Cálculo 2 - 2023.1

P2 (Segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.1-C2.html

Questão 1

(Total: 4.0 pts)
Lembre que no curso eu mostrei que o meu modo preferido de escrever o "método" para resolver EDOs com variáveis separáveis — "EDOVSs" — é a "demonstração" [M] abaixo... eu pus o termo "demonstração" entre aspas porque alguns dos passos da [M] são gambiarras nas quais a gente não pode confiar totalmente, e aí a gente precisa sempre testar as nossas soluções. O [F] abaixo — a "fórmula" — é uma versão resumida do [M].

$$[\mathrm{M}] \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{g(x)}{h(y)} \\ h(y)\,dy & = & g(x)\,dx \\ \int h(y)\,dy & = & \int g(x)\,dx \\ \parallel & & \parallel \\ H(y)+C1 & & G(x)+C2 \\ H(y) & = & G(x)+C2-C1 \\ & = & G(x)+C3 \\ H^{-1}(H(y)) & = & H^{-1}(G(x)+C3) \\ \parallel & & \\ y & & \end{array} \right)$$

$$[\mathrm{F}] \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{g(x)}{h(y)} \\ H^{-1}(H(y)) & = & H^{-1}(G(x)+C3) \\ \parallel & & \\ y & & \end{array} \right)$$

Seja $(*)$ esta EDOVS:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2y}$$

a) **(2.0 pts)** Encontre as duas soluções gerais da EDO $(*)$ – a solução "positiva" e a "negativa" – e teste-as.

b) **(1.0 pts)** Encontre a solução particular que passa pelo ponto $(3, 2)$ e teste-a.

c) **(1.0 pts)** Encontre a solução particular que passa pelo ponto $(4, -3)$ e teste-a.

Muito importante: em todas as questões desta prova exceto a questão sobre somas de Riemann eu vou corrigir as respostas de vocês como se eu fosse o "colega menos seu amigo e sem paciência pra adivinhar nada" da Dica 7 e do slide sobre contextos... por exemplo, se você escrever só "$a = 42$" eu vou interpretar isso como "aqui essa pessoa tá dizendo que é óbvio que '$a = 42$' é sempre verdade – e isso é falso!!!", e aí babau. Ou seja, a parte em português das questões de vocês vai ser MUUUUITO importante!

A prova tem um anexo que é um gabarito de uma prova antiga, e que tem exemplos de uso de várias partículas em português como "seja", "isto é", "temos" e "então". Esse anexo não tem exemplos de todas as partículas mais comuns – por exemplo, faltam o "queremos que", o "vamos testar se" e o "lembre que" – mas acho que ele deve ajudar bastante.

Questão 2

(Total: 4.0 pts)
Lembre que nós vimos dois tipos de EDOs lineares com coeficientes constantes — "EDOLCCs" — no curso: o primeiro tipo tinha soluções básicas da forma e^{ax} e e^{bx}, onde a e b são reais, e o segundo tipo tinha "soluções básicas complexas" da forma $e^{(a+ib)x}$ e $e^{(a-ib)x}$ e "soluções básicas reais" da forma $e^{\alpha x}\cos\beta x$ e $e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,\beta x$; as soluções básicas reais eram combinações lineares das soluções básicas complexas e vice-versa.

Sejam $(**)$ e $(***)$ as EDOs abaixo:

$$\begin{array}{rcll} y'' + y' - 20y &=& 0 & \qquad (**) \\ y'' + 4y' + 29y &=& 0 & \qquad (***) \end{array}$$

A EDO $(**)$ é do primeiro tipo e a EDO $(***)$ é do segundo tipo.

a) **(0.5 pts)** Encontre as soluções básicas e a solução geral da EDO $(**)$. Dê um nome para cada uma delas.

b) **(1.5 pts)** Encontre uma solução da EDO $(**)$ – vou chamá-la de $g(x)$ – que obedece $g(0) = 4$ e $g'(0) = 5$, e teste-a. Dica: você vai ter que resolver um sistema pra descobrir a quantidade certa de cada "vetor" na combinação linear!

c) **(0.5 pts)** Diga quais são as "soluções básicas complexas" e as "soluções básicas reais" para a EDO $(***)$.

d) **(1.5 pts)** Escolha uma das suas "soluções básicas reais" do item anterior e verifique que ela realmente é uma solução da EDO $(***)$.

