Cálculo C2 - 2023.1

Aula 10: mudança de variáveis

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.1-C2.html

Links

Mudança de variável na integral definida (MVD):
2eT131 (t-ints, p.12) Uma figura pra mudança de variável
Thomas55p11 (p.376) Theorem 5: Substitution in definite integrals
2fT49 Meu PDF de 2022.2 sobre mudança de variáveis

Mudança de variável na integral indefinida (MVI):
2eT133 (t-ints, p.14) Um exemplo com contas
2eT135 (t-ints, p.16) Outro exemplo com contas
Thomas55p3 (p.370) Theorem 5: The substitution rule
Leit5p13 (p.296) A regra da cadeia para a antidiferenciação
Leit9p10 (p.537) Integração de potências de sen e cos
Miranda189 6.2. Integração por substituição
Miranda192 Exemplo 6.6
Miranda193 Não podemos
Miranda196 Exercícios
Miranda255 8.3 Integrais Trigonométricas

Vídeo do Reginaldo:
`https://www.youtube.com/watch?v=PTCUjrEBc4g`

Contas (1)

$$
\begin{array}{rcl}
\int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx & \overset{(1)}{=} & f(x)\big|_{x=a}^{x=b} \\
\int_{u=\alpha}^{u=\beta} f'(u)\,du & \overset{(2)}{=} & f(u)\big|_{u=\alpha}^{u=\beta} \\
\int_{x=a}^{x=b} \cos x\,dx & \overset{(3)}{=} & \operatorname{sen} x\big|_{x=a}^{x=b} \\
\int_{x=a}^{x=b} 2\cos 2x\,dx & \overset{(4)}{=} & \operatorname{sen} 2x\big|_{x=a}^{x=b} \\
& \overset{(5)}{=} & \operatorname{sen} 2b - \operatorname{sen} 2a \\
& \overset{(6)}{=} & \operatorname{sen} u\big|_{u=2a}^{u=2b} \\
\int_{u=\alpha}^{u=\beta} \cos u\,du & \overset{(7)}{=} & \operatorname{sen} u\big|_{u=\alpha}^{u=\beta} \\
\int_{u=2a}^{u=2b} \cos u\,du & \overset{(8)}{=} & \operatorname{sen} u\big|_{u=2a}^{u=2b} \\
& \overset{(9)}{=} & \operatorname{sen} 2b - \operatorname{sen} 2a \\
& \overset{(10)}{=} & \operatorname{sen} 2x\big|_{x=a}^{x=b} \\
& \overset{(11)}{=} & \int_{x=a}^{x=b} 2\cos 2x\,dx \\
\int_{x=a}^{x=b} 2\cos 2x\,dx & \overset{(12)}{=} & \int_{u=2a}^{u=2b} \cos u\,du
\end{array}
$$

Contas (2)

$$
\begin{array}{rcl}
\int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx & \overset{(1)}{=} & f(x)\big|_{x=a}^{x=b} \\
\int_{u=\alpha}^{u=\beta} f'(u)\,du & \overset{(2)}{=} & f(u)\big|_{u=\alpha}^{u=\beta} \\
\\
\int_{x=a}^{x=b} (\cos x^2)\cdot 2x\,dx & \overset{(3)}{=} & \operatorname{sen} x^2\big|_{x=a}^{x=b} \\
& \overset{(4)}{=} & \operatorname{sen} b^2 - \operatorname{sen} a^2 \\
& \overset{(5)}{=} & \operatorname{sen} u\big|_{u=a^2}^{u=b^2} \\
\int_{u=a^2}^{u=b^2} \cos u\,du & \overset{(6)}{=} & \operatorname{sen} u\big|_{u=a^2}^{u=b^2} \\
\\
\int_{x=a}^{x=b} (\cos x^2)\cdot 2x\,dx & \overset{(7)}{=} & \int_{u=a^2}^{u=b^2} \cos u\,du \\
\\
\int_{x=a}^{x=b} g'(h(x))h'(x)\,dx & \overset{(8)}{=} & g(h(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\
& \overset{(9)}{=} & g(h(b)) - g(h(a)) \\
& \overset{(10)}{=} & g(u)\big|_{u=h(a)}^{u=h(b)} \\
\int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g'(u)\,du & \overset{(11)}{=} & g(u)\big|_{u=h(a)}^{u=h(b)} \\
\\
\int_{x=a}^{x=b} g'(h(x))h'(x)\,dx & \overset{(12)}{=} & \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g'(u)\,du \\
\\
\int_{x=a}^{x=b} g(h(x))h'(x)\,dx & \overset{(13)}{=} & \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g(u)\,du
\end{array}
$$

