

# Cálculo 2 - 2023.2

Todos os PDFs do semestre  
juntados num PDFzão só

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF  
<http://anggtwu.net/2023.2-C2.html>

# Cálculo 2 - 2023.2

Aula 0: Introdução ao curso  
e algumas dicas de estudo

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF  
<http://anggtwu.net/2023.2-C2.html>

## Pedaço de semicírculo: seja como o Bob

Imagina que você está numa turma de Cálculo 2 que tem dois “Alex”es – vou chamar eles de Alex 1 e Alex 2 – e um Bob. Numa das provas dessa turma cai uma questão assim, sobre uma fórmula que calcula a área de um pedaço de um semicírculo:

Calcule:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx$$

Tanto o Alex 1 quanto o Alex 2 respondem essa questão dizendo só isso aqui,

$$\frac{1}{2} \left( \arcsen(x) + x\sqrt{1-x^2} \right)$$

e o Bob entrega uma resposta que tem uma página inteira de contas. Aí na vista de prova o Bob está feliz porque ganhou todos os pontos dessa questão e tanto o Alex 1 quanto o Alex 2 estão putíssimos porque ganharam 0, e porque não conseguiram me convencer a aumentar as notas deles.

O argumento do Alex 1 foi “pô, professor, a resposta tá certa, eu vi num livro e eu lembrava a fórmula, e eu até conferi ela no computador depois”, o argumento do Alex 2 foi “pô, professor, a resposta tá certa, eu fiz as contas de cabeça e pensei tudo direito, eu só não escrevi”...

**Seja como o Bob!**

Porque é que os Alexes tiraram 0?  
 Que critério de correção eu usei aí?  
 Que critério de correção eu vou usar no curso?  
 Que nível de detalhe eu espero nas respostas?

Eu vou precisar de várias páginas pra responder tudo isso.

## “Releia a Dica 7”

<http://anggtwu.net/2021-1-C2-somas-1-dicas.html>

<http://anggtwu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=5>

1) Aprenda a testar tudo: contas, possíveis soluções de equações, representações gráficas de conjuntos...

2) Cada “seja” ou “sejam” que aparece nestas folhas é uma definição, e você pode usá-los como exemplos de definições bem-escritas (ééé!!!!) pra aprender jeitos de escrever as suas definições.

3) Em “matematiqûês” a gente quase não usa termos como “ele”, “ela”, “isso”, “aquilo” e “lá” — ao invés disso a gente dá nomes curtos pros objetos ou usa expressões matemáticas pra eles cujo resultado é o objeto que a gente quer... mas *quando a gente está discutindo problemas no papel ou no quadro* a gente pode ser referir a determinados objetos *apontando pra eles com o dedo* e dizendo “esse aqui”.

4) Se você estiver em dúvida sobre o que um problema quer dizer tente escrever as suas várias hipóteses — a prática de escrever as suas idéias é o que vai te permitir aos poucos conseguir resolver coisas de cabeça.

5) Muitas coisas aparecem nestas folhas escritas primeiro de um jeito detalhado, e depois aos poucos de jeitos cada vez mais curtos. Você vai ter que aprender a completar os detalhes.

6) Alguns exercícios destas folhas têm muitos subcasos. Nos primeiros subcasos você provavelmente vai precisar fazer as contas com todos os detalhes e verificá-las várias vezes pra não errar, depois você vai aprender a fazê-las cada vez mais rápido, depois vai poder fazê-las de cabeça, e depois você vai começar a visualizar o que as contas “querem dizer” e vai conseguir chegar ao resultado graficamente, sem contas; e se você estiver em dúvida se o seu “método gráfico” está certo você vai poder conferir se o “método gráfico” e o “método contas” dão aos mesmos resultados.

7) Uma solução bem escrita pode incluir, além do resultado final, contas, definições, representações gráficas, explicações em português, testes, etc. Uma solução bem escrita é fácil de ler e fácil de verificar. Você pode testar se uma solução sua está bem escrita submetendo-a às seguinte pessoas: a) você mesmo logo depois de você escrevê-la — releia-a e veja se ela está clara; b) você mesmo, horas depois ou no dia seguinte, quando você não lembrar mais do que você pensava quando você a escreveu; c) um colega que seja seu amigo; d) um colega que seja menos seu amigo que o outro; e) o monitor ou o professor. Se as outras pessoas acharem que ler a sua solução é um sofrimento, isso é mau sinal; se as outras pessoas acharem que a sua solução está claríssima e que elas devem estudar com você, isso é bom sinal. *GA é um curso de escrita matemática*: se você estiver estudando e descobrir que uma solução sua pode ser reescrita de um jeito bem melhor, não hesite — reescrever é um ótimo exercício.

## Linguagem formal, gramática, sintaxe

Veja se você consegue entender a figura da próxima página...

Eu peguei ela daqui, com pequenas adaptações:

[https://en.wikipedia.org/wiki/Context-free\\_grammar](https://en.wikipedia.org/wiki/Context-free_grammar)

A parte à esquerda dela é a “gramática” de uma certa linguagem formal, e a parte à direita dela mostra como uma certa expressão é “parseada” nessa linguagem formal.

Todas as linguagens de programação têm gramáticas bem definidas. Quando a gente está trabalhando numa linguagem com uma gramática bem definida é fácil definir quais expressões são válidas nela – uma expressão é válida quando ela é “parseável” – e quais expressões têm erros de sintaxe – as que não são “parseáveis”.

Em Prog 1 você aprendeu C, e você viu que o compilador podia rejeitar os seus programas por vários motivos... por exemplo:

1. erros de sintaxe,
2. erros de tipo,
3. símbolos não declarados.

Se você quiser entender direito como compiladores detectam erros dos tipos 2 e 3, dê uma olhada na página 99 do livro do Thain:

<https://www3.nd.edu/~dthain/compilerbook/compilerbook.pdf#page=113>

$\langle \text{Stmt} \rangle \rightarrow \langle \text{Id} \rangle = \langle \text{Expr} \rangle ;$   
 $\langle \text{Stmt} \rangle \rightarrow \{ \langle \text{StmtList} \rangle \}$   
 $\langle \text{Stmt} \rangle \rightarrow \text{if} ( \langle \text{Expr} \rangle ) \langle \text{Stmt} \rangle$   
 $\langle \text{StmtList} \rangle \rightarrow \langle \text{Stmt} \rangle$   
 $\langle \text{StmtList} \rangle \rightarrow \langle \text{StmtList} \rangle \langle \text{Stmt} \rangle$   
 $\langle \text{Expr} \rangle \rightarrow \langle \text{Id} \rangle$   
 $\langle \text{Expr} \rangle \rightarrow \langle \text{Num} \rangle$   
 $\langle \text{Expr} \rangle \rightarrow \langle \text{Expr} \rangle \langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle$   
 $\langle \text{Id} \rangle \rightarrow x$   
 $\langle \text{Id} \rangle \rightarrow y$   
 $\langle \text{Num} \rangle \rightarrow 0$   
 $\langle \text{Num} \rangle \rightarrow 1$   
 $\langle \text{Num} \rangle \rightarrow 9$   
 $\langle \text{Optr} \rangle \rightarrow >$   
 $\langle \text{Optr} \rangle \rightarrow +$

$\text{if} ( \underbrace{\underbrace{\langle \text{Id} \rangle}_{x} \underbrace{\langle \text{Optr} \rangle}_{>} \underbrace{\langle \text{Num} \rangle}_{9}}_{\langle \text{Expr} \rangle} ) \{ \underbrace{\underbrace{\langle \text{Id} \rangle}_{x} = \underbrace{\langle \text{Num} \rangle}_{0}}_{\langle \text{Expr} \rangle} ; \underbrace{\underbrace{\langle \text{Id} \rangle}_{y} = \underbrace{\langle \text{Expr} \rangle}_{y} \underbrace{\langle \text{Optr} \rangle}_{+} \underbrace{\langle \text{Expr} \rangle}_{1}}_{\langle \text{Expr} \rangle} ; \}$   
 $\underbrace{\hspace{15em}}_{\langle \text{StmtList} \rangle}$   
 $\underbrace{\hspace{15em}}_{\langle \text{StmtList} \rangle}$   
 $\underbrace{\hspace{15em}}_{\langle \text{Stmt} \rangle}$

## A linguagem formal de Cálculo 2

### Péssima notícia 1:

Nenhum livro define precisamente a gramática da “linguagem” de Cálculo 2. Você vai ter que deduzir quais expressões são válidas lendo os livros do curso – principalmente o Leithold e o Miranda – e os meus slides com muita atenção, escrevendo a beça, checando se as suas expressões seguem as mesmas regras que as deles, e discutindo com os seus colegas, comigo, e com o monitor.

### Péssima notícia 2:

Cálculo 2 não tem uma linguagem só, tem várias! Por exemplo, em alguns momentos do curso a gente vai permitir a “notação de Leibniz”, na qual expressões como  $\frac{dy}{dx}dy = dx$  fazem sentido... mas a gente só vai conseguir entender a notação de Leibniz direito se a gente considerar que “Cálculo 2 sem notação de Leibniz” e “Cálculo 2 com notação de Leibniz” são duas linguagens diferentes, como, sei lá, C e C++, e se a gente entender como *traduzir* expressões em “Cálculo 2 com notação de Leibniz” para “Cálculo 2 sem notação de Leibniz”.

$2 + 3 = 5$	sempre
$2 + 3 \rightarrow 5$	<b>NUNCA</b>
$\underbrace{2 + 3}_5$	sempre

$\frac{dy}{dx} dx = dy$	às vezes
$\int \text{sen } x dx$	sempre
$\int \text{sen } x$	<b>NUNCA</b>

$\int f dx = \int f(x) dx$	às vezes
$y = y(x)$	às vezes

$(a \cdot 10)[a := 4] = 4 \cdot 10$	sempre
$(a \cdot 10)[a := 4] = 40$	<b>NUNCA</b>

Quando $x = 3$	sempre
temos $f(x)=42$	
Quando $x = 3$	<b>NUNCA</b>
temos $f=42$	

## Sintaxe

Em Prog 1 você aprendeu a usar uma linguagem – o C – com uma sintaxe que era totalmente nova pra você, e a cada aula você aprendia mais algumas construções sintáticas – ou, pra encurtar, “sintaxes” – que o compilador entendia. E você deve ter dado uma olhada de relance, durante poucos segundos, na sintaxe completa do C em BNF, que é o apêndice A do Kernighan & Ritchie... na versão do K&R que eu tenho esse apêndice A tem 9 páginas. É algo parecido com isso aqui:

<http://www.csci-snc.com/ExamplesX/C-Syntax.pdf>  
<https://www2.cs.arizona.edu/~debray/Teaching/CSc453/DOCS/cminusminuspec.html>

O pessoal de computação tem duas matérias sobre isso. Em Linguagens Formais eles aprendem a definir matematicamente as linguagens que um computador possa entender, e em Compiladores ele aprendem a fazer programas que entendem certas “linguagens formais” e “compilam” “programas” escritos nessas linguagens.