Questão 3

(Total: 1.0 pts)

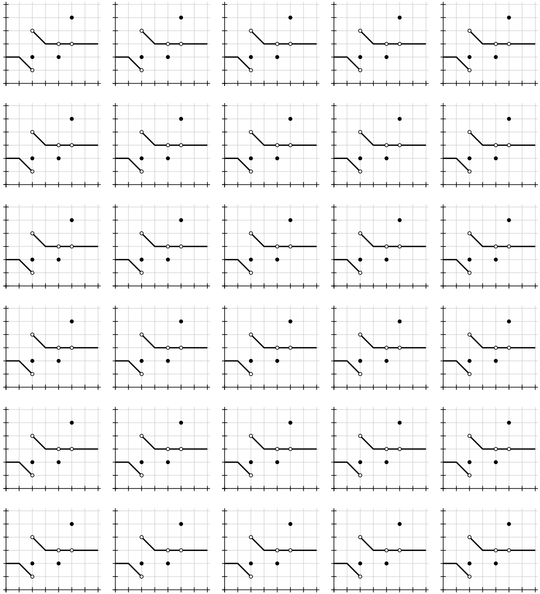
Lembre que nós vimos estes tipos de Somas de Riemann,

$$\begin{array}{rcl}
[L] & = & \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i - a_i) \\
[R] & = & \sum_{i=1}^{N} f(b_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{Trap}] & = & \sum_{i=1}^{N} \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i - a_i) \\
[M] & = & \sum_{i=1}^{N} f(\frac{a_i+b_i}{2})(b_i - a_i) \\
[\min] & = & \sum_{i=1}^{N} \min(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\max] & = & \sum_{i=1}^{N} \max(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\inf] & = & \sum_{i=1}^{N} \inf(f([a_i, b_i]))(b_i - a_i) \\
[\sup] & = & \sum_{i=1}^{N} \sup(f([a_i, b_i]))(b_i - a_i)
\end{array}$$

Seja $f(x)$ a função dos gráficos à direita.
Representar graficamente cada um dos somatórios abaixo.

a) $[\sup]_{\{1,6\}}$	b) $[\sup]_{\{1,3,6\}}$	c) $[\sup]_{\{1,3,5,6\}}$
d) $[\inf]_{\{1,6\}}$	e) $[\inf]_{\{1,3,6\}}$	f) $[\inf]_{\{1,3,5,6\}}$
g) $[\max]_{\{1,5\}}$	h) $[\max]_{\{1,3,5\}}$	i) $[\max]_{\{1,3,4,5\}}$
j) $[\min]_{\{1,5\}}$	k) $[\min]_{\{1,3,5\}}$	l) $[\min]_{\{1,3,4,5\}}$

Indique claramente qual desenho é a resposta final de cada item e quais desenhos são rascunhos.



Questão 4

(Total: 2.0 pts)

Seja

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq 1 + \cos x \}.$$

Seja B o sólido que obtemos rodando a região A em torno do eixo x e seja C o sólido que obtemos rodando a região A em torno do eixo y.

a) **(0.2 pts)** Faça um esboço da região A.

b) **(0.8 pts)** Calcule o volume de B.

c) **(1.0 pts)** Calcule o volume de C.

Importante: nos itens (b) e (c) você provavelmente vai chegar em integrais difíceis de resolver. Você não precisa resolver elas, basta chegar em respostas que sejam integrais definidas.

