Cálculo 3 - 2022.2

Aulas 25 e 26: abertos e fechados em $\mathbb{R}^2$

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C3.html

Links

Capítulo 4 do Bortolossi:

http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-4.pdf

Como debugar representações gráficas:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-infs-e-sups.pdf#page=10

Abertos, fechados e compactos na Wikipedia:

https://en.wikipedia.org/wiki/Metric_space

https://en.wikipedia.org/wiki/General_topology

https://en.wikipedia.org/wiki/Topology

Este PDF é baseado neste outro mais antigo:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C3-abertos-e-fechados.pdf

Introdução

Dê uma olhada no capítulo 4 do Bortolossi...
Comece pela seção 4.1, "Por que funções contínuas são importantes", depois leia a seção 4.3, sobre o Teorema de Weirstrass em n variáveis, e relembre a definição de distância euclidiana na p.139.

Nós vamos começar entendendo as definições das páginas 142 até 148, e vamos reescrevê-las de um jeito bem mais curto.

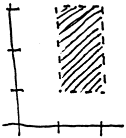
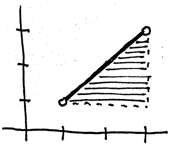
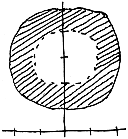
Nós vamos ver como fazer hipóteses sobre os exercícios dos próximos dois slides, como testar essas hipóteses, e como descartar as hipóteses erradas.

Nove subconjuntos de $\mathbb{R}^2$

(Compare com a p.130 do Bortolossi...)

Sejam:

$$\begin{array}{rcl}
C_1 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2<y\leq 3\,\}, \\
C_2 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2<y\leq 3 \ \text{ e } \ 1\leq x<4\,\}, \\
C_3 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(1,2))\leq 2\,\}, \\
C_4 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1<d((x,y),(1,2))\leq 2\,\}, \\
C_5 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(1,2))\leq 2 \ \text{ e } \ 1<x\,\}, \\
C_6 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>x\,\},
\end{array}$$

$C_7 =$  , $C_8 =$  , $C_9 =$  .

Exercício 1.
Represente graficamente os conjuntos $C_1, \ldots, C_6$.

Exercício 2.
Represente os conjuntos C_7, C_8, C_9
em "notação de conjuntos" — isto é,
na forma $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ldots \,\}$.

Bolas abertas e fechadas

Se P é um ponto de $\mathbb{R}^n$ então a
bola fechada de raio ε em torno de P, $\overline{\mathsf{B}}_\varepsilon(P)$, e a
bola aberta de raio ε em torno de P, $\mathsf{B}_\varepsilon(P)$,
são definidas assim:

$$\begin{array}{rcl}
\overline{\mathsf{B}}_\varepsilon(P) & = & \{\, Q \in \mathbb{R}^n \mid d(P,Q) \leq \varepsilon \,\} \\
\mathsf{B}_\varepsilon(P) & = & \{\, Q \in \mathbb{R}^n \mid d(P,Q) < \varepsilon \,\}
\end{array}$$

Por exemplo, se $P = 6 \in \mathbb{R}^1$ então:

$$\begin{array}{rcl}
\overline{\mathsf{B}}_2(6) & = & \{\, Q \in \mathbb{R}^1 \mid d(6,Q) \leq 2 \,\} \\
 & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid d(6,x) \leq 2 \,\} \\
 & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(6-x)^2} \leq 2 \,\} \\
 & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid |x-6| \leq 2 \,\} \\
 & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x-6 \leq 2 \,\} \\
 & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid -2+6 \leq x \leq 2+6 \,\} \\
 & = & [4,8]
\end{array}$$

Exercício 3.
Represente graficamente:

a) $\overline{\mathsf{B}}_1((2,2))$,
b) $\mathsf{B}_1((2,2))$.

Dica: estes conjuntos vão parecer muito mais com "bolas de verdade" do que o conjunto $\overline{\mathsf{B}}_2(6)$ do slide anterior.

Lembre que a gente desenha a fronteira de um conjunto tracejada quando a gente quer indicar que os pontos da fronteira não pertencem ao conjunto e a gente desenha ela sólida quando quer indicar que os pontos dela pertencem ao conjunto. Veja os desenhos dos conjuntos C_8 e C_9.