Quase tudo nessas duas matérias é bem difícil de entender, mas algumas poucas idéias são fáceis e a gente vai usar elas pra entender algumas sintaxes que vão ser usadas em C2 e que devem ser novas pra quase todo mundo... por exemplo estas,

$$\sum_{\langle \text{var} \rangle = \langle \text{expr} \rangle}^{\langle \text{expr} \rangle} \langle \text{expr} \rangle$$

$$\int_{\langle \text{var} \rangle = \langle \text{expr} \rangle}^{\langle \text{var} \rangle = \langle \text{expr} \rangle} \langle \text{expr} \rangle d\langle \text{var} \rangle$$

$$\langle \text{expr} \rangle \Big|_{\langle \text{var} \rangle = \langle \text{expr} \rangle}^{\langle \text{var} \rangle = \langle \text{expr} \rangle}$$

$$\forall \langle \text{var} \rangle \in \langle \text{expr} \rangle. \langle \text{expr} \rangle$$

$$\exists \langle \text{var} \rangle \in \langle \text{expr} \rangle. \langle \text{expr} \rangle$$

e as notações de “set comprehensions” daqui:  
 Mpg8

# Justificativas

A linguagem de Cálculo 2 não tem uma gramática totalmente definida, como o C. Cada livro usa convenções um pouco diferentes, e **TODOS ELES** supõem que o leitor vai aprender a sintaxe certa só lendo o livro e estudando – não há um compilador no qual a gente possa digitar expressões de Cálculo 2 e que vá dizer “Syntax error” onde a gente errar. O máximo que a gente tem são alguns programas que entendem *algumas* expressões de Cálculo 2 escritas em ascii e que sabem converter essas expressões pra formatos mais bonitos. Por exemplo:

<https://docs.sympy.org/latest/tutorial/printing.html>

Existem programas que entendem demonstrações e que são capazes de checar cada passo de uma demonstração pra ver se ele está correto. Eles geralmente precisam de um monte de dicas sobre qual é a justificativa de cada passo – essas dicas são *mais ou menos* como a parte à direita dessa demonstração aqui, que aparece na página 370 do livro do Thomas:

Using Substitution

$$\int \cos(7\theta + 5) d\theta = \int \cos u \cdot \frac{1}{7} du$$

Let  $u = 7\theta + 5$ ,  $du = 7 d\theta$ ,  
(1/7)  $du = d\theta$ .

$$= \frac{1}{7} \int \cos u du$$

With the (1/7) out front, the  
integral is now in standard form.

$$= \frac{1}{7} \sin u + C$$

Integrate with respect to  $u$ ,  
Table 4.2.

$$= \frac{1}{7} \sin(7\theta + 5) + C$$

Replace  $u$  by  $7\theta + 5$ .

Eu comecei a aprender um desses “programas que entendem demonstrações” em 2021 – o Lean:

<https://www.ma.imperial.ac.uk/~buzzard/xena/>

Ele é considerado muito mais fácil de usar que os “proof assistants” anteriores a ele mas ele ainda é bem difícil. Existem tutoriais pra ele nos quais os usuários têm que demonstrar na linguagem do Lean montes de exercícios de Matemática Discreta e Cálculo 1, mas acho que ainda falta bastante pra alunos de primeiro período conseguirem resolver os seus exercícios na linguagem do Lean.

Eu vou fazer algumas referências ao Lean no curso, meio como curiosidade e meio por conta de uma coisa cuja explicação é meio longa. Lá vai.

Uma das coisas que me dá mais ódio é ter que lidar com alunos que escrevem um monte de contas totalmente sem pé nem cabeça nas provas e depois juram que “tava tudo certo, caramba” e que eu só dei nota baixa pra eles porque eu tava de marcação com eles. E tem uma coisa que me dá tipo 1/100 desse ódio, que é lidar com alunos que fazem demonstrações nos quais eles pulam montes de passos e juram que tudo que eles fizeram “é óbvio”.

Neste curso nós vamos ver as definições **precisas** de *alguns tipos* de “passos óbvios” que aparecem em demonstrações e contas que são comuns de Cálculo 2. A maioria das demonstrações que nós vamos ver são por seqüências de igualdades, e vão ter este formato:

$$\begin{aligned} (\text{expr}) &= (\text{expr}) \quad (\text{justificativa}) \\ &= (\text{expr}) \quad (\text{justificativa}) \\ &= (\text{expr}) \quad (\text{justificativa}) \\ &= (\text{expr}) \quad (\text{justificativa}) \end{aligned}$$

A operação de substituição que eu vou explicar nos próximos slides vai servir pra **ZILHÕES** de coisas durante o curso – entre elas pra gente entender quais passos da forma abaixo são “óbvios”:

$$(\text{expr}) = (\text{expr}) \quad (\text{justificativa})$$

Obs: eu copieei o texto acima daqui: [2dT8](#)  
Falta revisá-lo!

## Atirei o Pau no Gato: seja como o Bob

Imagina que você está fazendo aula de flauta doce junto com o Alex e o Bob, e na prova vocês vão ter que tocar Atirei o Pau no Gato. O Alex demora um tempão pra encontrar cada nota, e ele leva meia hora pra tocar a música toda.

O Bob toca a música toda certinha em menos de 30 segundos.

Quando saem as notas o Alex tirou uma nota baixa e o Bob tirou 10.

Aí o Alex vai chorar pontos e diz “*pôxa, profe, eu me esforcei muito!*”

Quando o Bob tocou Atirei o Pau no Gato ele fez a música *parecer fácil*. O esforço dele ficou *invisível*.

Seja como o Bob!

O curso vai ter uma parte em que você vai ter que aprender a desenhar figuras com dezenas de retângulos e trapézios *em poucos segundos* – como o Bob tocando Atirei o pau no gato.

Se você for como o Alex, e levar mais de meia hora pra desenhar cada figura dessas, eu vou considerar que você não aprendeu os padrões que essas figuras seguem – e você não aprendeu a coisa mais importante.

Logo depois dessa parte do curso vai vir uma parte em que você vai ter que visualizar mentalmente (limites de) figuras feitas de infinitos retângulos e trapézios, e desenhar essas figuras. Se você for como o Alex você vai levar tempo **infinito** pra desenhar cada uma dessas figuras; **se você for como o Bob você vai levar segundos**.

Seja como o Bob!

## Imagens de intervalos

Veja as páginas 5 e 7 daqui:

<http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-somas-3.pdf#page=5>

Digamos que na sua turma de Cálculo 2 tem dois Alexes diferentes, um Bob, um Carlos e um Daniel, e todo mundo tá tentando resolver um exercício que é o seguinte: “seja  $f$  a função da página 5 do link acima. Calcule  $f([1, 3])$ ”.

Todo mundo reconhece que o intervalo  $[1, 3]$  é um conjunto com infinitos pontos, e cada pessoa tenta resolver esse exercício de um jeito diferente.

O Alex 1 decide começar listando todos os pontos do intervalo  $[1, 3]$ . Ele vai primeiro obter uma lista de pontos que ele vai escrever nesse formato aqui,

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\}$$

e depois ele vai simplificar esse conjunto daqui,

$$\{f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \dots\}$$

transformando ele numa lista de números, pondo os números dessa lista em ordem e deletando as repetições... **só que como o conjunto  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\}$  é infinito ele nunca consegue terminar o primeiro passo.**

O Alex 2 decide que ele vai pegar uma sequência de conjuntos finitos cada vez maiores, e “cada vez mais parecidos” com o conjunto  $[1, 3]$ . Ele escolhe essa sequência aqui...

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1, 3\}, \\ A_2 &= \{1, 2, 3\}, \\ A_3 &= \{1, 1.5, 2, 2.5, 3\}, \\ A_4 &= \{1, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 2.25, 2.5, 2.75, 3\}, \dots \end{aligned}$$

Ele calcula  $f(A_1)$ ,  $f(A_2)$ ,  $f(A_3)$ ,  $f(A_4)$  pelo gráfico usando o “jeito esperto” – como nas figuras da página 5 do link – e ele deduz, **por um argumento informal e olhométrico**, que  $f([1, 3])$  **deve ser** o intervalo  $[3, 4]$ .

O Bob faz algo parecido como o Alex 2, mas ele encontra um modo de “levantar” todo o intervalo  $[1, 3]$  pro gráfico da função  $y = f(x)$  de uma vez só, e de depois “projetar” pro eixo  $y$  esse “intervalo levantado”. Ele obtém uma figura bem parecida com a última figura da página 5 do link, e ele descobre – **também meio no olhometro** – que  $f([1, 3]) = [3, 4]$ .

O Carlos vê que **é óbvio que**  $f([1, 3]) = [f(1), f(3)] = \{3, 3\} = \{3\}$ , e **portanto** a imagem do intervalo  $[1, 3]$  pela função  $f$  é um conjunto com um ponto só. =(

O Daniel resolve que tudo isso é informal demais pra ele, e que ele precisa aprender um modo 100% preciso e formal de calcular  $f([1, 3])$  sem o gráfico. Ele descobre que vai ter que estudar uma coisa chamada “Análise Matemática”, baixa o “*Elementary Analysis: The Theory of Calculus*” do Kenneth Ross, começa a estudar por ele e aprende coisa incríveis – **mas ele leva um ano nisso.**

**Seja como o Bob!**

## Sobre Português

Muita gente aprende no Ensino Médio e nas matérias de primeiro período que “entender uma fórmula” quer dizer 1) traduzí-la pra português e 2) generalizá-la. Então é BEM comum uma pessoa ficar em dúvida se pode fazer um passo como este aqui numa conta,

$$\sqrt{42^2 + 99^2} = 42 + 99$$

e aí a pessoa me perguntar isso aqui:

Professor, a raiz quadrada de um número ao quadrado mais outro número ao quadrado é o número mais o outro número?

É bem mais fácil discutir essa dúvida se a pessoa me fizer essa pergunta em notação matemática, ou me mostrando a igualdade acima e perguntando “isso aqui é verdade?”, ou me mostrando isso aqui,

$$\sqrt{42^2 + 99^2} \stackrel{?}{=} 42 + 99$$

que é bem mais bacana porque o ‘?’ deixa super claro que isso é uma igualdade que a pessoa não sabe se é verdade...

