Cálculo 4 - 2023.1

Todos os PDFs do semestre
juntados num PDFzão só

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.1-C4.html

Cálculo 4 - 2023.1

Aulas 1 e 4: Introdução ao curso,
revisão de Cálculo 2 e Cálculo 3

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.1-C4.html

Links

Página do curso:
http://anggtwu.net/2023.1-C4.html

4gQ1 quadros da primeira aula
Slogans01:10 até 08:51: sobre chutar e testar
Slogans07:17 até 07:48: ...do tamanho de um apartamento
Slogans1:11:02 até 1:17:42: seja o seu prório Geogebra
3fT16 (tipos, p.4): Tipos

Leit6p17 (p.388: 6.3 Comprimento de arco)
MirandaP301 (p.301: 9.5 Comprimento de arco)
Stew8p3 (p.562: 8.1 Arc Length)
Stew10p15 (p.672: Arc Length)
Stew13p16 (p.877: 13.3 Arc Length and Curvature)

Exercício 1.

Digamos que a função $F(t)$ é a que eu desenhei no quadro na primeira aula. Ela obedecia

$$\begin{array}{rcl} F(0) & = & (1,1) \\ F(1) & = & (2,1) \\ F(2) & = & (3,2) \\ F(3) & = & (3,3) \end{array}$$

e o gráfico dela era formado por três segmentos de reta.

a) Encontre uma definição por casos pra $F(x)$ que "tenha a forma da função $F_1(t)$ da coluna da direita". Note que você vai ter que mudar todos os números da $F_1(t)$, e note que o modo normal, usual, correto e formal de enunciar este problema seria usando variáveis ao invés dos números $2, 3, \ldots, 17\ldots$ mas se eu disser "troque todos os números da definição pelos números corretos" todo mundo entende.

b) Faça a mesma coisa para a função $F_2(t)$.

c) Faça a mesma coisa para a função $F_3(t)$. Aqui há muitas soluções possíveis; encontre uma na qual os números 4, 5, 6, 10, 11, 12, 17, 18 e 19 sejam trocados por números que tenham um significado geométrico e olhométrico claro.

$$F_1(t) = \begin{cases} (2t+3, 4t+5) & t < 6, \\ (7t+8, 9t+10) & 11 \leq t \leq 12, \\ (13t+14, 15t+16) & 17 < t \end{cases}$$

$$F_2(t) = \begin{cases} (2,3) + t\overrightarrow{(4,5)} & t < 6, \\ (7,8) + t\overrightarrow{(9,10)} & 11 \leq t \leq 12, \\ (13,14) + t\overrightarrow{(15,16)} & 17 < t \end{cases}$$

$$F_3(t) = \begin{cases} (2,3) + (t-4)\overrightarrow{(5,6)} & t < 7, \\ (8,9) + (t-10)\overrightarrow{(11,12)} & 13 \leq t \leq 14, \\ (15,16) + (t-17)\overrightarrow{(18,19)} & 20 < t \end{cases}$$

Seja o seu próprio GeoGebra

Na aula de 14/abril/2023 eu descobri que nenhuma das pessoas que veio sabia os truques do “Seja o seu próprio GeoGebra”... a idéia está explicada por alto neste trecho de um vídeo:

Slogans1:11:02 até 1:17:42

Exercício 2.

a) Relembre como usar esta notação de “underbraces” para escrever os resultados intermediários de uma expressão:

$$\underbrace{(1,2)+\underbrace{3\overrightarrow{(4,5)}}_{\overrightarrow{(12,15)}}}_{\overrightarrow{(13,17)}}$$

Dica: releia este slide:

3fT14 (p.2: C)

b) Tente calcular de cabeça os pontos da reta r – definida à direita – para estes valores de t: $t=0$, $t=1$, $t=4$, $t=5$, $t=1.23$. Para quais destes valores as contas são mais fáceis de fazer de cabeça?

$$\begin{array}{rcl}
r & = & \{\,(0,3)+(t-4)\overrightarrow{(2,0)}\mid t\in\mathbb{R}\,\}\\
r_1 & = & \{\,(\alpha,3)+(t-4)\overrightarrow{(2,0)}\mid t\in\mathbb{R}\,\}\\
r_2 & = & \{\,(0,\beta)+(t-4)\overrightarrow{(2,0)}\mid t\in\mathbb{R}\,\}\\
r_3 & = & \{\,(0,3)+(t-\gamma)\overrightarrow{(2,0)}\mid t\in\mathbb{R}\,\}\\
r_4 & = & \{\,(0,3)+(t-4)\overrightarrow{(\delta,0)}\mid t\in\mathbb{R}\,\}\\
r_5 & = & \{\,(0,3)+(t-4)\overrightarrow{(2,\varepsilon)}\mid t\in\mathbb{R}\,\}
\end{array}$$

c) Digamos que $\alpha=5$ e que queremos desenhar a reta r_1 desenhando dois pontos fáceis de calcular dela e escrevendo do lado de cada um deles o t correspondente a eles. É fácil ver que o ponto com $t=1.23$ é difícil de calcular de cabeça. *Descubra quais são os dois ‘t’s em que as contas são mais fáceis, desenhe estes dois pontos no plano, e desenhe o resto da reta.*

d) Use este truque dos pontos mais fáceis pra desenhar r_1 quando $\alpha=0$, quando $\alpha=1$, e quando $\alpha=2$. *Descubra o que muda no desenho da r_1 quando o α varia.*

