Cálculo 2 - 2023.2

P1 (Primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.2-C2.html

Questão 1
(Total: 2.5 pts)

Calcule:

$$\int s^3 \sqrt{1-s^2}^{\,3}\, ds \ .$$

Questão 2
(Total: 3.0 pts)

Calcule a integral abaixo fazendo pelo menos duas mudanças de variável e teste o seu resultado:

$$\int \frac{(\ln x)^3 \cos((\ln x)^4)}{x}\, dx.$$

Questão 3
(Total: 2.5 pts)

Calcule e teste o seu resultado:

$$\int \frac{3x+2}{(x+4)(x-5)}\, dx \ .$$

Dicas:

1) Nestas questões o que vai contar mais pontos é você organizar as contas de modo que cada passo seja fácil de entender, de verificar, e de justificar – "chegar no resultado certo" vai valer relativamente pouco.

2) Recomendo que vocês usem o método das "caixinhas de anotações" nas mudanças de variável... numa caixinha de anotações a primeira linha diz a relação entre a variável nova e a antiga, todas as outras linhas são consequências da primeira, e dentro da caixinha de anotações você pode usar as gambiarras com variáveis dependentes e diferenciais, como isto aqui: $dx = 42\, du$...

3) ...por exemplo:

$$\begin{bmatrix} s = \operatorname{sen}\theta \\ \sqrt{1-s^2} = \cos\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos\theta \\ ds = \cos\theta\, d\theta \\ \theta = \operatorname{arcsen} s \end{bmatrix}$$

Questão 4
(Total: 1.0 pts)

No curso nós definimos que *pra nós* a "fórmula" do TFC2 seria esta aqui:

$$[\text{TFC2}] \quad = \quad \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \quad = \quad F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

Mostre que quando $a = 1$, $b = 3$ e

$$F(x) = \begin{cases} 2x & \text{quando } x < 2, \\ x & \text{quando } x \geq 2 \end{cases}$$

a fórmula [TFC2] é falsa.

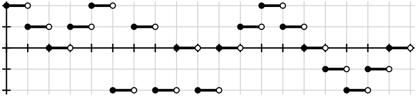
Dicas: o melhor modo de fazer isto é representando graficamente $F(x)$ e $F'(x)$ e calculando certas coisas a partir dos gráficos. Considere que o leitor sabe calcular áreas de retângulos, triângulos e trapézios no olhômetro quando as coordenadas deles são números simples, mas complemente os seus gráficos com um pouquinho de português quando nem tudo for óbvio só a partir dos gráficos.

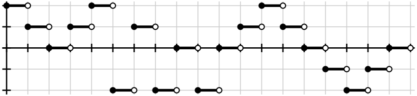
Questão 5
(Total: 1.0 pts)

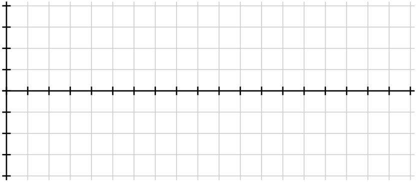
Seja $f(t)$ a função no topo da página seguinte. Seja

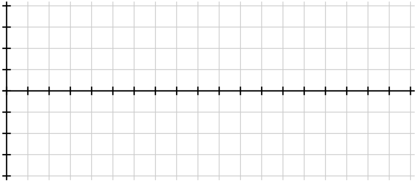
$$F(x) \quad = \quad \int_{t=2}^{t=x} f(t)\,dt.$$

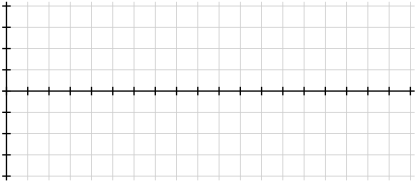
Desenhe o gráfico de $F(x)$ em algum dos grids vazios da próxima página. Indique claramente qual é a versão final e quais desenhos são rascunhos.

