Cálculo 2 - 2023.1

Aula 21: EDOs com variáveis separáveis.

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2023.1-C2.html

Links
Algumas figuras de campos de direções:
DiffyQsP27, Stew9p9, 2eT214

EDOs por chutar e testar:
2gT40, 2dT13

2dT293 Material sobre EDOVSs de 2021.2
2dT306 Slides sobre inversas de 2021.2
Leit7 Funções inversas, logarítmicas e exponenciais

Questões sobre EDOVSs nas provas de 2022.2:
2fT123, 2fT126 P2, gabarito
2fT135, 2fT137 VS, anexo

ZillCullenInicioP13 (p.6) Soluções implícitas e explícitas
ZillCullenInicioP16 (p.9) parâmetros, solução particular
ZillCullenInicioP51 (p.44) 2.2: Variáveis separáveis
Stew9p18 (p.618) 9.3: Separable equations

Inversas: introdução

Dê uma olhada nestes links:
ZillCullenInicioP13 (p.6) Soluções implícitas e explícitas
ZillCullenInicioP16 (p.9) parâmetros, solução particular
ZillCullenInicioP51 (p.44) 2.2: Variáveis separáveis

O método pra resolver EDOs com variáveis separáveis nos dá primeiro "soluções implícitas", como $x^2 + y^2 = C$ or $x^2 + y^2 = 42$, e aí depois disso a gente tem que transformar essas soluções implícitas em "soluções explícitas", em que y é uma função de x... por exemplo:

$$\begin{array}{rcl}
x = \sqrt{C - x^2} & \Rightarrow & f_1(x) = \sqrt{C - x^2} \\
x = -\sqrt{C - x^2} & \Rightarrow & f_2(x) = -\sqrt{C - x^2} \\
x = \sqrt{42 - x^2} & \Rightarrow & f_3(x) = \sqrt{42 - x^2} \\
x = -\sqrt{42 - x^2} & \Rightarrow & f_4(x) = -\sqrt{42 - x^2}
\end{array}$$

Praticamente todo mundo se enrola na hora de passar das "soluções implícitas" pras "soluções implícitas", principalmente nos casos em que a gente tem "várias inversas"...

Eu vou usar uma terminologia que é meio errada, e vou dizer que $g_1(y) = \sqrt{y}$ e $g_2(y) = -\sqrt{y}$ são duas inversas diferentes para $f(x) = x^2$. Um bom lugar pra aprender a terminologia correta – que precisa que a gente especifique os domínios! – é o capítulo 7 do Leithold: Leit7.

Inversas: um exemplo complicado
Digamos que queremos inverter esta função:

$$f(x) = (x+3)^4 + 5$$

O método é este aqui, mas repare que ele tem uma bifurcação...

$$\begin{array}{rcl} y &=& (x+3)^4 + 5 \\ y-5 &=& (x+3)^4 \\ \sqrt[4]{y-5} &=& \sqrt[4]{(x+3)^4} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \sqrt[4]{y-5} &=& x+3 \\ -3+\sqrt[4]{y-5} &=& x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \sqrt[4]{y-5} &=& -(x+3) \\ \sqrt[4]{y-5} &=& -x-3 \\ \sqrt[4]{y-5} &=& -x-3 \\ 3+\sqrt[4]{y-5} &=& -x \\ -(3+\sqrt[4]{y-5}) &=& x \end{array}$$

Se a gente segue o caminho da esquerda a gente obtém

$$f^{-1}(y) = -3 + \sqrt[4]{y-5},$$

e se a gente segue o caminho da direita a gente obtém

$$f^-1(y) = -(3 + \sqrt[4]{y-5}).$$

Sabemos que $\sqrt[4]{\alpha^4} = |\alpha|$, e portanto:

$$\begin{array}{rcl} \alpha \geq 0 &\Rightarrow& \sqrt[4]{\alpha^4} = \alpha \\ \alpha \leq 0 &\Rightarrow& \sqrt[4]{\alpha^4} = -\alpha \\ x+3 \geq 0 &\Rightarrow& \sqrt[4]{(x^3)^4} = x+3 \\ x+3 \leq 0 &\Rightarrow& \sqrt[4]{(x^3)^4} = -(x+3) \end{array}$$

Ou seja, nas contas à esquerda se $x+3 \geq 0$ nós temos que seguir o caminho da esquerda, e se $x+3 \leq 0$ nós temos que seguir o caminho da direita.
O melhor modo da gente entender essas duas inversas é esse aqui. Considere estes três conjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rcl} A_1 &=& \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x+3)^4 + 5\,\} \\ A_2 &=& \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x+3)^4 + 5,\ x+3 \geq 0\,\} \\ A_3 &=& \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x+3)^4 + 5,\ x+3 \leq 0\,\} \end{array}$$

Os conjuntos A_2 e A_3 são gráficos de funções inversíveis e A_1 é o gráfico de uma função não-inversível. Os domínios dessas funções são relativamente fáceis de calcular – eles são $\mathbb{R}$, $\{\,x \in \mathbb{R} \mid x+3 \geq 0\,\}$ e $\{\,x \in \mathbb{R} \mid x+3 \leq 0\,\}$ respectivamente – mas as imagens são um pouco mais complicadas...

...mas lembre que em C2 a gente costuma fazer as contas em duas etapas: na primeira etapa a gente finge que as hipóteses vão ser todas obedecidas e a gente nem escreve quais são essas hipóteses, e só na segunda etapa a gente escreve explicitamente quais são essas hipóteses e a gente vê se tudo realmente dá certo quando elas são obedecidas. *E neste curso a gente raramente vai ter tempo pra segunda etapa.*