)$.

Pra formalizar o que essa frase quer dizer a gente vai precisar de um monte de regras que dizem como certas abreviações devem funcionar. Eu chamo essas regras, e a notação com elas, de "notação de físicos", e eu chamo a notação que não permite essas abreviações de "notação de matemáticos". Nós vimos que o Bortolossi fala sobre as abreviações da "notação de físicos" que ele vai evitar nas páginas 171 a 173 do capítulo 5 dele:
`http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-5.pdf#page=9`

A "notação de físicos" que a gente vai usar é praticamente a do "Calculus Made Easy" do Silvanus P. Thompson, mas ele 1) usa muito pouco a convenção de que '$\cdot_0$' e '$\cdot_1$' indicam "antes" e "depois", 2) ele geralmente não distingue 'd' e 'Δ', 3) ele muitas vezes escreve '$=$' em lugares em que seria mais correto usar '$\approx$'...

Diagramas de chaves

Nós às vezes vamos usar diagramas com chaves parecidos com o do PDF sobre tipos –

http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C3-tipos.pdf#page=2
http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C3-tipos.pdf#page=5

pra indicar traduções passo a passo ou contas passo a passo. Por exemplo:

$$\underbrace{\underbrace{F(\underbrace{\underbrace{x}_{x_0} + \underbrace{1}_{\Delta x}}_{x_1}, \underbrace{\underbrace{y}_{y_0}}_{y_1})}_{z_1} - \underbrace{F(\underbrace{x}_{x_0}, \underbrace{y}_{y_0})}_{z_0}}_{\Delta z}$$

Primeiros planos tangentes

Considere a seguinte construção:

$$\begin{array}{rcl} z &=& F(x,y) \\ S &=& \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y)\,\} \\ (x_0,y_0) &\in& \mathbb{R}^2 \\ f(\Delta x) &=& F(x_0+\Delta x, y_0) \\ g(\Delta y) &=& F(x_0, y_0+\Delta y) \\ \vec{v} &=& \overrightarrow{(1,0,f'(0))} \\ \vec{w} &=& \overrightarrow{(0,1,g'(0))} \\ r &=& \{\,(x_0,y_0,z_0)+t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\,\} \\ s &=& \{\,(x_0,y_0,z_0)+u\vec{w} \mid u \in \mathbb{R}\,\} \\ \pi &=& \{\,(x_0,y_0,z_0)+t\vec{v}+u\vec{w} \mid t,u \in \mathbb{R}\,\} \end{array}$$

Ela corresponde à figura da página 739 do capítulo 12
do APEX Calculus. Dê uma olhada:
http://angg.twu.net/2022.2-C3/APEX_Calculus_Version_4_cap_12.pdf#page=62

As retas r e s são retas tangentes à superfície S no ponto (x_0,y_0) e o plano π é o plano que contém as retas r e s. A definição no APEX Calculus usa derivadas parciais, a que eu pus acima não.

Exercício 1.
a) Sejam:

$$\begin{array}{rcl} F(x,y) &=& 3+2x+1y \\ A &=& \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \in \{0,1,2,3,4\}\,\} \\ (x_0,y_0) &=& (2,0) \end{array}$$

Visualize todos os objetos da construção à esquerda e desenhe alguns deles usando numerozinhos. Mais precisamente...

...mais precisamente: 1) pra visualizar a superfície S você vai desenhar um numerozinho para cada ponto do conjunto A; 2) pra entender as funções f e g você vai fazer uma tabela com os valores de $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ e $f(2)$ e depois uma tabela parecida para a função g; 3) pra visualizar as retas r e s você vai desenhar como numerozinhos os pontos de r e s que estão sobre o conjunto A; e 4) pra visualizar π você vai usar o que você já sabe sobre planos pra desenhar o diagrama de numerozinhos que contém os pontos que você desenhos no passo 3.

b) Faça a mesma coisa, mas agora mudando o ponto (x_0,y_0) para $(3,0)$.

c) Faça a mesma coisa, mas agora mudando o ponto (x_0,y_0) para $(3,2)$.

c) Faça a mesma coisa, mas agora para:

$$\begin{array}{rcl} F(x,y) &=& x^2+y^2 \\ A &=& \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \in \{0,1,2,3,4\}\,\} \\ (x_0,y_0) &=& (2,0) \end{array}$$

Nos itens a, b e c a superfície S era um plano. Agora ela passou a ser um parabolóide, e tudo vai passar a ser bem mais complicado.

d) Faça a mesma coisa que no item c, mas agora mudando o ponto (x_0,y_0) para $(3,0)$.

e) Faça a mesma coisa que nos dois últimos itens, mas agora mudando o ponto (x_0,y_0) para $(3,2)$.