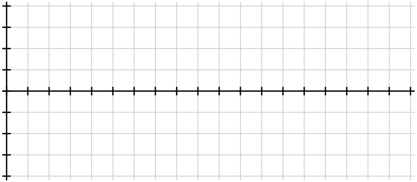












Questão 1: gabarito

$$\begin{array}{rcl}
\int s^3\sqrt{1-s^2}^3\,ds &=& \int (\operatorname{sen}\theta)^3(\cos\theta)^3(\cos\theta)\,d\theta \\
&=& \int (\cos\theta)^4(\operatorname{sen}\theta)^2(\operatorname{sen}\theta)\,d\theta \\
&=& \int (\cos\theta)^4(1-(\cos\theta)^2)(\operatorname{sen}\theta)\,d\theta \\
&=& \int c^4(1-c^2)(-1)\,dc \\
&=& \int c^4(c^2-1)\,dc \\
&=& \int c^6-c^4\,dc \\
&=& \frac{1}{7}c^7-\frac{1}{5}c^5 \\
&=& \frac{1}{7}\sqrt{1-s^2}^7-\frac{1}{5}\sqrt{1-s^2}^5
\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c} s=\operatorname{sen}\theta \\ s^2=(\operatorname{sen}\theta)^2 \\ 1-s^2=(\cos\theta)^2 \\ \sqrt{1-s^2}=\cos\theta \\ \frac{ds}{d\theta}=\cos\theta \\ ds=\cos\theta\,d\theta \end{array}\right]
\qquad
\left[\begin{array}{c} c=\cos\theta \\ \frac{dc}{d\theta}=-\operatorname{sen}\theta \\ dc=-\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\ (-1)dc=\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\ (\operatorname{sen}\theta)^2=1-c^2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{rcl}
\frac{d}{ds}\sqrt{1-s^2} &=& \frac{d}{ds}(1-s^2)^{1/2} \\
&=& \frac{1}{2}(1-s^2)^{-1/2}\frac{d}{ds}(1-s^2) \\
&=& \frac{1}{2}(1-s^2)^{-1/2}(-2s) \\
&=& -(1-s^2)^{-1/2}s \\
&=& -\sqrt{1-s^2}^{-1}s \\
\frac{d}{ds}\sqrt{1-s^2}^k &=& (k\sqrt{1-s^2}^{k-1})(\frac{d}{ds}\sqrt{1-s^2}) \\
&=& (k\sqrt{1-s^2}^{k-1})(-\sqrt{1-s^2}^{-1}s) \\
&=& -k\sqrt{1-s^2}^{k-2}s \\
\frac{d}{ds}\sqrt{1-s^2}^7 &=& -7\sqrt{1-s^2}^5 s \\
\frac{d}{ds}\sqrt{1-s^2}^5 &=& -5\sqrt{1-s^2}^3 s \\
\frac{d}{ds}(\frac{1}{7}\sqrt{1-s^2}^7-\frac{1}{5}\sqrt{1-s^2}^5) &=& \frac{1}{7}(-7\sqrt{1-s^2}^5 s)-\frac{1}{5}(-5\sqrt{1-s^2}^3 s) \\
&=& -\sqrt{1-s^2}^5 s+\sqrt{1-s^2}^3 s \\
&=& (-\sqrt{1-s^2}^2+1)\sqrt{1-s^2}^3 s \\
&=& (-(1-s^2)+1)\sqrt{1-s^2}^3 s \\
&=& (-1+s^2+1)\sqrt{1-s^2}^3 s \\
&=& s^2\sqrt{1-s^2}^3 s \\
&=& s^3\sqrt{1-s^2}^3
\end{array}$$