Um exemplo

Isto aqui é um exemplo de como contas com mudança de variável costumam ser feitas na prática:

$$\begin{aligned} & \int 2\cos(3x+4)\,dx \\ = & \int 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \\ = & \frac{2}{3}\int \cos u\,du \\ = & \frac{2}{3}\operatorname{sen} u \\ = & \frac{2}{3}\operatorname{sen}(3x+4) \end{aligned}$$

É necessário indicar em algum lugar que a relação entre a variável nova e a antiga é esta: $u = 3x+4$.

Compare com:
Miranda189 6.2: Integração por substituição
Leit5p13 (p.296) Teorema 5.2.1: a regra da cadeia para a antidiferenciação
Leit5p16 (p.299) Exemplo 5

Compare as contas à esquerda, que não têm nem os limites de integração nem as barras de diferença, com estas:

$$\begin{aligned} & \int_{x=a}^{x=b} 2\cos(3x+4)\,dx \\ = & \int_{u=3a+4}^{u=3b+4} 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \\ = & \frac{2}{3}\int_{u=3a+4}^{u=3b+4} \cos u\,du \\ = & \frac{2}{3}\left((\operatorname{sen} u)\big|_{u=3a+4}^{u=3b+4} \right) \\ = & \frac{2}{3}\left((\operatorname{sen}(3x+4))\big|_{x=a}^{x=b} \right) \end{aligned}$$

Nós vamos tratar a versão à esquerda como uma abreviação pra versão da direita. Note que pra ir da versão "completa" pra "abreviada" é super fácil, é só apagar os limites de integração e as barras de diferença – mas pra ir da versão "abreviada" pra "completa" a gente precisa reconstruir os limites de integração e as barras de diferença, o que é bem mais difícil.

Caixinhas de anotações

O meu truque preferido pra não me enrolar nas contas de uma mudança de variável é fazer uma caixinha de anotações como essa aqui,

$$\left[\begin{array}{c} u = 3x+4 \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(3x+4) = 3 \\ \frac{du}{dx} = 3 \\ \color{red}{du = 3\,dx} \\ \color{red}{dx = \frac{1}{3}\,du} \end{array}\right]$$

na qual: a) a primeira linha diz a relação entre a variável antiga e a variável nova – que nesse exemplo é $u = 3x+4$, b) todas as outras linhas da caixinha são consequências dessa primeira, e c) dentro da caixinha a gente permite gambiarras como:

$$dx = 42\,du$$

Durante quase todo o curso de C2 a gente vai tratar esse tipo de coisa como uma igualdade entre expressões incompletas – mais ou menos como se a gente estivesse dizendo isso aqui:

$$+20) = /99]$$

Na caixinha à esquerda eu colori as linhas que são gambiarras em vermelho.

Aqui tem um exemplo grande:
2fT112 (C2-P1, p.5) Questão 1: gabarito

Os detalhes horríveis

Nesta página aqui – Miranda193 – o Miranda diz “Não podemos calcular uma integral que possui tanto um x e um u nela”, mas ele não explica porquê... se em

$$\int_{x=a}^{x=b} 2\cos(u)\,dx$$

esse u fosse uma abreviação para $3x+4$ essa integral acima seria equivalente à do início do slide anterior, né?... =(

Neste slide eu vou tentar contar o que eu sei sobre como o método da substituição funciona – *pra convencer vocês de que não vale a pena vocês tentarem entender os detalhes agora.*

Toda mudança de variável numa integral definida é consequência da igualdade (13) do slide “Contas (2)”. Por exemplo, compare:

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} g(h(x))h'(x)\,dx & \overset{(13)}{=} & \displaystyle\int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g(u)\,du \\ \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} 2\cos(3x+4)\,dx & = & \displaystyle\int_{u=3a+4}^{u=3b+4} 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \end{array}$$

A gente pode tentar descobrir qual é a substituição certa passo a passo, começando pelas funções mais simples.... eu faria assim: olhando pra parte direita eu chuto que $g(u)=2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}$; olhando pra parte esquerda eu chuto que $h(x)=3x+4$, e daí $h'(x)=3$; aí eu testo esta substituição aqui,

$$(13)\begin{bmatrix} g(u) := 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3} \\ h(x) := 3x+4 \\ h'(x) := 3 \end{bmatrix}$$

e vejo que o resultado dela é *equivalente* (mas não igual!!!) à última igualdade da coluna da esquerda – não preciso nem substituir o a e o b.