Se a pessoa me pergunta se isso aqui é verdade,

$$\sqrt{42^2 + 99^2} = 42 + 99 \quad (*)$$

eu posso mostrar pra ela essa outra igualdade aqui – note que eu estou dando nomes como (\*) e (\*\*) pras igualdades

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + y \quad (**)$$

e aí eu pergunto “você quer saber se a (\*\*) é algo que vale sempre, né?”, e aí a pessoa responde “É! É isso!”, e aí eu consigo responder: se a (\*\*) valer sempre ela também vai valer no caso em que  $x = 3$  e  $y = 4$ . Quando  $x = 3$  e  $y = 4$  a (\*\*) vira isso aqui:

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 3 + 4 \quad (***)$$

e aí temos:

$$\sqrt{\underbrace{x^2}_{3} + \underbrace{y^2}_{4}} = \underbrace{3 + 4}_{7}$$

$$\underbrace{\underbrace{9}_{3} \quad \underbrace{16}_{4}}_{25} = \underbrace{7}_{5}$$

$$\underbrace{\quad}_{5} \quad \mathbf{F}$$

Ou seja, a igualdade (\*\*\*) é falsa, e portanto a (\*\*) não vale sempre.

## Sobre Português (e generalizar)

Repara que eu não descobri se a igualdade (\*) era verdade ou não... eu convenci a pessoa a discutir a igualdade (\*\*) ao invés disso, porque eu “adivinhei” que na verdade o que a pessoa queria saber era se a (\*\*) era verdade ou não. Além disso eu desmontei a pergunta original da pessoa – aliás, a pergunta sobre a (\*\*) – em várias perguntas menores.

Até alguns semestres atrás eu achava que todo chegava na universidade sabendo “generalizar” e “particularizar” (ou: “especializar”) bastante bem... eu achava que as pessoas aprendiam isso assim que aprendiam a fazer “contas com letras” no Ensino Médio.

Vocês provavelmente vão ouvir histórias sobre como os meus cursos de Cálculo em 2022.1 – logo depois do fim da quarentena – foram os piores cursos *do universo*. Uma boa parte da razão pra isso foi que eu fiquei tentando encontrar modos de ensinar as pessoas a generalizarem e particularizarem, e fui descobrindo que essas coisas são muito mais difíceis de aprender e de ensinar do que eu pensava.

A pessoa do slide anterior achava que só podia fazer uma pergunta se ela 1) generalizasse a pergunta dela, e 2) traduzisse a pergunta dela pra Português. Acho que ela achava que tinha que tratar essas duas coisas como se fossem fáceis e óbvias – *mas não são*, e eu recomendo que a gente trate particularização/especialização como algo difícil em que é muito comum as pessoas terem dúvidas muito importantes que vale a pena discutir, “encontrar a generalização certa” como algo BEM difícil e BEM importante que a gente vai treinar explicitamente em vários exercícios difíceis e importantes do curso, e a gente vai ver que “traduzir pra português” é uma ferramenta bem menos útil do que parece. Quase todas as expressões matemáticas que a gente vai ver têm uma pronúncia padrão, mas vai ser bem comum a “tradução pra português” não nos ajudar nada, ou até nos atrapalhar, porque a gente vai ter que entender algumas palavras e expressões “como matemáticos” e não no sentido usual delas...

(Veja o próximo slide!)

# Banana

Considere as quatro perguntas abaixo:

1. Qual é o resultado de substituir na palavra “banana” todas as letras ‘a’ por ‘w’?
2. Qual é o resultado de substituir na palavra “banana” todas as letras ‘o’ por ‘u’?
3. Qual é o resultado de substituir na palavra “banana” todas as letras ‘A’ por ‘W’?
4. Qual é o resultado de substituir na palavra “blitiri” todas as letras ‘2’ por ‘3’?

O resultado da 1 é bem fácil: “bwnwnw”, mas a maioria das pessoas fica em dúvida nos outros itens... muitas pessoas respondem coisas como “não dá pra fazer o 2 porque “banana” não tem ‘o’”, “não sei se o 3 tem que dar “bWnWnW” ou “bwnwnw””, ou “não dá pra fazer o 4 porque “blitiri” não é uma palavra e ‘2’ e ‘3’ não são letras”...

Neste curso, e em todos os cursos de matemática que vão vir depois dele, **você vai ter que aprender a interpretar certas definições “como matemático”**: você vai ter que descobrir a interpretação mais simples possível que faça sentido, e essa idéia de “mais simples possível” vai ser bem **parecida** com *fazer o programa mais simples possível que obedeça uma certa especificação...*

Por exemplo:

o programa que responde “banana” no item 2 é bem mais simples do que o programa que primeiro testa se a palavra original tem alguma letra ‘o’, e dá erro se não tem;

o programa que responde “banana” no item 3 – porque ele considera que ‘a’ e ‘A’ são letras completamente diferentes, e “banana” não tem ‘A’ – é muito mais simples do que os programas que consideram que ‘a’ e ‘A’ são “letras parecidas”;

o programa que responde “blitiri” no item 4 é muito mais simples do que os programas que testam se a palavra original é uma palavra válida e se as duas letras dadas são caracteres considerados como “letras”.

Links:

Sobre áreas negativas e retângulos degenerados:

[2cT185](#), [2cT185](#)

[2fT63](#), [2fT64](#)

[2gT20](#) Contexto / Sabemos que  $2 = 3$ . Então...

[2gT38](#) O macaco substituidor: banana

## Unexpected end of input

Uma coisa que me desesperava bastante era quando um aluno me mostrava algo como isso aqui,

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x) \cdot \beta(x)) = \alpha'(x) \cdot$$

e me perguntava “isso aqui tá certo?”, ou: “é isso?”...

Aqui a pergunta mais precisa seria “esse início tá certo?”, ou “como é que eu continuo?”... eu aqui eu poderia responder ou “não!” ou isto,

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x) \cdot \beta(x)) = \alpha'(x) \cdot \beta(x) + \alpha(x) \cdot \beta'(x)$$

só que a resposta que funciona melhor *didaticamente* é a seguinte:

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x) \cdot \beta(x)) = \alpha'(x) \cdot \quad (*)$$

não é nem mesmo uma expressão válida, e um compilador que for analisar essa expressão vai abortar no meio do parsing e dizer “Unexpected end of input”, que é um tipo específico de erro de sintaxe...

O melhor modo de discutir a dúvida da pessoa que perguntou o “isso aqui tá certo?” é ir consertando com ela a expressão dela passo a passo, e – **JURO** – o melhor modo de fazer isso é primeiro transformar a expressão dela em uma expressão que compile, como essa aqui:

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x) \cdot \beta(x)) = \alpha'(x) \cdot 42 \quad (**)$$

que é uma igualdade – no sentido de que tem uma representação em árvore com o ‘=’ no topo – é aí a gente pode começar a discutir coisas como:

- a igualdade (\*\*) é verdadeira para todas as funções  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$ ?
- a igualdade (\*\*) é um caso particular da regra do produto?

## “Faz um vídeo explicando o PDF”

Em 2021 eu fiz um vídeo – que ficou bem bom – pra responder os alunos que estavam dizendo “professor, faz um vídeo explicando o PDF”, e em 2023 eu legendei esse vídeo. Dá pra acessar as legendas e o vídeo nos links abaixo,

<http://anggtwu.net/2021-1-C2-somas-1-dicas.html>

e o trecho mais importante das legendas é esse aqui:

Então, cada PDF tem vários exercícios e muitas dezenas de idéias. Se vocês disserem só “faz um vídeo explicando o PDF” eu vou fazer um vídeo de 5 minutos explicando tudo de um PDF por alto porque eu não sei direito onde estão as dúvidas de vocês... mas vocês fizerem perguntas mais específicas aí eu consigo fazer vídeos bem mais detalhado sobre aquelas perguntas ou sobre aqueles exercícios... gente, vocês não estão discutindo para descobrir como resolver os problemas? O próximo passo, já que vocês estão empacados, é vocês passarem a discutir pra encontrar a boas perguntas pra fazer... aqui tem um outro trecho que eu não copieiei, e deixa eu só ler isso aqui em voz alta também...

gente, a matéria de matemática fica cada vez mais difícil à medida que as matérias ficam mais avançadas, e passa a ser comum ter trechos uma linha ou de um parágrafo nos livros-texto que vocês vão passar muitas horas tentando decifrar aquilo. Isso vai acontecer O TEMPO TODO... praticamente toda aula, toda página, todo vídeo vai acontecer isso, até o a última matéria de matemática na vida de vocês, então a questão é: como é que vocês podem fazer para não ficarem perdidos com isso, para não ficarem paralisados... voltando pro que eu escrevi aqui, o meu objetivo aqui é fazer vocês aprenderem se virar com isso, e a técnica para isso e vocês aprenderem a escrever as hipóteses de vocês e aprenderem a fazer perguntas. A maioria das perguntas vocês vão conseguir responder sozinhos, algumas vocês vão conseguir descobrir a resposta conversando com amigos – faltou um “s” aqui... – que também não sabiam a resposta, que vão descobrir junto com vocês, e umas poucas vocês vão empacar mesmo e não vão conseguir resolver sozinhos. Me mandem as dúvidas de vocês!

## Um post da Ana Leticia de Fiori

Em 19/fev/2023 a Ana Leticia de Fiori postou [isso aqui](#) no Facebook:

**AL:** Um fenômeno curioso que tenho observado entre estudantes que declaram ter “travas de escrita”, ficarem “empacados” ao desenvolver trabalhos de conclusão de disciplinas ou de curso. Frequentemente, a alegação é de que o “perfeccionismo” faz com que travem.

Eu tenho provocado, perguntado sobre quais são os gatilhos, quais os momentos em que eles sentem que o bloqueio vem. Uma resposta é o confronto com o material coletado, sejam os dados sejam as referências levantadas. Materiais com os quais eles não conseguem lidar, no sentido radical da palavra lida. Não sabem trabalhar com as referências e com os dados. Porque não estão acostumados a ler.

Um dos efeitos disso são trabalhos bastante declaratórios, que clamam ter feito “revisões bibliográficas”, “levantamentos”, “análises de discurso”, etc. que, na verdade, jamais ocorreram. Ao finalmente escrever, despreza-se o que consta na literatura e se escreve de cabeça, com alguma citação aqui ou acolá utilizada como argumento de autoridade. Claro que o texto sai confuso, raso, impreciso.

Passa longe de um problema de perfeccionismo. Mas é assim que se mascara a falta de perícia no ofício acadêmico.

E, recentemente, numa reunião entre pares, ouvi dizerem que para evitar os eternos problemas de plágio e os novos problemas dos softwares de IA, vão só realizar atividades orais e de escrita em sala de aula. Isso me apavora, porque o tempo de maturação de um trabalho acadêmico não é o tempo da sala de aula. E vai ser mais uma instância a sumir da experiência desses estudantes.

**E:** Nossa, eu tou exatamente tentando escrever sobre um outro tipo de “perfeccionismo” que alguns dos meus estudantes têm e que eu ainda não tenho um modo muito bom de lidar com isso... São estudantes que assim que vêem que algo que eles escreveram está errado eles ou apagam ou jogam foram. Eu até tenho um monte de material - e slogans - sobre como o modo mais rápido de aprender assuntos difíceis de matemática é você escrever “hipótese” ou “rascunho” antes das partes que você não tem certeza e **NÃO APAGAR NADA, NUNCA** - ...mas não adianta, eles entram em pânico quando vêem que algo que eles escreveram não está perfeito - e aí eles não conseguem estudar...

