Cálculo 2 - 2023.1

Prova de reposição (VR)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.1-C2.html

Questão 1.
(Total: 4.0 pts)
Calcule:

$$\int \frac{x^3}{(x-4)(x+5)}\,dx$$

Questão 2.
(Total: 4.0 pts)
Calcule

$$\int x^3\sqrt{1-4x^2}\,dx$$

e teste o seu resultado.

Questão 3.
(Total: 4.0 pts)
Seja (*) esta EDO:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4y^3}$$

a) **(1.0 pts)** Encontre a solução geral "positiva" de $(*)$ e teste-a.
b) **(2.0 pts)** Encontre a solução geral "negativa" de $(*)$ e teste-a.
c) **(1.0 pts)** Encontre a solução particular de $(*)$ que passa pelo ponto $(4,-3)$ e teste-a.

Dicas
Pra resolver a questão 2 você vai ter que começar com uma substituição da forma $u = 2x$ – isso vai transformar aquela integral numa que dá pra resolver por um dos casos mais simples de substituição trigonométrica.

Nas questões 1 e 3 é muito fácil a gente se perder nas contas e chegar ou a soluções erradas ou a soluções quase ilegíveis que só fazem sentido pra um leitor com muita, muita, muita boa vontade. O melhor modo de evitar isso é definir várias funções intermediárias usando o "seja" – lembre que cada uma delas tem que ter um nome diferente!!! – e usar as partículas em português pra distinguir as igualdades que são verdade sempre, as que só são verdade em certas condições, as que vamos testar se são verdadeiras ou não, e as que são hipóteses pro chutar-e-testar. A folha em anexo tem exemplos de várias das partículas em português mais comuns.

A EDO da questão 3 é uma EDO com variáveis separáveis ("EDOVS"). Eu costumo escrever o "método" e a "fórmula" para resolver EDOVSs deste jeito,

$$[M] = \left(\begin{array}{rcl} \frac{dy}{dx} &=& \frac{g(x)}{h(y)} \\ h(y)\,dy &=& g(x)\,dx \\ \int h(y)\,dy &=& \int g(x)\,dx \\ \| && \| \\ H(y)+C1 && G(x)+C2 \\ H(y) &=& G(x)+C2-C1 \\ &=& G(x)+C3 \\ H^{-1}(H(y)) &=& H^{-1}(G(x)+C3) \\ \| && \\ y && \end{array} \right)$$

$$[F] = \left(\begin{array}{rcl} \frac{dy}{dx} &=& \frac{g(x)}{h(y)} \\ H^{-1}(H(y)) &=& H^{-1}(G(x)+C3) \\ \| && \\ y && \end{array} \right)$$

Mas você pode organizar as suas contas de outros jeitos se quiser.

Anexo: gabarito de uma questão da P2 de 2022.2

A substituição é:

$$[\mathrm{S}] = \begin{bmatrix} G(x) := x^4+5 \\ H(y) := y^2+3 \\ g(x) := 4x^3 \\ h(y) := 2y \\ H^{-1}(x) := \sqrt{x-3} \end{bmatrix}$$

a) Seja:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3}{2y} \qquad (*)$$

b) Seja: $\quad H^{-1}(x) = \sqrt{x-3}.$

Temos:

$$\begin{array}{rcl} H^{-1}(H(y)) &=& \sqrt{H(y)-3} \\ &=& \sqrt{(y^2+3)-3} \\ &=& y. \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rrcl} & y &=& H^{-1}(G(x)+C_3) \\ & &=& \sqrt{(G(x)+C_3)-3} \\ & &=& \sqrt{((x^4+5)+C_3)-3} \\ & &=& \sqrt{x^4+2+C_3} \\ \text{Seja:} & f(x) &=& \sqrt{x^4+2+C_3}. \end{array}$$

d) Será que $f(x)$ obedece $(*)$?

Temos $f'(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+2+C_3}}$, e com isso:

$$\left(f'(x) = \frac{4x^3}{2f(x)}\right) \begin{bmatrix} f(x) = \sqrt{x^4+2+C_3} \\ f'(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+2+C_3}} \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+2+C_3}} = \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+2+C_3}}\right) \qquad =)$$

e)

$$\begin{array}{lrcl} \text{Se} & f(x_1) &=& y_1, \\ \text{i.e.,} & f(1) &=& 2, \\ \text{então} & f(1) &=& \sqrt{1^4+2+C_3} \\ & &=& \sqrt{3+C_3} \\ & &=& 2 \\ & 2^2 &=& \sqrt{3+C_3}^2 \\ & 4 &=& 3+C_3 \\ & C_3 &=& 1 \\ & f(x) &=& \sqrt{x^4+2+C_3} \\ & &=& \sqrt{x^4+3} \\ \text{Seja:} & f_1(x) &=& \sqrt{x^4+3}. \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{lrcl} \text{Será que} & f_1(x_1) &=& y_1, \\ \text{i.e.,} & f_1(1) &=& 2? \\ & \sqrt{1^4+3} &=& \sqrt{4} \\ & &=& 2 \qquad =) \end{array}$$

Mini-gabarito

1) $\int \frac{x^3}{(x-4)(x+5)}\,dx = x^2 - x + \frac{64}{9}\ln|x-4| + \frac{125}{9}\ln|x+5|$

2) $\int x^3\sqrt{1-4x^2}\,dx = (\frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{60}x^2 - \frac{1}{120})\sqrt{1-4x^2}$

3a) $f_1(x) = \sqrt[4]{-x-C_3}$
3b) $f_2(x) = -\sqrt[4]{-x-C_3}$
3c) $f_3(x) = -\sqrt[4]{-x+85}$