Os detalhes horríveis (2)

Estas contas aqui,

$$\begin{array}{rcl} u &=& x^4 \\ \frac{du}{dx} &=& 4x^3 \\ du &=& \frac{du}{dx}dx \\ &=& 4x^3\,dx \end{array}$$

fazem sentido se a gente considerar que:

1. x é uma variável independente,
2. u é uma variável dependente, com $u = u(x) = x^4$,
3. dx é uma variável independente,
4. du é uma variável dependente, com $du = \frac{du}{dx}dx$,
5. estas regras sobre diferenciais valem: Leit4p61 (p.275),
6. estas regras sobre variáveis dependentes valem: Stew14p53 (p.951),
7. o dx num $\int f(x)\,dx$ funciona como uma diferencial.

Eu já perguntei pra vários matemáticos fodões que eu conheço – incluindo os desenvolvedores do Maxima, na mailing list – onde eu posso encontrar alguma formalização das regras de como lidar com variáveis dependentes, diferenciais e mudança de variável na integral indefinida, e todos eles me responderam a mesma coisa: "*não faço a menor idéia! Eu sei algumas das regras mas não todas, e não sei onde você pode procurar...*" =(

Moral: $\boxed{\text{é melhor a gente tratar o } du = 4x^3\,dx \text{ como uma gambiarra...}}$

Caixinhas com mais anotações

$$\begin{array}{rcl}
\int (\operatorname{sen}\theta)^4 (\cos\theta)^7 \, d\theta & = & \int (\operatorname{sen}\theta)^4 (\cos\theta)^6 \cos\theta \, d\theta \\
& = & \int (\operatorname{sen}\theta)^4 ((\cos\theta)^2)^3 \cos\theta \, d\theta \\
& = & \int (\operatorname{sen}\theta)^4 (1-(\operatorname{sen}\theta)^2)^3 \cos\theta \, d\theta \\
& = & \int s^4 (1-s^2)^3 \, ds
\end{array}
\quad
\left[\begin{array}{c}
\operatorname{sen}\theta = s \\
\frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \\
ds = \cos\theta \, d\theta \\
\cos\theta \, d\theta = ds
\end{array} \right]$$

$$\begin{array}{rcl}
\int (\operatorname{sen}\theta)^4 (\cos\theta)^7 \, d\theta & = & \int (\operatorname{sen}\theta)^4 (\cos\theta)^6 \cos\theta \, d\theta \\
& = & \int s^4 (1-s^2)^3 \, ds
\end{array}
\quad
\left[\begin{array}{c}
\operatorname{sen}\theta = s \\
\frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \\
ds = \cos\theta \, d\theta \\
\cos\theta \, d\theta = ds \\
(\cos\theta)^2 = 1 - (\operatorname{sen}\theta^2) \\
(\cos\theta)^2 = 1 - s^2 \\
(\cos\theta)^6 = (1-s^2)^3
\end{array} \right]$$

Caixinhas com mais anotações (2)

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int s\sqrt{1-s^2}\,ds &=& \displaystyle\int (\operatorname{sen}\theta)\sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2}\cos\theta\,d\theta \\
&=& \displaystyle\int (\operatorname{sen}\theta)\sqrt{(\cos\theta)^2}\cos\theta\,d\theta \\
&=& \displaystyle\int (\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)\cos\theta\,d\theta \\
&=& \displaystyle\int (\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)^2\,d\theta
\end{array}
\qquad
\left[\begin{array}{c}
s = \operatorname{sen}\theta \\
\frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \\
ds = \cos\theta\,d\theta
\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int s\sqrt{1-s^2}\,ds &=& \displaystyle\int (\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)\cos\theta\,d\theta \\
&=& \displaystyle\int (\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)^2\,d\theta
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds &=& \displaystyle\int \frac{1}{\cos\theta}\cos\theta\,d\theta \\
&=& \displaystyle\int 1\,d\theta \\
&=& \theta \\
&=& \operatorname{arcsen} s
\end{array}
\qquad
\left[\begin{array}{c}
s = \operatorname{sen}\theta \\
\frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \\
ds = \cos\theta\,d\theta \\
s^2 = (\operatorname{sen}\theta)^2 \\
1-s^2 = 1-(\operatorname{sen}\theta)^2 \\
1-s^2 = (\cos\theta)^2 \\
\sqrt{1-s^2} = \cos\theta \\
\operatorname{arcsen} s = \operatorname{arcsen}\operatorname{sen}\theta \\
\operatorname{arcsen} s = \theta \\
\theta = \operatorname{arcsen} s
\end{array}\right]$$