Exercício 4.
Aqui você vai ter que ser capaz de visualizar bolas sobrepostas a conjuntos que você já desenhou sem desenhar estas bolas. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.

a) $\mathsf{B}_{0.1}((0, 2.5)) \subseteq C_1$
b) $\mathsf{B}_{0.5}((0, 2.5)) \subseteq C_1$
c) $\overline{\mathsf{B}}_{0.5}((0, 2.5)) \subseteq C_1$
d) $\mathsf{B}_{0.1}((1, 3)) \subseteq C_2$
e) $\mathsf{B}_{0.1}((2.5, 2.5)) \subseteq C_2$
f) $\mathsf{B}_{1}((2, 2)) \subseteq C_3$
g) $\overline{\mathsf{B}}_{1}((2, 2)) \subseteq C_3$
h) $\mathsf{B}_{0.5}((1, 0.5)) \subseteq C_4$
i) $\mathsf{B}_{0.1}((0.5, 2)) \subseteq C_5$
j) $\mathsf{B}_{0.001}((1.1, 1.01)) \subseteq C_8$

O interior de um conjunto (e conjuntos abertos)

Def: o *interior* de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Int}(A)$, é definido como:

$$\mathrm{Int}(A) \;=\; \{\, P \in A \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq A \,\}.$$

Note que isto sempre é verdade: $\mathrm{Int}(A) \subset A$.
Dizemos que um conjunto A é *aberto* quando $A \subset \mathrm{Int}(A)$.

Infinitas operações / seja com o Bob

Pra entender a definição de interior e as próximas você vai precisar fazer um número infinito de operações pra chegar no resultado, e pra isso você vai ter que usar algumas técnicas que nós vimos em Cálculo 2 no semestre passado. Os links abaixo vão pras versões deste semestre do material sobre essas técnicas, que ficou bem melhor do que o do semestre passado.

Veja este PDF, a partir da página 11 dele:
`http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-somas-de-riemann.pdf`

e relembre as definições de inf e sup daqui:
`http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-TFC1-e-TFC2.pdf`

Exercício 5.
Seja $A = [2,4] \subset \mathbb{R}^1$.
Verifique que A não é aberto usando
a definição do slide anterior.
Dica: como $A = [2,4]$,

$$\begin{array}{rrll} & A & \text{não é aberto} \\ \Leftrightarrow & A & \not\subseteq & \mathrm{Int}(A) \\ \Leftrightarrow & A & \not\subseteq & \{\, P \in A \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq A \,\} \\ \Leftrightarrow & [2,4] & \not\subseteq & \{\, P \in [2,4] \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq [2,4] \,\} \end{array}$$

Tente continuar você mesmo usando ou matematiquês ou português.
Você talvez vá precisar de truques que as pessoas costumam aprender nos primeiros semestres mas acabaram não aprendendo dessa vez por causa da pandemia...

Exercício 6.

Represente graficamente:

a) $\mathrm{Int}(C_8)$,
b) $\mathrm{Int}(C_4)$,
c) $\mathrm{Int}(C_5)$,
d) $\mathrm{Int}(\mathsf{B}_1((2,2)))$.

O fecho de um conjunto (e conjuntos fechados)

Def: o *fecho* de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$, $\overline{A}$,
é definido como:

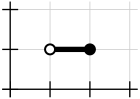
$$\overline{A} \;\; = \;\; \{\, P \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \cap A \neq \emptyset \,\}$$

Compare com a definição do interior:

$$\mathrm{Int}(A) \;\; = \;\; \{\, P \in A \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq A \,\}.$$

Isto aqui sempre é verdade: $A \subset \overline{A}$.
Quando $\overline{A} \subset A$ dizemos que A é um conjunto *fechado*.

Exercício 7.
Digamos que:

$D_1 \quad =$ 

Represente graficamente:
a) $\overline{C_8}$
b) $\overline{D_1}$
c) $\text{Int}(D_1)$

Um aviso sobre a P2 (de 2021.2)

Em quase todos os problemas deste PDF é muito mais fácil mostrar que uma resposta está errada do que mostrar que ela está certa... e o método pra mostrar que uma resposta está errada vai ser um dos assuntos principais da P2.

Algumas traduções

$$\begin{array}{rcl}
A \subset B & = & \forall a \in A. a \in B \\
A = B & = & (A \subset B) \land (B \subset A) \\
\neg(P \land Q) & = & \neg P \lor \neg Q \\
\neg(P \lor Q) & = & \neg P \land \neg Q \\
\neg(\forall a \in A. P(a)) & = & \exists a \in A. \neg P(a) \\
\neg(\exists a \in A. P(a)) & = & \forall a \in A. \neg P(a) \\
x \in \{\, a \in A \mid P(a) \,\} & = & x \in A \land P(x) \\
\neg(P \to Q) & = & P \land \neg Q \\
[20, 42) & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid 20 \le x < 42 \,\} \\
20 \le x < 42 & = & 20 \le x \land x < 42
\end{array}$$

Lembra que '$\land$' é "e", '$\lor$' é "ou", '$\neg$' é "não", '$\to$' é "implica".