Questão 2: gabarito

$$\begin{array}{rcl}
\int \frac{(\ln x)^3 \cos((\ln x)^4)}{x} \, dx & = & \int (\ln x)^3 \cos((\ln x)^4) \frac{1}{x} \, dx \\
& = & \int u^3 \cos(u^4) \, du \\
& = & \int \cos(u^4) u^3 \, du \\
& = & \int \cos v \cdot \frac{1}{4} \, dv \\
& = & \frac{1}{4} \int \cos v \, dv \\
& = & \frac{1}{4} \operatorname{sen} v \\
& = & \frac{1}{4} \operatorname{sen}(u^4) \\
& = & \frac{1}{4} \operatorname{sen}((\ln x)^4)
\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c} u = \ln x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{c} v = u^4 \\ \frac{dv}{du} = 4u^3 \\ dv = 4u^3 du \\ \frac{1}{4} dv = u^3 du \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{rcl}
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4} \operatorname{sen}((\ln x)^4)\right) & = & \frac{1}{4} \cos((\ln x)^4) \, \frac{d}{dx}((\ln x)^4) \\
& = & \frac{1}{4} \cos((\ln x)^4) \cdot 4(\ln x)^3 \frac{d}{dx}(\ln x) \\
& = & \frac{1}{4} \cos((\ln x)^4) \cdot 4(\ln x)^3 \frac{1}{x} \\
& = & \cos((\ln x)^4)(\ln x)^3 \frac{1}{x} \\
& = & \frac{(\ln x)^3 \cos((\ln x)^4)}{x}
\end{array}$$

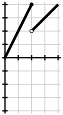
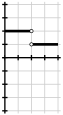
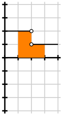
Questão 3: gabarito (falta o teste)

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Queremos integrar:} & \int \frac{3x+2}{(x+4)(x-5)}\,dx & & \\
\text{Queremos que:} & \frac{3x+2}{(x+4)(x-5)} & = & \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-5} \\
\text{Sabemos que:} & \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-5} & = & \frac{A(x-5)}{(x+4)(x-5)} + \frac{B(x+4)}{(x+4)(x-5)} \\
 & & = & \frac{A(x-5)+B(x+4)}{(x+4)(x-5)} \\
 & & = & \frac{Ax-5A+Bx+4B}{(x-4)(x+5)} \\
 & & = & \frac{(A+B)x+(-5A+4B)}{(x-4)(x+5)} \\
\text{Então:} & \frac{3x+2}{(x+4)(x-5)} & = & \frac{(A+B)x+(-5A+4B)}{(x-4)(x+5)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
3x+2 & = & (A+B)x + (-5A+4B) \\
A+B & = & 3 \\
-5A+4B & = & 2 \\
A & = & 10/9 \\
B & = & 17/9
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\frac{3x+2}{(x+4)(x-5)} & = & \frac{10/9}{x+4} + \frac{17/9}{x-5} \\
\int \frac{3x+2}{(x+4)(x-5)}\,dx & = & \int \frac{10/9}{x+4} + \frac{17/9}{x-5}\,dx \\
 & = & \frac{10}{9}\ln|x+4| + \frac{17}{9}\ln|x-5|
\end{array}$$

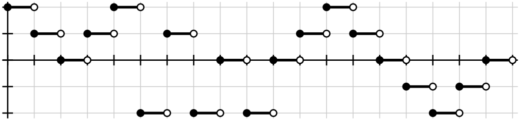
Questão 4: gabarito

$F(x) =$  $\quad F'(x) =$  $\quad \int_{x=1}^{x=3} F'(x)\,dx =$  $= 3$

$$\underbrace{\underbrace{\int_{x=1}^{x=3} F'(x)\,dx}_{3} \;=\; \underbrace{\underbrace{\underbrace{F(x)\Big|_{x=1}^{x=3}}_{F(3)-F(1)}}_{3-2}}_{1}}_{\mathbf{F}}$$

Questão 5: gabarito

$$f(x) \;=$$



$$F(x) \;=\; \int_{t=2}^{t=x} f(t)\,dt \;=$$

Erros que muitas pessoas cometeram

$\boxed{\text{1a:}}$ $$\int c^4(c^2-1)\,dc \;=\; \int c^8 - c^4\,dc$$

$\boxed{\text{3a:}}$ $$\int \frac{3x+2}{(x+4)(x-5)}\,dx \;=\; \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-5}$$

$\boxed{\text{3b:}}$ $$\int \frac{3x+2}{(x+4)(x-5)} \;=\; \int \frac{10/9}{x+4} + \frac{17/9}{x-5}$$

$\boxed{\text{3c:}}$ $$\frac{\frac{10}{9}(x+4) + \frac{17}{9}(x-5)}{(x+4)(x-5)} \;=\; \frac{(\frac{10}{9} + \frac{17}{9})x + (\frac{68}{9} - \frac{50}{9})}{(x+4)(x-5)}$$