O macaco, de novo

Estas duas igualdades são falsas

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2} & = & \cos\theta \\ \operatorname{arcsen}\operatorname{sen}\theta & = & \theta \end{array}$$

quando $\theta = \pi$... confira!

Mas elas são verdadeiras para $\theta = 0$, e para todo θ num certo intervalo em torno do 0 que eu não quero contar qual é.

Lembre quem em Cálculo 2 a gente vai primeiro fazer as contas como o macaco que faz todas as contas como se tudo funcionasse, e a gente vai deixar pra checar os detalhes, como se θ está no intervalo certo, só no final, depois de termos feito as contas todas.

O Leithold é super cuidadoso nas contas e nesses detalhes como os domínios da funções e o intervalo onde mora o θ, mas a maioria dos outros livros de Cálculo 2 que eu conheço não são – eles são meio porcalhões com esses detalhes... e a gente também vai ser, senão não vai dar tempo de cobrir o suficiente da matéria.

Desabreviando o $42 = 99$

Lembre que a nossa regra básica pra integral indefinida é esta aqui,

$$[\mathrm{II}] \;=\; \left(\int f'(x)\,dx = f(x)\right)$$

e eu usei ela pra demostrar isto aqui:

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int 0\,dx & \overset{(1)}{=} & 42 \\ \displaystyle\int 0\,dx & \overset{(2)}{=} & 99 \\ 42 & \overset{(3)}{=} & 99 \end{array}$$

As justificativas são:
(1): por [II], com $f(x) = 42$
(2): por [II], com $f(x) = 99$
(3): por (1) e (2)

Se a gente desabreviar as contas da esquerda – como num dos primeiros slides – a gente obtém isto aqui:

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} 0\,dx & \overset{(4)}{=} & 42\big|_{x=a}^{x=b} \\ \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} 0\,dx & \overset{(5)}{=} & 99\big|_{x=a}^{x=b} \\ 42\big|_{x=a}^{x=b} & \overset{(6)}{=} & 99\big|_{x=a}^{x=b} \end{array}$$

E agora a igualdade (6) é claramente verdade – confira!

O truque dos intervalos

Dê uma olhada nas primeiras páginas daqui:

Leit5p3 5.1. Antidiferenciação

O Leithold usa expressões como "num intervalo I", "para todo $x \in I$" e "definidas no mesmo intervalo" um montão de vezes. O truque de usar sempre intervalos resolve esse esse problema daqui super bem:

2fT24 Meme: expanding brain, versão ln

A minha definição preferida pra integral indefinida,

2fT23 Outra definição pra integral indefinida

também resolve o problema – de um modo bem mais simples, e que é suficiente pro tipo de conta que a gente tem que treinar em Cálculo 2.

MVI

A nossa fórmula pra mudança de variável na integral indefinida vai ser esta aqui:

$$\text{[MVI]} \;=\; \left(\int f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int f'(u)\,du\right)$$

Dá pra demonstrar ela deste jeito,

$$\int f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; f(g(x)) \;=\; f(u) \;=\; \int f'(u)\,du$$

onde a primeira e a terceira igualdades são consequências do [II], e a igualdade do meio só vale se tivermos $u = g(x)$.