**AL:** Mas aí é que está, a que parâmetros de perfeição eles se referem?

Esse comportamento de escrever e apagar tem a ver em parte com a fantasia de que o texto se compõe de uma vez só. Tendem a pular as etapas de estruturação de um roteiro, de rascunhos e revisões.

Quase como se o texto fosse psicografado. Eu costumo brincar com meus alunos que ninguém é Chico Xavier da antropologia, eles riem, mas teimam.

De novo, falta a dimensão do trabalho com o texto.

Perfeição, na fantasia dos alunos, é escrever sem esforço.

## Retas reversas

O Alex, o Bob e o Carlos fizeram GA juntos. Um dos últimos assuntos do curso era uma fórmula pra calcular a distância entre “retas reversas” – é uma fórmula bem complicada, que tem um determinante e um produto cruzado – e cada um deles estudou esse assunto de um modo diferente.

O Alex e o Carlos “sabem” que o objetivo de cada matéria de Matemática é fazer as pessoas aprenderem certos teoremas. Os dois decoraram a fórmula da distância entre retas reversas e tentaram aplicar ela na prova. O Alex conseguiu, mas a questão da prova tinha vários itens e em todos eles ela usava letras diferentes das da fórmula que ele tinha decorado, e aí ele levou MUITO tempo pra resolver um item, e não conseguiu fazer os outros... e o Carlos tinha decorado a fórmula errado, e aí num determinado ponto da questão ele precisava dividir um número negativo por um vetor, e ele não sabia como fazer isso.

*Tanto o Alex quanto o Carlos esqueceram a fórmula logo depois da prova.*

O Bob estudou essa parte da matéria de um outro jeito. Ao invés de pensar “toda vez que eu precisar calcular a distância entre duas retas é só usar a fórmula” ele considerou que tem muitos casos simples em que ele sabe calcular a distância entre as retas no olhometro – por exemplo, o caso em que uma das retas é paralela ao eixo  $x$  e a outra é paralela ao eixo  $y$ . Ele foi aprendendo como lidar com vários casos um pouco menos simples que esse, e aprendeu como visualizar o que aquela fórmula complicadíssima “quer dizer” – ela calcula a altura de um certo paralelepípedo.

O Bob tratou essa fórmula como algo que generaliza vários casos “simples” em que ele consegue calcular a distância entre duas retas por outros métodos, e ele usou esses casos simples pra testar se a fórmula realmente dá o resultado que ele esperava.

Tanto o Alex quanto o Bob quanto o Carlos “estudaram pelo livro”, mas existem vários modos de “estudar pelo livro” e o Bob usou modos que nem o Alex nem o Carlos conheciam.

*Neste curso você vai aprender – e treinar – vários modos de “estudar pelo livro” que provavelmente vão ser totalmente novos pra você.*

## Contexto

Quase todas as expressões matemáticas que usamos em C2 **dependem do contexto**. Por exemplo, a interpretação **default** pra esta expressão aqui:

$$f(x) = x - 9 = 2$$

é:

**Para toda** função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
e para todo  $x \in \mathbb{R}$  temos:  
 $f(x) = x - 9 = 2$

Se você só escreve “ $f(x) = x - 9 = 2$ ” e mostra isso pro “colega que seja seu amigo” ele vai levar meia hora tentando adivinhar qual foi o contexto que você estava pensando mas não escreveu...  
...e se ele descobrir em menos de, digamos, 50 tentativas, ele vai dizer “ok, jóia, tá certo!”.

O “colega que seja menos seu amigo” vai fazer menos tentativas, e os personagens “o monitor” e “o professor” da Dica 7 vão checar se o que você escreveu vai ser entendido corretamente por qualquer pessoa que saiba as convenções de como escrever matemática.

Lembre que **quase todo mundo** pára de ler um texto matemático quando vê uma besteira muito grande escrita nele. Imagine que um “colega que seja menos seu amigo” te mostra a solução dele pra um problema e te pergunta se está certa. A solução dele começa com:

Sabemos que  $2 = 3$ . Então...

O que você faria?

Dica: releia isto aqui:  
[Slogans27:07](#) até 32:45

## Fórmulas e hipóteses

Dê uma olhada no Teorema 4 da seção 3.1 do Miranda: [MirandaP80](#). Ele diz isso aqui:

Se  $f$  e  $g$  são funções diferenciáveis em  $x = a$  então a função  $f + g$  é diferenciável em  $a$  e:

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Nós vamos considerar que esse *teorema* pode ser decomposto em duas partes: *fórmula* e *hipóteses*. A *fórmula* dele é esta aqui,

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

e em muitas situações nós vamos querer usar só as fórmulas de certos teoremas e deixar pra verificar as hipóteses delas no final.

*Obs: falta acrescentar muita coisa aqui... explicar o que são contas formais, mostrar que o Mathologer só faz contas formais no vídeo dele sobre o “Calculus Made Easy”, mencionar que em Cálculo 3 nós vamos usar o “Calculus Made Easy” e que todas as contas dele são formais, falar sobre a introdução do Martin Gardner pro CME e como ele explica que o conceito de “função” foi mudando...*

*Obs 2: tem um slide sobre contas formais aqui: [2gT36](#) (p.4) O macaco e as contas formais*

## Sobre aulas expositivas

Muitos alunos acreditam que se eles assistirem uma aula expositiva eles vão ser capazes de resolver na prova questões sobre o que eles aprenderam – só que isso só passa a ser *mais ou menos* verdade depois que a pessoa aprende *muito bem* como estudar.

Muita coisa em matemática funciona como músculos. Os músculos mentais que você usa pra entender uma aula expositiva são bem diferentes dos músculos mentais que você usa pra resolver exercícios, e os músculos mentais que você exercita quando você relê uma explicação que você escreveu e procura jeitos de reescrevê-la de um modo mais claro são diferentes desses...

Leia isto aqui:

[Visaud39:09](#) até 46:06

## Formal vs. coloquial

Lembre que um dos meus objetivos principais *neste curso* é fazer as pessoas aprenderem a escrever suas idéias matemáticas de um jeito que seja claro e fácil de revisar, que elas gostem de reler depois (dica 7b) e que os colegas gostem de ler (dicas 7c e 7d)...

Algumas pessoas acham que textos matemáticos têm que ser escritos numa linguagem “formal” que seja a mais distante possível do português coloquial; outras pessoas preferem escrever de um modo bem próximo do coloquial. Por exemplo, o Jacir Venturi ([VenturiGA](#)), escreve num Português pomposo que eu acho horrível, e o Felipe Acker ([AckerGA1](#)) escreve de um modo bem próximo do coloquial que eu gosto bastante. E até hoje eu só tive acesso a bem pouco material do Reginaldo, mas eu tenho a impressão de que ele não gosta de usar linguagem coloquial em matemática... eu falo um pouquinho sobre isso neste trecho de um vídeo sobre didática: [Visaud59:49](#).

Na parte do curso sobre somas de Riemann você vai aprender a lidar com definições bem complicadas, e aos poucos – um pouquinho neste curso, e bastante nos seguintes – você vai aprender a fazer as suas próprias definições. E quando você souber fazer as suas próprias definições você vai ver que dá pra ser totalmente preciso usando tanto português coloquial quanto português pomposo...

...ah, e na parte final do curso, que é sobre equações diferenciais, você vai (ter que) aprender a usar corretamente um monte de “partículas”, como “seja”, “então”, “temos”, “isto é”, “queremos”, “sabemos que”, “lembre que”, “digamos que” e “vamos testar se”.

# Cálculo 2 - 2023.2

Aulas 1 e 2: integração e derivação  
com o mathologermóvel

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF  
<http://anggtwu.net/2023.2-C2.html>

## Links

Quadros destas aulas:

[2hQ1](#) Quadros da aula 1 (2a, 28/ago/2023)

[2hQ3](#) Quadros da aula 2 (3a, 29/ago/2023)

Links da aula 1:

[2gT4](#) Releia a dica 7

[2gT11](#) Atirei o pau no gato

[2gT19](#) Retas reversas

[2gT24](#) Integração e derivação com o Mathologermóvel

[2gT27](#) (p.4) Exercício 1

[2gT28](#) (p.5) Dicas pro exercício 1

[CalcEasy03:19](#) até 12:47

Links da aula 2:

[CalcEasy11:35](#) até 12:47

[2gT37](#) (p.5) O macaco substituidor: EDOs, RC, TFC2

[StewPtCap5p9](#) (p.330) Figuras 11 e 12

[StewPtCap5p16](#) (p.337) A integral definida

[StewPtCap5p33](#) (p.354) TFC, parte 2

[StewPtCap5p36](#) (p.357) Exercícios 19 a 26 (sobre o TFC2)

[2fT91](#) até [2fT93](#) (p.3 até p.5): A definição da integral

Os slides das próximas páginas são versões ligeiramente reescritas destes slides de outros semestres:

[2fT17](#) (mathologermovel, p.3) Item 3

[2fT18](#) (mathologermovel, p.4) Item 4

[2eT62](#) (TFC1, p.3) Algumas propriedades da integral

[2eT66](#) (TFC1, p.7) Exercício 1

[2eT69](#) (TFC1, p.10) A função  $G(x)$  é esta aqui

[2dT225](#) (MT3, p.4) Uma espécie de gabarito

[2eT199](#) (P1, p.7) eu defini as funções  $f$  e  $g$  desta forma

[2eT200](#) (P1, p.8) gabarito

## Introdução

Nesta parte do curso nós vamos tentar entender este trecho do vídeo do Mathologer,

[CalcEasy03:19](#) até 12:47

e vamos fazer alguns exercícios – que podem ser feitos em vários níveis de detalhe.

Leia estes trechos das legendas de uns vídeos meus:

[Slogans01:10](#) até 08:51: sobre chutar e testar

[Slogans07:17](#) até 07:48: ...do tamanho de um apartamento

[Visaud45:14](#) até 52:24: ajustar o nível de detalhe

[Slogans1:11:02](#) até 1:17:42: seja o seu próprio Geogebra

[Slogans1:39:46](#) até 1:45:02: ...com quem vale a pena estudar

Leia também estes slides:

[2gT4](#) (intro, p.3) “Releia a Dica 7”

[2gT13](#) (intro, p.12) Sobre Português

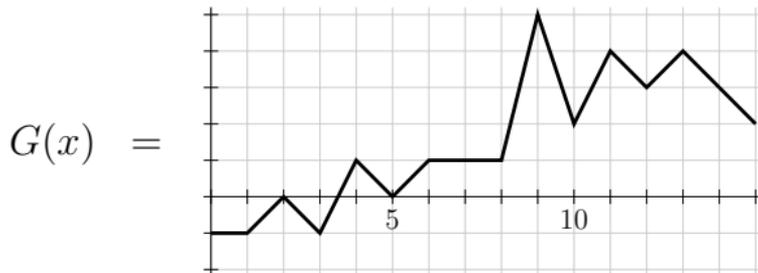
[2gT14](#) (intro, p.13) Sobre Português (2)

[2gT16](#) (intro, p.15) Unexpected end of input

[2gT19](#) (intro, p.18) Retas reversas

### Exercício 1.

Seja  $G(x)$  esta função:



Relembre como calcular coeficientes angulares e derivadas no olhômetro e faça um gráfico da função  $G'(x)$ .