Seja o seu próprio GeoGebra (2)

(Continuação do exercício 2...)

e) Use este truque dos pontos mais fáceis pra desenhar r_2 quando $\beta = 0$, quando $\beta = 1$, e quando $\beta = 2$. *Descubra o que muda no desenho da r_2 quando o β varia.*

f) Use este truque dos pontos mais fáceis pra desenhar r_3 quando $\gamma = 0$, quando $\gamma = 1$, e quando $\gamma = 2$. *Descubra o que muda no desenho da r_3 quando o γ varia. IMPORTANTE: aqui os 't's mais fáceis vão ser diferentes para cada valor de γ.*

g) Use o truque dos pontos mais fáceis pra desenhar r_4 para três valores de δ diferentes – mas aqui você é que vai ter que escolher os valores de δ. IMPORTANTE: descubre três valores de δ que deixam as contas e os desenhos bem fáceis de fazer, e use estes valores. Depois que você tiver feito os desenhos descubra o que no desenho da r_4 varia quando o δ varia.

h) Use estes mesmos truques – todos eles! – pra desenhar a reta r_5 para três valores fáceis de ε e para descobrir o que muda no desenho da r_5 quando o ε varia.

Digamos que a reta r_6 tem esta definição aqui,

$$r_6 \quad = \quad \{\, (\alpha, \beta) + (t - \gamma)\overrightarrow{(\delta, \varepsilon)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$$

e imagine que cada um dos parâmetros α, β, γ, δ e ε pode ser controlado por um slider, como neste trecho do vídeo:

Slogans1:11:32 até 1:11:59

i) Releia tudo o que você fez até agora várias vezes, até você conseguir visualizar mentalmente, *sem escrever nada e (quase?) sem fazer contas de cabeça*, como a reta r_6 muda quando você varia os parâmetros α, β, γ, δ e ε.

j) Descubra, *sem escrever nada e quase sem fazer contas de cabeça*, qual é a reta desta forma aqui

$$r_7 \quad = \quad \{\, (\alpha, \beta) + (t - \gamma)\overrightarrow{(\delta, \varepsilon)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$$

que passa pelo ponto $(2, 5)$ quando $t = 6$ e pelo ponto $(2 + 20, 5 + 42)$ quando $t = 7$; quando você conseguir uma hipótese bastante boa escreva-a e teste-a.

Exercício 3.

Seja $F(t)$ a função do exercício 1, e digamos que $F(t) = (x(t), y(t))$.

a) Faça o gráfico da função $x(t)$.
b) Faça o gráfico da função $y(t)$.

c) Dê definições por casos das funções $x(t)$ e $y(t)$ em formatos parecidos com o da $F_3(t)$ do exercício 1, em que cada número tinha um significado geométrico e olhométrico claro.

d) Calcule $\int_{t=0}^{t=3} x(t)\,dt$ e $\int_{t=0}^{t=3} y(t)\,dt$ só olhando pros gráficos delas e contando quadrados e triângulos.

Agora reveja as definições de somas de Riemann, partições, e dos métodos [L] e [R] nestes links aqui...

2dT178 (def-integral, p.14) Partição preferida
2fT67 (somas-de-riemann, p.8) métodos a e b
2fT91 (TFC1-e-TFC2, p.3) A definição de partição
2eT34 (somas-3, p.13) Métodos L e R
2fT125 (P2, p.4) Métodos L e R

...e represente graficamente cada uma destas somas de retângulos:

e) $[L]_{\{0,1,2,3\}}$
f) $[L]_{\{0,1,1.5,2,3\}}$
g) $[R]_{\{0,1,2,3\}}$
h) $[R]_{\{0,1,1.5,2,3\}}$
i) $[L]_{\{0,0.25,0.5,\ldots,3\}}$
j) $[R]_{\{0,0.25,0.5,\ldots,3\}}$

Exercício 4.

Leia isto aqui:
Stew10p15 (p.672: Arc Length)

a) Calcule o comprimento de arco da curva $F(t)$ entre $t = 0$ e $t = 3$ no olhômetro.

b) Faça um desenho parecido com o da figura 4 dessa página para a curva $F(t)$. Considere que $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ e $t_3 = 3$.

c) Escreva a sua idéia do item (a) como uma soma de três raizes quadradas – como se você tivesse pego o somatório da última linha dessa página e expandido ele.

d) Agora reescreva o que você fez no item (c) usando o '$\sum$'.