

Cálculo 4 - 2023.1

Aulas 1 e 4: Introdução ao curso,
revisão de Cálculo 2 e Cálculo 3

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
<http://anggtwu.net/2023.1-C4.html>

Links

Ainda não L^AT_EXei o material da primeira aula!!!

Por enquanto ele está só nestes links aqui:

<http://anggtwu.net/2023.1-C4.html>

4gQ1 quadros da primeira aula

Slogans01:10 até 08:51: sobre chutar e testar

Slogans07:17 até 07:48: ...do tamanho de um apartamento

Slogans1:11:02 até 1:17:42: seja o seu próprio Geogebra

3fT16 (tipos, p.4): Tipos

Leit6p17 (p.388: 6.3 Comprimento de arco)

MirandaP301 (p.301: 9.5 Comprimento de arco)

Stew8p3 (p.562: 8.1 Arc Length)

Stew10p15 (p.672: Arc Length)

Stew13p16 (p.877: 13.3 Arc Length and Curvature)

Exercício 1.

Digamos que a função $F(t)$ é a que eu desenhei no quadro na primeira aula. Ela obedecia

$$\begin{aligned} F(0) &= (1, 1) \\ F(1) &= (2, 1) \\ F(2) &= (3, 2) \\ F(3) &= (3, 3) \end{aligned}$$

e o gráfico dela era formado por três segmentos de reta.

a) Encontre uma definição por casos pra $F(x)$ que “tenha a forma da função $F_1(t)$ da coluna da direita”. Note que você vai ter que mudar todos os números da $F_1(t)$, e note que o modo normal, usual, correto e formal de enunciar este problema seria usando variáveis ao invés dos números 2, 3, ..., 17... mas se eu disser “troque todos os números da definição pelos números corretos” todo mundo entende.

b) Faça a mesma coisa para a função $F_2(t)$.

c) Faça a mesma coisa para a função $F_3(t)$. Aqui há muitas soluções possíveis; encontre uma na qual os números 4, 5, 6, 10, 11, 12, 17, 18 e 19 sejam trocados por números que tenham um significado geométrico e olhométrico claro.

$$F_1(t) = \begin{cases} (2t + 3, 4t + 5) & t < 6, \\ (7t + 8, 9t + 10) & 11 \leq t \leq 12, \\ (13t + 14, 15t + 16) & 17 < t \end{cases}$$

$$F_2(t) = \begin{cases} (2, 3) + t\overrightarrow{(4, 5)} & t < 6, \\ (7, 8) + t\overrightarrow{(9, 10)} & 11 \leq t \leq 12, \\ (13, 14) + t\overrightarrow{(15, 16)} & 17 < t \end{cases}$$

$$F_3(t) = \begin{cases} (2, 3) + (t - 4)\overrightarrow{(5, 6)} & t < 7, \\ (8, 9) + (t - 10)\overrightarrow{(11, 12)} & 13 \leq t \leq 14, \\ (15, 16) + (t - 17)\overrightarrow{(18, 19)} & 20 < t \end{cases}$$

Seja o seu próprio GeoGebra

Na aula de 14/abril/2023 eu descobri que nenhuma das pessoas que veio sabia os truques do “Seja o seu próprio GeoGebra”... a idéia está explicada por alto neste trecho de um vídeo:

Slogans1:11:02 até 1:17:42

Exercício 2.

a) Relembre como usar esta notação de “underbraces” para escrever os resultados intermediários de uma expressão:

$$\underbrace{(1, 2) + \underbrace{3 \underbrace{(4, 5)}}_{(12, 15)}}_{(13, 17)}$$

Dica: releia este slide:

3fT14 (p.2: C)

b) Tente calcular de cabeça os pontos da reta r – definida à direita – para estes valores de t : $t = 0$, $t = 1$, $t = 4$, $t = 5$, $t = 1.23$. Para quais destes valores as contas são mais fáceis de fazer de cabeça?

$$\begin{aligned} r &= \{ (0, 3) + (t - 4) \overrightarrow{(2, 0)} \mid t \in \mathbb{R} \} \\ r_1 &= \{ (\alpha, 3) + (t - 4) \overrightarrow{(2, 0)} \mid t \in \mathbb{R} \} \\ r_2 &= \{ (0, \beta) + (t - 4) \overrightarrow{(2, 0)} \mid t \in \mathbb{R} \} \\ r_3 &= \{ (0, 3) + (t - \gamma) \overrightarrow{(2, 0)} \mid t \in \mathbb{R} \} \\ r_4 &= \{ (0, 3) + (t - 4) \overrightarrow{(\delta, 0)} \mid t \in \mathbb{R} \} \\ r_5 &= \{ (0, 3) + (t - 4) \overrightarrow{(2, \varepsilon)} \mid t \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

c) Digamos que $\alpha = 5$ e que queremos desenhar a reta r_1 desenhando dois pontos fáceis de calcular dela e escrevendo do lado de cada um deles o t correspondente a eles. É fácil ver que o ponto com $t = 1.23$ é difícil de calcular de cabeça. *Descubra quais são os dois t 's em que as contas são mais fáceis, desenhe estes dois pontos no plano, e desenhe o resto da reta.*

d) Use este truque dos pontos mais fáceis pra desenhar r_1 quando $\alpha = 0$, quando $\alpha = 1$, e quando $\alpha = 2$. *Descubra o que muda no desenho da r_1 quando o α varia.*