Anexo: gabarito de uma questão da P2 de 2022.2

A substituição é:

$$[\mathrm{S}] = \begin{bmatrix} G(x) := x^4+5 \\ H(y) := y^2+3 \\ g(x) := 4x^3 \\ h(y) := 2y \\ H^{-1}(x) := \sqrt{x-3} \end{bmatrix}$$

a) Seja:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3}{2y} \qquad (*)$$

b) Seja: $H^{-1}(x) = \sqrt{x-3}.$

Temos:

$$\begin{array}{rcl} H^{-1}(H(y)) &=& \sqrt{H(y)-3} \\ &=& \sqrt{(y^2+3)-3} \\ &=& y. \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rcl} y &=& H^{-1}(G(x)+C_3) \\ &=& \sqrt{(G(x)+C_3)-3} \\ &=& \sqrt{((x^4+5)+C_3)-3} \\ &=& \sqrt{x^4+2+C_3} \\ \text{Seja:}\quad f(x) &=& \sqrt{x^4+2+C_3}. \end{array}$$

d) Será que $f(x)$ obedece $(*)$?

Temos $f'(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+2+C_3}}$, e com isso:

$$\left(f'(x) = \frac{4x^3}{2f(x)}\right) \begin{bmatrix} f(x) = \sqrt{x^4+2+C_3} \\ f'(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+2+C_3}} \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+2+C_3}} = \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+2+C_3}}\right) \qquad =)$$

e)

$$\begin{array}{lrcl} \text{Se} & f(x_1) &=& y_1, \\ \text{i.e.,} & f(1) &=& 2, \\ \text{então} & f(1) &=& \sqrt{1^4+2+C_3} \\ & &=& \sqrt{3+C_3} \\ & &=& 2 \\ & 2^2 &=& \sqrt{3+C_3}^2 \\ & 4 &=& 3+C_3 \\ & C_3 &=& 1 \\ & f(x) &=& \sqrt{x^4+2+C_3} \\ & &=& \sqrt{x^4+3} \\ \text{Seja:} & f_1(x) &=& \sqrt{x^4+3}. \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{lrcl} \text{Será que} & f_1(x_1) &=& y_1, \\ \text{i.e.,} & f_1(1) &=& 2? \\ & \sqrt{1^4+3} &=& \sqrt{4} \\ & &=& 2 \qquad =) \end{array}$$

Mini-gabarito

1a) $f_1(x) = \sqrt{-x - C_3}$,
$\quad f_2(x) = -\sqrt{-x - C_3}$
1b) $f_3(x) = \sqrt{7 - x}$ (passa por $(3, 2)$)
1c) $f_4(x) = -\sqrt{13 - x}$ (passa por $(4, -3)$)

2) $y'' + y' - 20y = (D + 5)(D - 4)y$,
$\quad y''+4y'+29y = (D-(-2+5i))(D-(-2-5i))y$,
2a) $f_1(x) = e^{4x}$, $f_2(x) = e^{-5x}$
2b) $g(x) = \frac{25}{9}e^{4x} + \frac{11}{9}e^{-5x}$
2c) $f_1(x) = e^{(-2+5i)x}$, $f_2(x) = e^{(-2-5i)x}$,
$\quad f_3(x) = e^{-2x}\cos 5x,\ f_2(x) = e^{-2x}\,\text{sen}\,5x$

4b)
$$\begin{array}{rcl}
r(x) & = & 1 + \cos x \\
\mathsf{área}(x) & = & \pi(1 + \cos x)^2 \\
\mathsf{vol} & = & \int_{x=0}^{x=\pi} \pi(1 + \cos x)^2\,dx
\end{array}$$

4c)
$$\begin{array}{rcl}
y & = & 1 + \cos x \\
y - 1 & = & \cos x \\
x & = & \arccos(y - 1) \\
\mathsf{área}(y) & = & \pi(\arccos(y - 1))^2 \\
\mathsf{vol} & = & \int_{y=0}^{y=2} \pi(\arccos(y - 1))^2\,dy
\end{array}$$