Cálculo C2 - 2023.2

Aula 10: derivada da função inversa

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.2-C2.html

Links

StewPtCap3p35 (p.188) 3.5 Derivação Implícita
StewPtCap3p39 (p.192) Derivadas de Funções Trigonométricas Inversas
StewPtCap3p43 (p.196) 3.6 Derivadas de Funções Logarítmicas
MirandaP90 3.6 Derivada da Função Inversa
MirandaP97 4.1 Derivação Implícita
MirandaP101 4.2 Derivadas das Funções Exponencial e Logaritmo
MirandaP104 4.3 Derivação das Funções Trigonométricas Inversas
Leit3p59 (p.195) 3.8 Derivação implícita
Leit7p15 (p.433) 7.2.3 Teorema: derivada da função inversa

Introdução

Pra mim a "fórmula da derivada da função inversa" e a "demonstração da fórmula da derivada da função inversa" são essas séries de igualdades aqui, que eu vou chamar de [DFI2] e [DFI6], onde o 2 e o 6 dizem o número de igualdades em cada uma:

$$\text{[DFI2]} \quad = \quad \left(\begin{array}{lrcl} \text{Se:} & f(g(x)) & = & x \\ \text{Então:} & g'(x) & = & \dfrac{1}{f'(g(x))} \end{array} \right)$$

$$\text{[DFI6]} \quad = \quad \left(\begin{array}{lrcl} \text{Se:} & f(g(x)) & = & x \\ \text{Então:} & \frac{d}{dx} f(g(x)) & = & \frac{d}{dx} x \\ & & = & 1 \\ & \frac{d}{dx} f(g(x)) & = & f'(g(x))g'(x) \\ & f'(g(x))g'(x) & = & 1 \\ & g'(x) & = & \dfrac{1}{f'(g(x))} \end{array} \right)$$

Você já viu algo assim em Cálculo 1 quando mostraram pra você que $\frac{d}{dx} \ln x = 1 \ldots$ mas agora nós vamos reusar essa demonstração pra provar várias outras coisas diferentes.

Exercício 0.
Calcule o resultado das substituições abaixo.

a) [DFI6] $\begin{bmatrix} g(x) := \ln x \\ g'(x) := \ln' x \\ f(x) := \exp x \\ f'(x) := \exp' x \end{bmatrix} = ?$

b) [DFI6] $\begin{bmatrix} g(x) := \ln x \\ g'(x) := \ln' x \\ f(x) := e^x \\ f'(x) := e^x \end{bmatrix} = ?$

c) [DFI2] $\begin{bmatrix} g(x) := \ln x \\ g'(x) := \ln' x \\ f(x) := e^x \\ f'(x) := e^x \end{bmatrix} = ?$

d) [DFI2] $\begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{arcsen} x \\ g'(x) := \operatorname{arcsen}' x \\ f(x) := \operatorname{sen} x \\ f'(x) := \cos x \end{bmatrix} = ?$

e) [DFI2] $\begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{arcsen} x \\ g'(x) := \operatorname{arcsen}' x \\ f(x) := \operatorname{sen} x \\ f'(x) := \sqrt{1 - (\operatorname{sen} x)^2} \end{bmatrix} = ?$

Secante e tangente

Lembre que $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ e $\sec x = \frac{1}{\cos x}$. Vou definir estas abreviações – que vão ser temporárias, essas letras vão ter outros significados em outros lugares...

$$\begin{array}{rcl} s &=& \operatorname{sen} x \\ c &=& \cos x \\ t &=& \tan x \\ z &=& \sec x \end{array}$$

Então temos:

$$\begin{aligned}
&z^2 = \frac{1}{c^2} = \frac{s^2+c^2}{c^2} = \frac{s^2}{c^2} + \frac{c^2}{c^2} = t^2+1 \\
&\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \\
&\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{1'g - 1g'}{g^2} = \frac{-g'}{g^2} \\
&z' = \left(\frac{1}{c}\right)' = \frac{-c'}{c^2} = \frac{s}{c^2} = \frac{1}{c}\frac{s}{c} = zt \\
&t' = \left(\frac{s}{c}\right)' = \frac{s'c - sc'}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} = z^2
\end{aligned}$$

Exercício 1.
Leia com cuidado todos os passos do "Então temos:" à esquerda e veja quais são os passos que você não acha óbvios. Expanda cada uma das igualdades que você achou complicadas em uma série de igualdades bem fáceis de justificar.

Exercício 2.
No item (e) do Exercício 0 eu usei que:

$$\operatorname{sen}' x = \sqrt{1 - (\operatorname{sen} x)^2}$$

ou seja, eu "expressei $\operatorname{sen}' x$ em termos de $\operatorname{sen} x$". Se você nunca viu essa expressão "expressar blá em termos de outro blá" veja como ela é usada nesta página do Stewart:

StewPtCap3p35 (p.188) 3.5 Derivação Implícita

Expresse:

a) $\tan x$ em termos de $\sec x$
b) $\sec x$ em termos de $\tan x$
c) $\tan' x$ em termos de $\tan x$
d) $\sec' x$ em termos de $\sec x$

Secante e tangente (2)

No final do exercício (0e) você obteve isto aqui,

$$\operatorname{arcsen}' x = \frac{1}{\sqrt{1 - (\operatorname{sen} \operatorname{arcsen} x)^2}}$$

ou seja, você agora sabe justificar a primeira igualdade daqui,

$$\begin{aligned} \operatorname{arcsen}' x &= \frac{1}{\sqrt{1 - (\operatorname{sen} \operatorname{arcsen} x)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

e imagino que a segunda também, porque ela é relativamente fácil...

Exercício 3.
a) Expresse $\arctan x$ em termos de x.
b) Expresse $\operatorname{arcsec} x$ em termos de x.
Aqui você vai ter que combinar idéias dos exercícios 0 e 2.

Dica 1: todas as idéias principais estão aqui:
StewPtCap3p39 (p.192)

Dica 2: releia estes dois trechos das legendas de um dos vídeos sobre didática que eu preparei no início do ano:
Visaud01:25 até 03:00
Visaud50:43 até 52:24

Você não quer (só) virar a pessoa que lê demonstrações complicadas e acha elas óbvias. O que vai ser mais útil pra você no futuro vai ser você virar a pessoa que sabe expandir demonstrações complicadas e transformar elas em demonstrações que os seus colegas entendam! Lembre da Dica 7 daqui:

2gT4 “Releia a Dica 7”