Seja o seu próprio GeoGebra (2)

(Continuação do exercício 2...)

e) Use este truque dos pontos mais fáceis pra desenhar r_2 quando $\beta = 0$, quando $\beta = 1$, e quando $\beta = 2$. Descubra o que muda no desenho da r_2 quando o β varia.

f) Use este truque dos pontos mais fáceis pra desenhar r_3 quando $\gamma = 0$, quando $\gamma = 1$, e quando $\gamma = 2$. Descubra o que muda no desenho da r_3 quando o γ varia. **IMPORTANTE:** aqui os 't's mais fáceis vão ser diferentes para cada valor de γ .

g) Use o truque dos pontos mais fáceis pra desenhar r_4 para três valores de δ diferentes – mas aqui você é que vai ter que escolher os valores de δ . **IMPORTANTE:** descubre três valores de δ que deixam as contas e os desenhos bem fáceis de fazer, e use estes valores. Depois que você tiver feito os desenhos descubra o que no desenho da r_4 varia quando o δ varia.

h) Use estes mesmos truques – todos eles! – pra desenhar a reta r_5 para três valores fáceis de ε e para descobrir o que muda no desenho da r_5 quando o ε varia.

Digamos que a reta r_6 tem esta definição aqui,

$$r_6 = \{ (\alpha, \beta) + (t - \gamma)\overrightarrow{(\delta, \varepsilon)} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

e imagine que cada um dos parâmetros $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ e ε pode ser controlado por um slider, como neste trecho do vídeo:

Slogans1:11:32 até 1:11:59

i) Releia tudo o que você fez até agora várias vezes, até você conseguir visualizar mentalmente, *sem escrever nada e (quase?) sem fazer contas de cabeça*, como a reta r_6 muda quando você varia os parâmetros $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ e ε .

j) Descubra, *sem escrever nada e quase sem fazer contas de cabeça*, qual é a reta desta forma aqui

$$r_7 = \{ (\alpha, \beta) + (t - \gamma)\overrightarrow{(\delta, \varepsilon)} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

que passa pelo ponto $(2, 5)$ quando $t = 6$ e pelo ponto $(2 + 20, 5 + 42)$ quando $t = 7$; quando você conseguir uma hipótese bastante boa escreva-a e teste-a.

Exercício 3.

Seja $F(t)$ a função do exercício 1, e digamos que $F(t) = (x(t), y(t))$.

- a) Faça o gráfico da função $x(t)$.
 b) Faça o gráfico da função $y(t)$.
 c) Dê definições por casos das funções $x(t)$ e $y(t)$ em formatos parecidos com o da $F_3(t)$ do exercício 1, em que cada número tinha um significado geométrico e olhométrico claro.
 d) Calcule $\int_{t=0}^{t=3} x(t) dt$ e $\int_{t=0}^{t=3} y(t) dt$ só olhando pros gráficos delas e contando quadrados e triângulos.

Agora reveja as definições de somas de Riemann, partições, e dos métodos [L] e [R] nestes links aqui...

- [2dT178](#) (def-integral, p.14) Partição preferida
[2fT67](#) (somas-de-riemann, p.8) métodos a e b
[2fT91](#) (TFC1-e-TFC2, p.3) A definição de partição
[2eT34](#) (somas-3, p.13) Métodos L e R
[2fT125](#) (P2, p.4) Métodos L e R

...e represente graficamente cada uma destas somas de retângulos:

- e) $[L]_{\{0,1,2,3\}}$
 f) $[L]_{\{0,1,1.5,2,3\}}$
 g) $[R]_{\{0,1,2,3\}}$
 h) $[R]_{\{0,1,1.5,2,3\}}$
 i) $[L]_{\{0,0.25,0.5,\dots,3\}}$
 j) $[R]_{\{0,0.25,0.5,\dots,3\}}$

Exercício 3.

Leia isto aqui:

Stew10p15 (p.672: Arc Length)

- Calcule o comprimento de arco da curva $F(t)$ entre $t = 0$ e $t = 3$ no olhómetro.
- Faça um desenho parecido com o da figura 4 dessa página para a curva $F(t)$. Considere que $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ e $t_3 = 3$.
- Escreva a sua idéia do item (a) como uma soma de três raízes quadradas – como se você tivesse pego o somatório da última linha dessa página e expandido ele.
- Agora reescreva o que você fez no item (c) usando o ‘ \sum ’.