Os livros demonstram a [MVI] de um jeitos que eu nunca achei muito convincentes – ou fingindo que tudo é óbvio, ou "derivando tudo em x". As contas abaixo me ajudaram a entender o que acontece quando a gente "deriva tudo em x":

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\int f'(g(x))g'(x)\,dx\right)}_{f'(g(x))g'(x)} \;=\; \underbrace{\frac{d}{dx}f(g(x))}_{f'(g(x))g'(x)} \;=\; \underbrace{\frac{d}{dx}\,\underbrace{f(u)}_{f(g(x))}}_{f'(g(x))g'(x)} \;=\; \underbrace{\frac{d}{dx}\underbrace{\underbrace{\int f'(u)\,du}_{f(u)}}_{f(g(x))}}_{f'(g(x))g'(x)}$$

Exercício 1

Simplificando raizes quadradas
Nas últimas aulas você aprendeu – na prática, não vendo uma definição formal – o que é transformar uma integral mais difícil numa integral mais fácil, que nós sabemos integrar...

a) Digamos que você sabe integrar $\int \sqrt{1-s^2}\,ds$. Transforme $\int \sqrt{1-(5x)^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

b) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

c) Digamos que você sabe integrar $\int \sqrt{1-s^2}^k\,ds$ para qualquer valor de k.
Transforme $\int \sqrt{1-(5x)^2}^{42}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

d) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}^{42}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

e) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}^k\,dx$ em algo que você sabe integrar.

f) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}^k\,dx$ em algo que você sabe integrar.

g) Entenda este truque aqui:

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{3^2-x^2} & = & \sqrt{3^2-3^2\frac{1}{3^2}x^2} \\
& = & \sqrt{3^2-3^2(\frac{x}{3})^2} \\
& = & \sqrt{3^2(1-(\frac{x}{3})^2)} \\
& = & \sqrt{3^2}\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2} \\
& = & 3\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}
\end{array}$$

Use ele – com adaptações, óbvio – pra transformar $\int \sqrt{25-x^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

h) Use ele pra transformar $\int \sqrt{25-x^2}^{42}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

i) Use ele pra transformar $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

j) Use ele pra transformar $\int \sqrt{a^2-x^2}^k\,dx$ em algo que você sabe integrar.

j) Use ele pra transformar $\int x^{20}\sqrt{a^2-x^2}^k\,dx$ em algo que você sabe integrar.

Exercício 2

No final da aula de 28/set – veja a foto do quadro:
http://angg.twu.net/2022.2-C2/C2-quadros.pdf#page=23
nós vimos que a demonstração de que $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$ pode ser generalizada, e aí a gente obtém a "fórmula da derivada da função inversa", que eu chamei de [DFI]...
Essa generalização pode ser "especializada" pra obter outros casos particulares diferentes de $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$.

a) Faça o primeiro exercício que eu pus no quadro:

$$[\mathrm{DFI}]\begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{arcsen} x \\ g'(x) := \operatorname{arcsen}' x \\ f(x) := \operatorname{sen} x \\ f'(x) := \cos x \end{bmatrix} = ?$$

b) Faça o segundo exercício do quadro:

$$[\mathrm{DFI}]\begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{arcsen} x \\ g'(x) := \operatorname{arcsen}' x \\ f(x) := \operatorname{sen} x \\ f'(x) := \sqrt{1-(\operatorname{sen} x)^2} \end{bmatrix} = ?$$

c) Use as identidades trigonométricas que vamos ver em sala pra encontrar uma fórmula pra derivada do arctan.

d) Use as identidades trigonométricas que vamos ver em sala pra encontrar uma fórmula pra derivada do arcsec.

Exercício 3

Slogan:

> *Toda integral que pode ser resolvida por uma sequência de mudanças de variável pode ser resolvida por uma mudança de variável só.*

Durante a quarentena eu dei algumas questões de prova sobre este slogan. Dê uma olhada:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=4
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=9
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-P1.pdf#page=15

a) Resolva a integral abaixo usando uma mudança de variável só (dica: $u = g(h(x))$):

$$\int f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)\,dx = ?$$

b) Resolva a integral acima usando duas mudanças de variável. Dica: comece com $u = h(x)$.

O Miranda e o Leithold preferem fazer em um passo só certas mudanças de variáveis que eu prefiro fazer em dois ou três passos. Entenda o exemplo 8.1 do Miranda – o da seção 8.4, na página 264...

http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#263

c) ...e descubra como resolver a integral dele fazendo duas mudanças de variáveis ao invés de uma só. A segunda mudança de variável vai ser $s = \operatorname{sen}\theta$, e a primeira eu prefiro não contar qual é – tente usar as idéias do exercício 1 pra descobrir qual ela tem que ser.