Cálculo 2 - 2023.2

P2 (Segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.2-C2.html

Questão 1

(Total: 4.0 pts)
Lembre que no curso eu mostrei que o meu modo preferido de escrever o "método" para resolver EDOs com variáveis separáveis — "EDOVSs" — é o "método" [M] abaixo... eu pus o termo "método" entre aspas porque alguns dos passos da [M] são gambiarras nas quais a gente não pode confiar totalmente, e aí a gente precisa sempre testar as nossas soluções. O abaixo — a "fórmula" — é uma versão resumida do [M].

$$[\mathrm{M}] = \left(\begin{array}{rcl} \frac{dy}{dx} & = & \frac{g(x)}{h(y)} \\ h(y)\,dy & = & g(x)\,dx \\ \int h(y)\,dy & = & \int g(x)\,dx \\ \| & & \| \\ H(y)+C_1 & & G(x)+C_2 \\ H(y) & = & G(x)+C_2-C_1 \\ & = & G(x)+C_3 \\ H^{-1}(H(y)) & = & H^{-1}(G(x)+C_3) \\ \| & & \\ y & & \end{array} \right)$$

$$[\mathrm{F}_3] = \left(\begin{array}{rcl} \frac{dy}{dx} & = & \frac{g(x)}{h(y)} \\ H^{-1}(H(y)) & = & H^{-1}(G(x)+C_3) \\ \| & & \\ y & & \end{array} \right)$$

Seja $(*)$ esta EDOVS:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-2(y-1)}$$

a) **(1.0 pts)** Desenhe os tracinhos do campo de direções da EDO (*) nos pontos com $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Aqui você vai ter que desenhar 25 tracinhos e vai ter que caprichar – um tracinho com coeficiente angular $\frac{1}{2}$ tem que ser visualmente bem diferente de um com coeficiente angular 1 e de um com coeficiente angular 2.

b) **(1.5 pts)** Encontre as duas soluções gerais da EDO $(*)$ – a solução "positiva" e a "negativa" e dê nomes para elas.

c) **(0.5 pts)** Teste a sua solução "negativa".

d) **(0.5 pts)** Encontre a solução particular que passa pelo ponto $(3, 2)$.

e) **(0.5 pts)** Encontre a solução particular que passa pelo ponto $(2, 0)$.

Muito importante: em todas as questões desta prova eu vou corrigir as respostas de vocês como se eu fosse o "colega menos seu amigo e sem paciência pra adivinhar nada" da Dica 7 e do slide sobre contextos... por exemplo, se você escrever só "$a = 42$" eu vou interpretar isso como "aqui essa pessoa tá dizendo que é óbvio que '$a = 42$' é sempre verdade – e isso é falso!!!", e aí babau. Ou seja, a parte em português das questões de vocês vai ser MUUUUITO importante!

Questão 2
(Total: 4.0 pts)

Sejam $(**)$ e $(***)$ as EDOs abaixo:

$$\begin{array}{rcll} y'' + 3y' - 10y & = & 0 & \qquad (**) \\ y'' + 3y' - 10y & = & \operatorname{sen} 2x & \qquad (***) \end{array}$$

a) **(0.5 pts)** Encontre as soluções básicas e a solução geral da EDO $(**)$. Dê um nome para cada uma delas.

b) **(1.0 pts)** Encontre uma solução $g(x)$ da EDO $(**)$ que obedeça isto aqui: $g(0) = 3$, $g'(0) = -1$.

c) **(2.0 pts)** Encontre uma solução da EDO $(***)$.

d) **(0.5 pts)** Teste a solução que você encontrou no item anterior.

Questão 3
(Total: 1.5 pts)

Seja $(****)$ esta EDO:

$$y' - \frac{2y}{x} = 3x$$

a) **(0.5 pts)** Encontre a solução geral dela.
b) **(1.0 pts)** Teste a sua solução.
Lembre que você pode usar este método:

$$[\mathrm{EL}_3] = \left(\begin{array}{rcl} f' + fg & = & h \\ G' & = & g \\ f & = & e^{-G}(\int e^G h \, dx + C) \end{array} \right)$$

Questão 4
(Total: 1.0 pts)

Lembre que nas últimas aulas nós usamos esta abreviação aqui

$$\mathsf{mac}(a, b, c, d, \ldots)$$

para

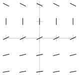
$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots,$$

onde o '...' indica que estamos "pensando como um computador" e não sabemos os coeficientes de $x^4, x^5, x^6, \ldots$.
Digamos que:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{mac}_1 & = & \mathsf{mac}(1, 2, -3, 4, 5, \ldots), \\ \mathsf{mac}_2 & = & \mathsf{mac}(a, b, c, d, e, \ldots), \\ \mathsf{mac}_1 \cdot \mathsf{mac}_2 & = & \mathsf{mac}(1, 0, 0, 0, 0, \ldots). \end{array}$$

a) **(0.5 pts)** Descubra os coeficientes a, b, c, d, e de mac_2.
b) **(0.5 pts)** Teste o seu resultado – verifique se $\mathsf{mac}_1 \cdot \mathsf{mac}_2$ realmente dá $\mathsf{mac}(1, 0, 0, 0, 0, \ldots)$.