Dica 1:  $G'(3.5) = 2$ .

Dica 2:  $G'(4)$  não existe — use uma bolinha vazia pra representar isso no seu gráfico.

## Exercício 1: mais dicas

Pra fazer o exercício 1 você provavelmente vai ter que relembrar algumas coisas sobre inclinação, coeficiente angular, limites laterais, derivadas laterais, e sobre o significado das bolinhas cheias e das bolinhas vazias nos gráficos... links:

[Leit1p18](#) (p.17: inclinação)

[Leit1p42](#) (p.41: bolinhas, domínio, imagem)

[StewPtCap1p10](#) (p.15: círculo cheio e círculo vazio)

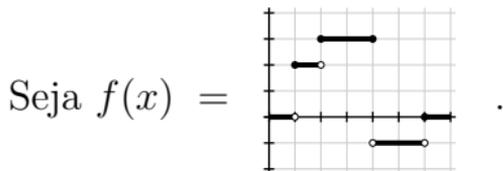
[Miranda66](#) (Capítulo 3: Derivadas)

[Miranda22](#) (Seção 1.4: Limites laterais)

[Miranda74](#) (Seção 3.2.3: Derivadas laterais)

[2eT70](#) (p.11) Dicas que eu preparei em 2022.1

## Exercício 2.



Note que:

$$\int_{x=1}^{x=2} f(x) dx = 2 \cdot (2 - 1),$$

$$\int_{x=3}^{x=4} f(x) dx = 3 \cdot (4 - 3),$$

$$\int_{x=4}^{x=6} f(x) dx = -1 \cdot (6 - 4),$$

Calcule:

a)  $\int_{x=1.5}^{x=2} f(x) dx$

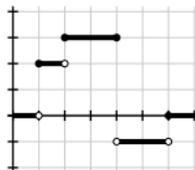
b)  $\int_{x=2}^{x=4} f(x) dx$

c)  $\int_{x=1.5}^{x=4} f(x) dx$

d)  $\int_{x=1.5}^{x=6} f(x) dx$

### Exercício 3.

Sejam  $f(x) =$



e  $F(\beta) = \int_{x=2}^{x=\beta} f(x) dx.$

- Calcule  $F(2), F(2.5), F(3), \dots, F(6).$
- Calcule  $F(1.5), F(1), F(0.5), F(0).$

### Exercício 4.

No exercício 3 você obteve alguns valores da função  $F(\beta)$ , mas não todos... por exemplo, você *ainda* não calculou  $F(2.1)$ .

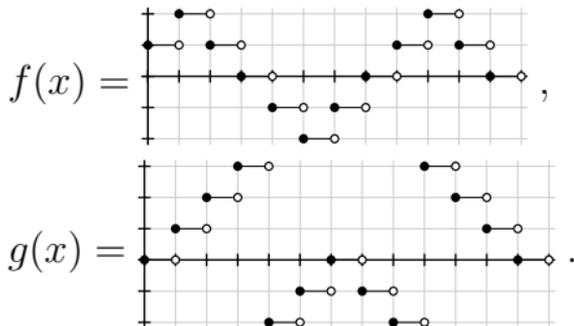
a) Desenhe num gráfico só todos os pontos  $(x, F(x))$  que você calculou nos itens (a) e (b) do exercício 3.

Dica: o conjunto que você quer desenhar é este aqui:  
 $\{(0, F(0)), (0.5, F(0.5)), \dots, (6, F(6))\}$ .

b) Tente descobrir — lendo os próximos slides, assistindo o vídeo, e discutindo com os seus colegas — qual é o jeito certo de ligar os pontos do item (a).

### Exercício 5.

Sejam:



Faça os gráficos destas funções:

$$\text{a) } F(x) = \int_{t=0}^{t=x} f(t) dt$$

$$\text{b) } G(x) = \int_{t=3}^{t=x} g(t) dt$$

## Algumas propriedades da integral

As três propriedades mais básicas da integral definida são estas:

$$\begin{aligned} k \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx &= \int_{x=a}^{x=b} k f(x) dx & (*) \\ \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x) dx &= \int_{x=a}^{x=c} f(x) dx & (**) \\ \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx &= - \int_{x=b}^{x=a} f(x) dx & (***) \\ \int_{x=a}^{x=b} k dx &= k(b-a) & (****) \end{aligned}$$

O melhor modo da gente visualizar o que essas propriedades “querem dizer” é comparando a fórmula pro caso geral com casos particulares. Olhe pra figura à direita; ela compara a (\*) com dois casos particulares dela – primeiro um caso “normal”, em que  $k = 2$ , e depois um caso “estranho” em que  $k = -1$ ...

No caso “estranho” aparecem uns números negativos, ó:

$$\underbrace{(-1) \cdot \int_{x=0}^{x=4} f(x) dx}_{>0} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} (-1) \cdot f(x) dx}_{<0}$$

...e uma figura que tem “área negativa”!!!

Eu acho a abordagem do Mathologer genial – ele começa dizendo que a distância percorrida é a área (ou a integral) da velocidade, e com isso vários casos estranhos em que aparecem números negativos começam a fazer sentido.

**Slogan:** a gente quer que as quatro propriedades acima valham sempre – tanto nos casos “normais” quanto nos casos “estranhos”.

$$\begin{aligned} (*) : \quad k \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx &= \int_{x=a}^{x=b} k f(x) dx \\ (*) \left[ \begin{array}{l} a:=0 \\ b:=4 \\ k=2 \end{array} \right] : \quad 2 \cdot \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x) dx}_{\text{área positiva}} &= \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} 2 \cdot f(x) dx}_{\text{área positiva}} \\ (*) \left[ \begin{array}{l} a:=0 \\ b:=4 \\ k=-1 \end{array} \right] : \quad (-1) \cdot \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x) dx}_{\text{área positiva}} &= \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} (-1) \cdot f(x) dx}_{\text{área negativa}} \end{aligned}$$

Links pros livros:

[StewPtCap5p22](#) (p.343)

[Leit5p48](#) (p.331)

[MirandaP220](#)

A motivação pro (\*\*\*) é isso aqui:

$$(**) : \quad \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x) dx = \int_{x=a}^{x=c} f(x) dx$$

$$(**) \begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=3 \\ c:=4 \end{bmatrix} : \quad \underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x) dx}_{\text{[Graph: orange area from 0 to 3]}} + \underbrace{\int_{x=3}^{x=4} f(x) dx}_{\text{[Graph: orange area from 3 to 4]}} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x) dx}_{\text{[Graph: orange area from 0 to 4]}}$$

$$(**) \begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=4 \\ c:=3 \end{bmatrix} : \quad \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x) dx}_{\text{[Graph: orange area from 0 to 4]}} + \underbrace{\int_{x=4}^{x=3} f(x) dx}_{\text{[Graph: ???]}} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x) dx}_{\text{[Graph: orange area from 0 to 3]}}$$

$$\underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x) dx}_{\text{[Graph: orange area from 0 to 4]}} - \underbrace{\int_{x=3}^{x=4} f(x) dx}_{\text{[Graph: orange area from 3 to 4]}} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x) dx}_{\text{[Graph: orange area from 0 to 3]}}$$

## “Quase retângulos”

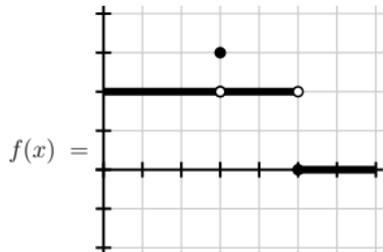
A quarta propriedade é essa aqui:

$$\int_{x=a}^{x=b} k dx = k(b-a) \quad (****)$$

A gente quer que ela valha pra todos os valores de  $k$ ,  $a$  e  $b$  – incluindo os casos em que  $k$  é negativo, que são “retângulos com altura negativa” e pros casos que  $a > b$ , que são “retângulos que têm base negativa”...

...e além disso a gente quer que ela valha pra casos como o da figura da direita, em que entre  $x = 2$  e  $x = 5$  o mathologermóvel anda com velocidade constante, 2, **exceto em dois instantes** – repare que no gráfico a gente tem  $f(3) = 3$  e  $f(5) = 0$ ...

Vamos pensar em termos de velocidades e distâncias. Entre  $x = 2$  e  $x = 5$  o mathologermóvel andou sempre com velocidade 2, exceto por dois instantes de um buzilionésimo de segundo cada um, em que ele andou com velocidades diferentes de 2... esses instantes mudam tão pouco a distância percorrida que a gente **vai considerar** que eles **não mudam** a distância percorrida.



$$\begin{aligned} \int_{x=2}^{x=5} f(x) dx &= \int_{x=2}^{x=5} 2 dx \\ &= 2 \cdot (5 - 2) \\ &= 2 \cdot 3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

# Cálculo 2 - 2023.2

Aulas 3, 4 e 5: contas com justificativas

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2023.2-C2.html>

## Links

[2hQ5](#) Quadros da aula 3 (4a 30/ago)

[2hQ7](#) Quadros da aula 4 (2a 04/set)

[2hQ10](#) Quadros da aula 5 (3a 05/set)

[CalcEasy11:35](#) até 12:47: vídeo sobre o macaco derivador

[StewPtCap3p5](#) (p.158) Derivada de uma função constante

[StewPtCap3p5](#) (p.158) A Regra da Potência

[StewPtCap3p7](#) (p.160) A Regra da Potência (versão geral)

[StewPtCap3p8](#) (p.161) A Regra da Multiplicação por Constante

[StewPtCap3p8](#) (p.161) A Regra da Soma

[StewPtCap3p14](#) (p.167) A Regra do Produto

[Stew2p31](#) (p.131) Example 6

[Visaud01:00](#) até 02:52 “é óbvio sim”

[Visaud37:17](#) até 46:06 reduzir e aumentar o nível de detalhe

[Visaud48:53](#) até o final: vários níveis de detalhe lado a lado

Links da aula 4 (2023sep04):

[CalcEasy11:35](#) até 20:22: o macaco derivador

[2gT33](#) Material do semestre passado

[StewPtCap3p26](#) (p.179) 3.4 A regra da cadeia

[StewPtCap5p33](#) (p.354) O TFC2

[StewPtCap5p36](#) (p.357) Exercícios sobre TFC2 (fazer do 19 ao 28)

Links da aula 6 (2023sep06):

[StewPtCap5p23](#) (p.344) Propriedades da integral definida

[StewPtCap5p39](#) (p.360) Integral indefinida

[StewPtCap5p40](#) (p.361) Propriedades da integral indefinida

[StewPtCap5p44](#) (p.365) Faça os exercícios 2 e 5 daqui

[StewPtCap7p5](#) (p.420) Integração por partes

## Como estudar funções

Você lembra de quando você aprendeu a fazer “contas com letras” na escola? Você levou centenas de horas de estudo e desespero – né? – pra entender como é que letras como  $x$  e  $y$  podiam fazer o papel de números desconhecidos cujos valores você quer descobrir e como é que letras como  $a$  e  $b$  podiam fazer o papel de números quaisquer... e você teve que ler muitas vezes tudo que você já tinha visto sobre soma, multiplicação, etc, pra entender essas operações de um jeito novo – antes elas eram operações que somavam e multiplicavam números conhecidos e concretos, depois elas passaram a ser operações que também eram capazes de somar e multiplicar expressões com letras...