Alguns exemplos de traduções

$$\begin{array}{rl}
& [a,b] \subset [20,42) \\
= & \forall x \in [a,b].x \in [20,42) \\
= & \forall x \in [a,b].20 \le x < 42 \\
= & \forall x \in \mathbb{R}.x \in [a,b] \to 20 \le x < 42 \\
= & \forall x \in \mathbb{R}.a \le x \le b \to 20 \le x < 42
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
& \neg([a,b] \subset [20,42)) \\
= & \neg(\forall x \in \mathbb{R}.a \le x \le b \to 20 \le x < 42) \\
= & \exists x \in \mathbb{R}.\neg(a \le x \le b \to 20 \le x < 42) \\
= & \exists x \in \mathbb{R}.\neg(a \le x \le b) \land (20 \le x < 42) \\
= & \exists x \in \mathbb{R}.\neg(a \le x \land x \le b) \land (20 \le x < 42) \\
= & \exists x \in \mathbb{R}.(\neg(a \le x) \lor \neg(x \le b)) \land (20 \le x < 42) \\
= & \exists x \in \mathbb{R}.(x < a \lor b < x) \land (20 \le x < 42)
\end{array}$$

Imagem inversa

Algumas das igualdades abaixo são definições, as outras são exemplos.

$$
\begin{array}{rcl}
H(x,y) &=& xy \\
H_I &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)\in I\,\} \\
H_{[a,b]} &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)\in [a,b]\,\} \\
H_{[0,1]} &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)\in [0,1]\,\} \\
H^{-1}(a) &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)=a\,\} \\
H^{-1}(I) &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)\in I\,\} \\
H^{-1}([0,1]) &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)\in [0,1]\,\} \\
&=& H_{[0,1]}
\end{array}
$$

Exercício 8.
Represente graficamente:

$$
\begin{array}{rcl}
C_1 &=& H^{-1}(0) \\
C_2 &=& H^{-1}(1) \\
C_3 &=& H^{-1}([0,1]) \\
C_4 &=& H^{-1}((0,1)) \\
C_5 &=& \mathrm{Int}(C_3) \\
C_6 &=& \overline{C_4} \\
C_7 &=& H^{-1}(4) \\
C_8 &=& H^{-1}([0,4]) \\
C_9 &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x \text{ e } 1\le y\,\} \\
C_{10} &=& C_8\cap C_9
\end{array}
$$

Conjuntos limitados e compactos
Um conjunto $C \in \mathbb{R}^2$ é *limitado* quando ele obedece isto:

$$\exists r\in\mathbb{R}.\, C\subset B_r((0,0))$$

.

Um conjunto $C \in \mathbb{R}^2$ é *compacto* quando ele é fechado e limitado.

Exercício 9.
Preencha a tabela abaixo com '**V**'s e '**F**'s.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_{10}
é aberto									
é fechado									
é limitado									
é compacto									

Máximos numa elipse

Dê uma olhada nas figuras das páginas 355 e 356 do Bortolossi, no capítulo 10 dele:
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-10.pdf#page=5
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-10.pdf#page=6
Ele usa:

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) &=& x^2+y^2 \\ g(x,y) &=& \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \\ D_2 &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)\leq 1\,\} \\ D_3 &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)=1\,\} \end{array}$$

D_2 é uma elipse "cheia" incluindo o interior dela, e
D_3 é só a fronteira de D_2.
Note que $(-2,0),(2,0),(0,3),(0,-3)\in D_3$.

Exercício 10.
a) Desenhe algumas curvas de nível de $f(x,y)$.

b) Na página 354 o Bortolossi desenha curvas de nível dentro de um quadrado. Desenhe algumas curvas de nível de $f(x,y)$ dentro da "elipse cheia" D_2.

c) Tente descobrir *no olhômetro* quais são os máximos e mínimos de $f(x,y)$ em D_2. Dica: o Bortolossi leva várias páginas fazendo isso — leia o texto dele!

Dica: o objetivo do item (c) é você aprender a resolver só com curvas de nível as idéias que o Bortolossi apresenta usando figuras em 3D. Se você não conseguir fazer a tradução das figuras 3D pra curvas de nível direto você pode começar desenhando "cortes" sobre as figuras 3D, como na questão do mini-teste 1 de 2020.2:
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-tudo.pdf#page=83

...e repare que quando o Bortolossi chega no capítulo 12 ele passa a usar quase só curvas de nível e gradientes — ele praticamente abandona as figuras 3D:
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-12.pdf