Mini-gabarito

1a) 

1b) $f_{\mathsf{pos}}(x) = 1 + \sqrt{C - x}$,
$f_{\mathsf{neg}}(x) = 1 - \sqrt{C - x}$

1c) (teste)

1d) $f_{(3,2)}(x) = 1 + \sqrt{4 - x}$

1e) $f_{(2,0)}(x) = 1 - \sqrt{3 - x}$

2a) $f_1(x) = e^{2x}$
$f_2(x) = e^{-5x}$
$f_3(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$

2b) $f_4(x) = 2e^{2x} + e^{-5x}$

2c) $f_5(x) = -\frac{7}{116} \operatorname{sen} 2x - \frac{3}{116} \cos 2x$

2d) (teste)

3a) $f(x) = x^2(3 \log x + C)$

3b) (teste)

4a) $\mathsf{mac}_2 = \mathsf{mac}(1, -2, 7, -24, 72, \ldots)$

4b) (teste)

Critérios de correção

Eu estou avisando desde o início do semestre que Cálculo 2 é sobre fazer contas grandes demais que quase ninguém consegue fazer sem errar, e que a gente ia aprender várias técnicas pra lidar com contas desse tipo...

A questão 1 tinha um passo difícil. Nela temos $h(y) = -2(y-1)$; se nós fizermos $H(y) = \int -2(y-1)\,dy = -(y-1)^2$ nós chegamos a uma $H(y)$ fácil de inverter, mas se integramos $H(y)$ deste outro jeito,

$$\begin{array}{rcl} H(y) & = & \int -2(y-1)\,dy \\ & = & \int -2y+1\,dy \\ & = & -y^2+y \end{array}$$

nós chegamos a uma $H(y)$ que só da pra inverter ou completando quadrados ou por Bháskara. Pouquíssimas pessoas conseguiram inverter a $H(y)$ direito, e deu pra ver que muitas pessoas não sabiam escrever y em função de x – e não saber o que é isolar o y e escrever y em função de x é um erro grave.

A questão 2 tinha um sistema fácil de resolver,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha+\beta & = & 3 \\ \alpha-5\beta & = & -1 \end{array} \right. \Rightarrow \alpha=2,\ \beta=1$$

e um bem difícil:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -6A+14B & = & 1 \\ -14A+6B & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow A=, \tfrac{-3}{116},\ B=\tfrac{-7}{116}$$

no primeiro era tão fácil verificar os resultados no olho que eu considerei que se uma pessoa tinha chegado em valores errados para α e β e não tinha visto que os resultados estavam errados isso era um erro grave. No segundo sistema eu considerei principalmente se a pessoa tinha organizado as contas de um jeito que deixasse elas fáceis de verificar; nos casos em que eu levei 15 minutos pra entender cada passo da conta da pessoa eu não fui nada benevolente na correção – as pessoas já deviam ter treinado isso bastante! Releia a dica 7!!! –, nos casos em que os passos estavam bem mais fáceis de entender eu fui mais benevolente, e nos casos em que as pessoas usaram as abreviações $s = \operatorname{sen} 2x$ e $c = \cos 2x$ eu fui super benevolente...

...exceto nos casos das pessoas que acharam que $(\operatorname{sen} 2x)' = \cos 2x$ ou que $(\operatorname{sen} 2x)' = \cos x$ – isso era errar em casos básicos da regra da cadeia, e eu considerei que esses erros eram graves.

Nessa questão 2 a gente tinha duas EDOs diferentes e um monte de funções diferentes. Eu tirei pontos das pessoas que escreveram coisas ambíguas como "a função resolve a EDO".

A questão 3 era um outro caso de questão com contas grandes que quase ninguém consegue acertar da primeira vez, e eu usei ela pra avaliar se as pessoas conseguiam escrever cada passo dela de um jeito claro e fácil de verificar. O item sobre testar o resultado era o mais trabalhoso e mais importante, e várias pessoas chegaram num resultado errado no item 3a e depois no item 3b elas faziam umas contas malucas pra fingir que o resultado do item 3a delas estava certo. Eu considerei isso muito grave – e eu dei muitos pontos no item 3b pras pessoas que fizeram um teste honesto e bem escrito e descobriram que tinha algo errado ou nas contas do 3a delas ou no teste mas não tiveram tempo de descobrir exatamente onde estava o erro.

A questão 4 era pra ver quem já tinha treinado o suficiente as técnicas de fazer contas com polinômios "olhando só pros coeficientes deles". Muitas pessoas mostraram que tinham treinado o suficiente e resolveram essa questão em poucas linhas; nesses casos eu perdoei os erros de contas que eu considerei pequenos. Outras pessoas tiveram que passar pra notação de polinômios, fizeram contas enormes E cometeram montes de erros; eu não fui nada benevolente com os erros delas.