Agora a gente vai ter que fazer algo parecido, mas agora pra funções. Em algumas situações as letras  $f$  e  $g$  vão representar funções que a gente quer descobrir, em outras situações  $f$  e  $g$  vão representar funções “quaisquer” (abstratas), em outras situações  $f$  e  $g$  vão representar funções que a gente conhece os gráficos delas mas que a gente não tem uma expressão “algébrica” que calcule os valores delas... e pra entender isso direito você vai ter que reler tudo que você já viu sobre operações com funções pra entender aquelas operações de um jeito novo, como operações que funcionam tanto pra expressões em que  $f$  e  $g$  são funções “concretas” como nos casos em que  $f$  e  $g$  são funções “abstratas”...

Muita gente acha que essa coisa de lidar com funções abstratas “é simples”, no sentido de que um dia você vai ler a explicação certa ou assistir o vídeo certo e *plim*, de um momento pro outro você vai se transformar em outra pessoa, vai deixar de ser a pessoa que achava isso difícil e vai virar a pessoa que acha isso fácil. NÃO É ASSIM... pra lidar com funções “abstratas” você vai ter que aprender centenas de detalhes, vai ter que aprender eles aos poucos, e eu nem sei quais são os livros que têm explicações mais ou menos completas sobre isso – eu tentei perguntar pra vários amigos matemáticos, por exemplo nessa série de reuniões online aqui, [Sapt](#), e ninguém sabe onde tem material sobre isso... em teoria isso é algo anterior a Pré-Cálculo/Cálculo 0, que as pessoas deveria aprender no Ensino Médio mas que hoje em dia não aprendem mais.

Dicas:

1. Os músculos mentais que você exercita quando você lê algo ou assiste alguém falando são diferentes dos que você exercita quando você escreve as suas idéias, quando você relê o que você escreveu, e quando você reescreve de um jeito melhor o que você escreveu. O slogan/historinha sobre isto está aqui: [2gT22](#).
2. O melhor modo de estudar é escrever todas as suas hipóteses – até porque na maior parte dos casos só quem vai ler elas são os personagens (a) e (b) da Dica 7: [2gT4](#).
3. Leia o post da Ana Letícia de Fiori: [2gT18](#).
4. Tem um trecho do vídeo sobre slogans que é sobre indicar graus de certeza – leia as legendas dele. Ele vai de [Slogans33:35](#) até 36:36.
5. Os livros de Cálculo 2 não definem precisamente a notação matemática que eles usam – você vai ter que aprender a notação certa por tentativa e erro, escrevendo as suas idéias do melhor modo que você conseguir e depois comparando a sua notação com as dos livros. Veja o slide [2gT7](#) sobre “A linguagem formal de Cálculo 2” e depois leia todos os slides de [2gT5](#) até [2gT10](#).
6. Pra muitas as pessoas a parte mais difícil do curso de C2 é a parte é que elas têm que aprender a usar “partículas em português”, como “se”, “então”, “queremos que”, “vamos testar se”, etc... e se elas não souberem usar essas partículas direito as contas delas vão ficar não só ambíguas como também erradas. Não deixe pra aprender isso na última hora, porque NÃO DÁ! Comece a prestar atenção nas partículas em português desde agora!!! As dicas pra P2 do semestre passado estão aqui, [2gT126](#), e tem um exemplo de uso dessas partículas no anexo da P2, aqui: [2gT138](#).

## “Example 6”

De: [Stew2p31](#) (p.131)

$$\begin{aligned} F(x) &= (6x^3)(7x^4) \\ F'(x) &= (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\frac{d}{dx}(6x^3) \\ &= (6x^3)(28x^3) + (7x^4)(18x^2) \\ &= 168x^6 + 126x^6 \\ &= 294x^6 \end{aligned}$$

[RC]	$= \left(\frac{d}{dx}c = 0\right)$	Veja <a href="#">StewPtCap3p5</a>
[RPot]	$= \left(\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}\right)$	Veja <a href="#">StewPtCap3p7</a>
[RMC]	$= \left(\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}f(x)\right)$	Veja <a href="#">StewPtCap3p8</a>
[RSoma]	$= \left(\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)\right)$	Veja <a href="#">StewPtCap3p5</a>
[RProd]	$= \left(\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)\right)$	Veja <a href="#">StewPtCap3p14</a>

$$\begin{aligned} F(x) &= (6x^3)(7x^4) \\ F'(x) &= ((6x^3)(7x^4))' \\ &= \frac{d}{dx}((6x^3)(7x^4)) \\ &= (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\frac{d}{dx}(6x^3) \quad \text{Por [RProd] com } f(x) = 6x^3, g(x) = 7x^4 \\ &= (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4) \cdot 6\frac{d}{dx}x^3 \quad \text{Por [RMC] com } c = 6, f(x) = x^3 \\ &= (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4) \cdot 6 \cdot 3x^2 \quad \text{Por [RPot] com } n = 3 \\ &= (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)(18x^2) \\ &= (6x^3) \cdot 7\frac{d}{dx}x^4 + (7x^4)(18x^2) \quad \text{Por [RMC] com } c = 7, f(x) = x^4 \\ &= (6x^3) \cdot 7 \cdot 4x^3 + (7x^4)(18x^2) \quad \text{Por [RPot] com } n = 4 \\ &= (6x^3)(28x^3) + (7x^4)(18x^2) \\ &= (6x^3)(28x^3) + 126x^6 \\ &= 168x^6 + 126x^6 \\ &= 294x^6 \end{aligned}$$

## O que quer dizer “Por ... com ...”?

$$\begin{aligned}
 F(x) &= (6x^3)(7x^4) \\
 F'(x) &= ((6x^3)(7x^4))' \\
 &= \frac{d}{dx}((6x^3)(7x^4)) \\
 \equiv & (6x^3) \frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4) \frac{d}{dx}(6x^3) \quad \text{Por [RProd] com } f(x) = 6x^3, g(x) = 7x^4 \\
 &= (6x^3) \frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4) \cdot 6 \frac{d}{dx}x^3 \quad \text{Por [RMC] com } c = 6, f(x) = x^3 \\
 &= (6x^3) \frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4) \cdot 6 \cdot 3x^2 \quad \text{Por [RPot] com } n = 3 \\
 &= (6x^3) \frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)(18x^2) \\
 &= (6x^3) \cdot 7 \frac{d}{dx}x^4 + (7x^4)(18x^2) \quad \text{Por [RMC] com } c = 7, f(x) = x^4 \\
 &= (6x^3) \cdot 7 \cdot 4x^3 + (7x^4)(18x^2) \quad \text{Por [RPot] com } n = 4 \\
 &= (6x^3)(28x^3) + (7x^4)(18x^2) \\
 &= (6x^3)(28x^3) + 126x^6 \\
 &= 168x^6 + 126x^6 \\
 &= 294x^6
 \end{aligned}$$

Compare: nós definimos [RProd] como esta igualdade,

$$[\text{RProd}] = \left( \frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x) \frac{d}{dx}g(x) + g(x) \frac{d}{dx}f(x) \right)$$

e se substituirmos  $f(x)$  por  $6x^3$  e  $g(x)$  por  $7x^4$  na igualdade [RProd] nós obtemos isto aqui,

$$\begin{aligned}
 [\text{RProd}] &= \left( \frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x) \frac{d}{dx}g(x) + g(x) \frac{d}{dx}f(x) \right) \\
 [\text{RProd}] \left[ \begin{array}{l} f(x) := 6x^3 \\ g(x) := 7x^4 \end{array} \right] &= \left( \frac{d}{dx}((6x^3)(7x^4)) \equiv (6x^3) \frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4) \frac{d}{dx}(6x^3) \right)
 \end{aligned}$$

que é exatamente a igualdade que eu marquei lá em cima...

## O que quer dizer “Por ... com ...”? (2)

$$\begin{aligned}
 F(x) &= (6x^3)(7x^4) \\
 F'(x) &= ((6x^3)(7x^4))' \\
 &= \frac{d}{dx}((6x^3)(7x^4)) \\
 &= (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\frac{d}{dx}(6x^3) \quad \text{Por [RProd] com } f(x) = 6x^3, g(x) = 7x^4 \\
 &= (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4) \cdot 6\frac{d}{dx}x^3 \quad \text{Por [RMC] com } c = 6, f(x) = x^3 \\
 &= (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4) \cdot 6 \cdot 3x^2 \quad \text{Por [RPot] com } n = 3 \\
 &= (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)(18x^2) \\
 \equiv & (6x^3) \cdot 7\frac{d}{dx}x^4 + (7x^4)(18x^2) \quad \text{Por [RMC] com } c = 7, f(x) = x^4 \\
 &= (6x^3) \cdot 7 \cdot 4x^3 + (7x^4)(18x^2) \quad \text{Por [RPot] com } n = 4 \\
 &= (6x^3)(28x^3) + (7x^4)(18x^2) \\
 &= (6x^3)(28x^3) + 126x^6 \\
 &= 168x^6 + 126x^6 \\
 &= 294x^6
 \end{aligned}$$

Lembre que a “regra da multiplicação por constante” é esta igualdade aqui,

$$[\text{RMC}] = \left( \frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}f(x) \right)$$

e se substituirmos  $c$  por  $7$  e  $f(x)$  por  $x^4$  nela nós obtemos isto aqui,

$$\begin{aligned}
 [\text{RMC}] &= \left( \frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}f(x) \right) \\
 [\text{RMC}] \left[ \begin{array}{l} c := 7 \\ f(x) := x^4 \end{array} \right] &= \left( \frac{d}{dx}(7x^4) = 7\frac{d}{dx}x^4 \right)
 \end{aligned}$$

O ‘ $\equiv$ ’ logo acima desta frase justifica a parte que muda no ‘ $\equiv$ ’ lá de cima!