Curvas de nível

Dê uma olhada em como o Bortolossi define curvas de nível — ele faz isso nas páginas 97 e 98 do capítulo 3:
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-3.pdf#page=19

Exercício 2.
Sejam:

$$\begin{array}{rcl} F(x,y) & = & y-2 \\ G(x,y) & = & (x-2)+(y-2) \\ H(x,y) & = & F(x,y)\cdot G(x,y) \end{array}$$

a) Faça os diagramas de numerozinhos de $F(x,y)$, $G(x,y)$ e $H(x,y)$. Desenhe numerozinhos nos pontos com $x,y \in \{0,1,2,3,4\}$.

b) Faça uma cópia beeeem grande do seu diagrama pra $H(x,y)$ e tente desenhar sobre ela as curvas de nível de $H(x,y)$ em $z=-1$, $z=0$, ..., $z=8$. Discuta com os seus colegas e tente descobrir que técnicas você pode usar pra desenhar aproximações razoáveis pra essas curvas na mão e no olhômetro.

Nas próximas aulas nós vamos aprender truques com derivadas que vão nos permitir desenhar aproximações bem boas pra essas curvas de nível fazendo poucas contas. Se você conseguir visualizar bem o truque do plano tangente do próximo exercício você vai conseguir entender bem esses truques com derivadas.

Exercício 3.
Use a construção do exercício 1 pra fazer o diagrama de numerozinhos do plano tangente à superfície $H(x,y)$ em $(x_0,y_0)=3$. Chame esse plano tangente de π. Descubra qual é a interseção desse plano π com o plano $z=z_0=H(x_0,y_0)$. Essa interseção vai ser uma reta; vamos chamá-la de r'. *O vetor diretor dessa reta vai ser tangente à curva de nível* — faça todas as figuras e depois tente entender isto.

0	2	4	6	8
-1	0	1	2	3
0	0	0	0	0
3	2	1	0	-1
8	6	4	2	0

0	2	4	6	8
-1	0	1	2	3
0	0	0	0	0
3	2	1	0	-1
8	6	4	2	0

0	2	4	6	8
-1	0	1	2	3
0	0	0	0	0
3	2	1	0	-1
8	6	4	2	0

0	2	4	6	8
-1	0	1	2	3
0	0	0	0	0
3	2	1	0	-1
8	6	4	2	0

0	2	4	6	8
-1	0	1	2	3
0	0	0	0	0
3	2	1	0	-1
8	6	4	2	0

0	2	4	6	8
-1	0	1	2	3
0	0	0	0	0
3	2	1	0	-1
8	6	4	2	0

Retas normais

Na página 741 do capítulo 12 —

http://angg.twu.net/2022.2-C3/APEX_Calculus_Version_4_cap_12.pdf#page=64

o APEX Calculus define a "reta normal" ao plano tangente e mostra que ela pode ser calculada por uma fórmula bem curta. Nós vamos usar essa fórmula algumas vezes nas próximas aulas, mas agora é melhor a gente rever como o "produto vetorial", ou "produto cruzado", é "um pedaço da conta do determinante".

Exercício 4.

Faça os exercícios das páginas 47, 48 e 49 daqui:

http://angg.twu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=47

A derivada direcional

O Bortolossi define derivada direcional na p.296 (cap.8)
e o APEX Calculus na página 729 (cap.12)... links:

http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-8.pdf#page=6
http://angg.twu.net/2022.2-C3/APEX_Calculus_Version_4_cap_12.pdf#page=52

Exercício 5.

O Bortolossi usa esta notação:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{p}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{p} + t \cdot \mathbf{v}) - f(\mathbf{p})}{t}$$

a) Descubra como traduzir ela – passo a passo! – pra "notação de físicos", com $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{(\alpha, \beta)}$.

b) Faça os exercícios 17, 18 e 19 daqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C3-notacao-de-fisicos.pdf#page=30