# Integração por chutar-e-testar

Por exemplo, digamos que queremos resolver isto aqui:

$$\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x \, dx = ?$$

Eu começaria por estes chutes,

$$\begin{aligned} \text{[TFC2]} &= \left( \int_{x=a}^{x=b} f'(x) \, dx = f(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \right) \\ \text{[TFC2]} [f(x) := 42] &= \left( \int_{x=a}^{x=b} f'(x) \, dx = 42 \Big|_{x=a}^{x=b} \right) \\ \text{[TFC2]} [f'(x) := 99] &= \left( \int_{x=a}^{x=b} 99 \, dx = f(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \right) \\ \text{[TFC2]} \begin{bmatrix} f(x) := \sin x \\ f'(x) := \cos x \end{bmatrix} &= \left( \int_{x=a}^{x=b} \cos x \, dx = (\sin x) \Big|_{x=a}^{x=b} \right) \\ \text{[TFC2]} \begin{bmatrix} f(x) := \sin 4x \\ f'(x) := 4 \cos 4x \end{bmatrix} &= \left( \int_{x=a}^{x=b} 4 \cos 4x \, dx = (\sin 4x) \Big|_{x=a}^{x=b} \right) \\ \text{[TFC2]} \begin{bmatrix} f(x) := \frac{1}{4} \sin 4x \\ f'(x) := \cos 4x \end{bmatrix} &= \left( \int_{x=a}^{x=b} \cos 4x \, dx = \left( \frac{1}{4} \sin 4x \right) \Big|_{x=a}^{x=b} \right) \\ \text{[TFC2]} \begin{bmatrix} f(x) := \frac{1}{4} \sin 4x \\ f'(x) := \cos 4x \\ a := 0 \\ b := \pi/2 \end{bmatrix} &= \left( \int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x \, dx = \left( \frac{1}{4} \sin 4x \right) \Big|_{x=0}^{x=\pi/2} \right) \end{aligned}$$

...e depois eu faria isto aqui:

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x \, dx &\stackrel{(1)}{=} \left( \frac{1}{4} \sin 4x \right) \Big|_{x=0}^{x=\pi/2} \\ &= \left( \frac{1}{4} \sin 4 \frac{\pi}{2} \right) - \left( \frac{1}{4} \sin 4 \cdot 0 \right) \\ &= \left( \frac{1}{4} \sin 2\pi \right) - \left( \frac{1}{4} \sin 0 \right) \\ &= \left( \frac{1}{4} \cdot 0 \right) - \left( \frac{1}{4} \cdot 0 \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

A justificativa pra igualdade <sup>(1)</sup> acima é a última substituição da coluna da esquerda. Eu raramente escrevo todas as substituições da coluna da esquerda explicitamente, mas elas são *praticamente* o método que eu uso pra encontrar a substituição certa de cabeça...

## Integração por chutar-e-testar (2)

Na verdade o método que eu uso pra encontrar a substituição que resolve esta integral definida,

$$\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x \, dx = ?$$

é este aqui...

$$[\text{TFC2}] \quad = \left( \int_{x=a}^{x=b} f'(x) \, dx = f(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

$$[\text{TFC2L}] \quad = \left( \int_{x=a}^{x=b} f'(x) \, dx \right)$$

$$[\text{TFC2L}] [f(x) := 42] \quad = \left( \int_{x=a}^{x=b} f'(x) \, dx \right)$$

$$[\text{TFC2L}] [f'(x) := 99] \quad = \left( \int_{x=a}^{x=b} 99 \, dx \right)$$

$$[\text{TFC2L}] \begin{bmatrix} f(x) := \sin x \\ f'(x) := \cos x \end{bmatrix} \quad = \left( \int_{x=a}^{x=b} \cos x \, dx \right)$$

$$[\text{TFC2L}] \begin{bmatrix} f(x) := \sin 4x \\ f'(x) := 4 \cos 4x \end{bmatrix} \quad = \left( \int_{x=a}^{x=b} 4 \cos 4x \, dx \right)$$

$$[\text{TFC2L}] \begin{bmatrix} f(x) := \frac{1}{4} \sin 4x \\ f'(x) := \cos 4x \end{bmatrix} \quad = \left( \int_{x=a}^{x=b} \cos 4x \, dx \right)$$

$$[\text{TFC2L}] \begin{bmatrix} f(x) := \frac{1}{4} \sin 4x \\ f'(x) := \cos 4x \\ a := 0 \\ b := \pi/2 \end{bmatrix} \quad = \left( \int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x \, dx \right)$$

$$[\text{TFC2}] \begin{bmatrix} f(x) := \frac{1}{4} \sin 4x \\ f'(x) := \cos 4x \\ a := 0 \\ b := \pi/2 \end{bmatrix} \quad = \left( \int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x \, dx = \left( \frac{1}{4} \sin 4x \right) \Big|_{x=0}^{x=\pi/2} \right)$$

...ou seja, eu começo encontrando a substituição certa. Tem vários jeitos de definir o que é a “substituição certa”.

Um jeito é dizer que a substituição que resolve esta problema aqui

$$\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x \, dx = ?$$

é a que obedece isto:

$$[\text{TFC2L}] \begin{bmatrix} f(x) := ? \\ f'(x) := ? \\ a := ? \\ b := ? \end{bmatrix} = \left( \int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x \, dx \right)$$

Um outro jeito é a gente começar aprendendo os métodos que o Stewart ensina, e depois a gente escrever isto aqui:

$$\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x \, dx = \left( \frac{1}{4} \sin 4x \right) \Big|_{x=0}^{x=\pi/2}$$

A “substituição certa” é a que a gente usa pra justificar essa igualdade. A justificativa dessa igualdade “Pelo [TFC2], com ...”, e a “substituição certa” é o que vem depois do “com”.

Todos os livros de Cálculo 2 que eu conheço supõem que os leitores são muito bons em “aplicar fórmulas complicadas em casos complicados”... Esse método super passo-a-passo de encontrar a substituição certa e aplicá-la é algo que eu inventei pra ajudar pessoas que tinham dificuldade com problemas de “aplicar fórmulas complicadas em casos complicados” – e eu só tive que inventar ele porque eu não encontrei nenhum livro que ensinasse como “aplicar fórmulas complicadas em casos complicados”.

Se você conhecer algum livro ou vídeo que ensine técnicas pra isso,

**PELAMORDEDEUS ME MOSTRE!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!**

# Cálculo C2 - 2023.2

Aulas 6 e 7: integração por partes e exercícios  
de como estruturar contas e demonstrações

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2023.2-C2.html>

## Links

[StewPtCap5p39](#) (p.360) 5.4 Integrais Indefinidas

[StewPtCap5p48](#) (p.369) 5.5 A Regra da Substituição

[StewPtCap7p5](#) (p.420) 7.1 Integração por Partes

[2hQ10](#) Quadros da aula 5 (3a, 05/set/2023)

[2hQ12](#) Quadros da aula 6 (4a, 06/set/2023)

[2hQ18](#) Quadros da aula 7 (2a, 11/set/2023)

[2gT10](#) Justificativas

[2gT117](#)  $\int_{t=a}^{t=x} f(t) dt$  no olhometro

[Leit2p15](#) (p.68): Dois exemplos de contas com justificativas

[CalcEasy14:08](#) até 18:18: como o macaco deriva funções elementares

[2fQ1](#) Quadros de 2022.2 sobre árvores

[2fT23](#) Outra definição para integral indefinida

[2fT26](#) Integração por partes em 2022.2: pedaços do quadro

[2fT30](#) Exercícios pra casa

[2gQ18](#) Quadros da aula 9 de 2023.1 (02/mai/2023)

## Avisos

Dá pra acessar a P1 do semestre passado, e as dicas pra ela, aqui:

[2gT107](#) (2023.1) Dicas pra P1

[2gT109](#) (2023.1) P1

A P1 deste semestre vai ter pelo menos uma questão de integração por mudança de variável e vai ter uma questão de frações parciais. Ela não vai ter uma questão de integração por partes porque eu vou considerar que integração por partes é uma técnica de integração que serve principalmente pra preparar a gente pra aprender técnicas mais complicadas.

Vocês podem estudar técnicas de integração por estes dois capítulos do Stewart:

[StewPtCap5](#) Integrais

[StewPtCap7](#) Técnicas de integração

Depois vou colocar aqui os links pras seções mais importantes.

Segundo o cronograma no plano de curso era pra eu ter apresentado frações parciais na última aula (6/set), mas eu não consegui. A gente vai deixar pra aprender frações parciais depois de mudança de variável.

Estudem pelo livro!!! O que a gente vai ver nas próximas aulas são coisas que complementam o livro e que vão ajudar vocês a não errarem nas questões da prova.

## Integração por partes: um exemplo

Lembre que o Mathologer diz no vídeo dele que o melhor modo da gente aprender Cálculo é começar escrevendo idéias que a gente acha que devem ser verdade, e depois a gente vê se elas dão resultados certos e se elas fazem sentido... e se fizerem sentido a gente tenta formalizar elas.

Ele também diz – a partir daqui, na “lombada número 1”,

**CalcEasy20:27**

que a integral é a inversa da derivada, mas que  $\int \cos x \, dx$  pode retornar tanto  $\sin x$  quanto  $42 + \sin x$ . As contas à direita são bem improvisadas, mas como eu indiquei em cima que elas são só uma idéia que pode estar cheia de erros o “colega que seja menos meu amigo” não vai poder reagir deste jeito aqui...

**2gT20**

**Exercício 0:**

Calcule  $\frac{d}{dx}(x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x)$ .

Idéia (que pode estar cheia de erros):

$$\begin{array}{ll}
 (gh)' & \stackrel{(1)}{=} g'h + gh' & \text{por [DProd]} \\
 \int (gh)' \, dx & \stackrel{(2)}{=} \int g'h + gh' \, dx \\
 gh & \stackrel{(3)}{=} \int g'h + gh' \, dx \\
 & \stackrel{(4)}{=} \int g'h \, dx + \int gh' \, dx & \text{por [IISoma]} \\
 gh & \stackrel{(5)}{=} \int g'h \, dx + \int gh' \, dx & \text{por 3 e 4} \\
 gh - \int g'h \, dx & \stackrel{(6)}{=} \int gh' \, dx & \text{por 5} \\
 & \stackrel{(7)}{=} gh - \int g'h \, dx & \text{por 6} \\
 \int x e^x \, dx & \stackrel{(8)}{=} x e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx & \text{por 7 com } \left[ \begin{array}{l} g:=x \\ h:=e^x \end{array} \right] \\
 & \stackrel{(9)}{=} x e^x - \int e^x \, dx \\
 & \stackrel{(10)}{=} x e^x - e^x & \text{por } (e^x)' = e^x \\
 \int x e^x \, dx & \stackrel{(11)}{=} x e^x - e^x & \text{por 8, 9 e 10} \\
 & \stackrel{(12)}{=} x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx & \text{por 7 com } \left[ \begin{array}{l} g:=x^2 \\ h:=e^x \end{array} \right] \\
 & \stackrel{(13)}{=} x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx & \text{por [IIMC]} \\
 & \stackrel{(14)}{=} x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) & \text{por 11} \\
 & \stackrel{(15)}{=} x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x
 \end{array}$$

## Três provas da regra da integral da soma

$$\begin{aligned} \text{Sejam: } \quad [\text{DSoma}] &= ((f+g)' = f' + g'), \\ &\stackrel{[\text{II}]}{=} \left( \int f' dx = f \right), \\ [\text{ISoma}] &= \left( \int f + g dx = \int f dx + \int g dx \right) \\ \text{e: } \quad [\text{TFC1}] &= \left( \left( \int_{t=a}^{t=x} f(t) dt \right)' = f(x) \right), \end{aligned}$$

$$\text{Queremos ver que } \int f + g dx = \int f dx + \int g dx.$$

Compare esta prova aqui, que é bem passo a passo e que tem justificativas bem detalhadas,

$$\begin{aligned} \text{Digamos que} \quad F' &\stackrel{(1)}{=} f \\ \text{e} \quad G' &\stackrel{(2)}{=} g. \\ \text{Então} \quad (F+G)' &\stackrel{(3)}{=} F' + G' && \text{por } [\text{DSoma}] \left[ \begin{matrix} f:=F' \\ g:=G' \end{matrix} \right] \\ &\stackrel{(4)}{=} f + G' && \text{por 1} \\ &\stackrel{(5)}{=} f + g, && \text{por 2} \\ (F+G)' &\stackrel{(6)}{=} f + g, && \text{por 3, 4 e 5} \\ \int f dx &\stackrel{(7)}{=} \int F' dx && \text{por 1} \\ &\stackrel{(8)}{=} F, && \text{por } [\text{II}] \left[ \begin{matrix} f:=F' \\ f':=F \end{matrix} \right] \\ \int f dx &\stackrel{(9)}{=} F, && \text{por 7 e 8} \\ \int g dx &\stackrel{(10)}{=} \int G' dx && \text{por 2} \\ &\stackrel{(11)}{=} G, && \text{por } [\text{II}] \left[ \begin{matrix} f:=G' \\ f':=G \end{matrix} \right] \\ \int g dx &\stackrel{(12)}{=} G, && \text{por 10 e 11} \\ \int f + g dx &\stackrel{(13)}{=} \int (F+G)' dx && \text{por 6} \\ &\stackrel{(14)}{=} F + G && \text{por } [\text{II}] \left[ \begin{matrix} f:=F+G \\ f':=(F+G)' \end{matrix} \right] \\ &\stackrel{(15)}{=} \int f dx + G && \text{por 9} \\ &\stackrel{(16)}{=} \int f dx + \int g dx && \text{por 12} \\ \int f + g dx &\stackrel{(17)}{=} \int f dx + \int g dx && \text{por 13, 14, 15, 16} \end{aligned}$$

...com esta outra aqui,

$$\begin{aligned} \text{Digamos que} \quad F' &\stackrel{(1)}{=} f \\ \text{e} \quad G' &\stackrel{(2)}{=} g. \\ \text{Então} \quad (F+G)' &\stackrel{(3)}{=} F' + G' && \text{por } [\text{DSoma}] \\ &\stackrel{(4)}{=} f + g, && \text{por 1 e 2} \\ \int f dx &\stackrel{(5)}{=} F, && \text{por 1 e } [\text{II}] \\ \int g dx &\stackrel{(6)}{=} G, && \text{por 2 e } [\text{II}] \\ \int f + g dx &\stackrel{(7)}{=} \int (F+G)' dx && \text{por 3 e 4} \\ &\stackrel{(8)}{=} F + G && \text{por } [\text{II}] \\ &\stackrel{(9)}{=} \int f dx + \int g dx && \text{por 5 e 6} \end{aligned}$$

e com esta aqui:

$$\begin{aligned} \text{Sabemos que} \quad \left( \int_{t=a}^{t=x} f(t) dt \right)' &\stackrel{(1)}{=} f(x) && \text{por } [\text{TFC1}] \\ \text{e} \quad \left( \int_{t=a}^{t=x} g(t) dt \right)' &\stackrel{(2)}{=} g(x). && \text{por } [\text{TFC1}] \\ \text{Sejam:} \quad F(x) &\stackrel{(3)}{=} \int_{t=a}^{t=x} f(t) dt, \\ G(x) &\stackrel{(4)}{=} \int_{t=a}^{t=x} g(t) dt. \\ \text{Então:} \quad F' &\stackrel{(5)}{=} f, && \text{por 1 e 3} \\ G' &\stackrel{(6)}{=} g, && \text{por 2 e 4} \\ (F+G)' &\stackrel{(7)}{=} F' + G' && \text{por } [\text{DSoma}] \\ &\stackrel{(8)}{=} f + g, && \text{por 5 e 6} \\ \int f dx &\stackrel{(9)}{=} F, && \text{por 5 e } [\text{II}] \\ \int g dx &\stackrel{(10)}{=} G, && \text{por 6 e } [\text{II}] \\ \int f + g dx &\stackrel{(11)}{=} \int (F+G)' dx && \text{por 7 e 8} \\ &\stackrel{(12)}{=} F + G && \text{por } [\text{II}] \\ &\stackrel{(13)}{=} \int f dx + \int g dx && \text{por 9 e 10.} \end{aligned}$$

## “Escreva as justificativas”

Lembre que eu chamei a regra da multiplicação por constante na derivada de [DMC] e a regra da soma na derivada de [DSoma]. Vou usar estes nomes curtos aqui pra regra da multiplicação por constante na integral indefinida e pra regra da soma na integral indefinida:

$$\begin{aligned} \text{[IMC]} &= \int cf \, dx = c \int f \, dx \\ \text{[ISoma]} &= \int (f + g) \, dx = \int f \, dx + \int g \, dx \end{aligned}$$

Nos exercícios 1 e 2 abaixo o contexto vai ser este aqui:

$$\begin{aligned} \text{Sejam: [DMC]} &= ((cf)' = cf'), \\ \text{[II]} &= \left( \int f' \, dx = f \right), \\ \text{e: [TFC1]} &= \left( \left( \int_{t=a}^{t=x} f(t) \, dt \right)' = f(x) \right). \end{aligned}$$

$$\text{Queremos ver que } \int cf \, dx = c \int f \, dx.$$

### Exercício 1.

Escreva as justificativas “completas” de cada passo da demonstração abaixo – aliás, só dos passos que têm um “por ...” à direita. Uma justificativa “completa” é uma em que a gente diz as substituições, como aqui: [II]  $\left[ \begin{smallmatrix} f:=42h \\ f':=42h' \end{smallmatrix} \right]$ .

$$\begin{aligned} \text{Digamos que } & F' \stackrel{(1)}{=} f, \\ \text{Então: } & \int F' \, dx \stackrel{(2)}{=} F, & \text{por ...} \\ & \int f \, dx \stackrel{(3)}{=} F, & \text{por ...} \\ & (cF)' \stackrel{(4)}{=} cF' & \text{por ...} \\ & \stackrel{(5)}{=} cf, & \text{por ...} \\ & (cF)' \stackrel{(6)}{=} cf, & \text{por ...} \\ & \int cf \, dx \stackrel{(7)}{=} \int (cF)' \, dx & \text{por ...} \\ & \stackrel{(8)}{=} cF & \text{por ...} \\ & \stackrel{(9)}{=} c \int f \, dx & \text{por ...} \\ & \int cf \, dx \stackrel{(10)}{=} c \int f \, dx & \text{por ...} \end{aligned}$$

### Exercício 2.

Escreva as justificativas dos passos que têm um “por ...” na demonstração abaixo. Aqui você não precisa escrever as substituições – você pode escrever “por [II]” ao invés de “por [II]  $\left[ \begin{smallmatrix} f:=42h \\ f':=42h' \end{smallmatrix} \right]$ ”.

$$\begin{aligned} \text{Sabemos que } & \left( \int_{t=a}^{t=x} f(t) \, dt \right)' \stackrel{(1)}{=} f(x) & \text{por ...} \\ \text{Seja } & F(x) \stackrel{(2)}{=} \int_{t=a}^{t=x} f(t) \, dt. \\ \text{Então: } & F' \stackrel{(3)}{=} f, & \text{por ...} \\ & (cF)' \stackrel{(4)}{=} cf, & \text{por ...} \\ & \int cf \, dx \stackrel{(5)}{=} cF & \text{por ...} \\ & \stackrel{(6)}{=} c \int f \, dx & \text{por ...} \end{aligned}$$

## “Escreva as justificativas” (2)

É muito comum os livros escreverem demonstrações de um jeito super curto e super difícil de entender. As duas técnicas mais básicas pra gente decifrar essas demonstrações super curtas são 1) testar casos particulares e 2) reescrever elas com mais passos de modo que cada passo da versão expandida fique fácil de justificar. Nos exercícios desta página você vai exercitar a técnica (2).

Uma das fórmulas mais úteis – e mais difíceis de entender – de Cálculo 2 é essa aqui, a da mudança de variável na integral indefinida:

$$[\text{MVI}] = \left( \int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du \right)$$

Ela tem uma demonstração curta que eu levei mais de 20 anos pra entender e uma demonstração mais comprida em que os passos são bem mais fáceis de justificar. O Stewart e o Miranda mostram a demonstração curta nestas páginas daqui:

[StewPtCap5p48](#) (p.369) 5.5 A Regra da Substituição

[MirandaP189](#) 6.2 Integração por substituição

e uma versão da demonstração mais comprida nestas páginas:

[MirandaP230](#) 7.6 Integração por Substituição na Integral Definida

[StewPtCap5p51](#) (p.372) Regra da Substituição para as integrais definidas

Você vai precisar de muitos chutes e testes pra resolver os dois exercícios desta página, e você provavelmente não vai conseguir resolvê-los num dia só... mas eles vão te ajudar com questões que vão valer muitos pontos nas provas!

### Exercício 3.

Reescreva a demonstração abaixo com mais passos e com justificativas completas; repare que nela está implícito que  $F' = f$ . Lembre que você pode acrescentar passos no início!

$$\begin{aligned} \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx &= F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} \\ &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= F(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ &= \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \end{aligned}$$

### Exercício 4.

Faça a mesma coisa aqui:

$$\begin{aligned} \int f(g(x))g'(x) dx &= F(g(x)) \\ &= F(u) \\ &= \int f(u) du \end{aligned}$$

**Dica:** refaça os exercícios 3 e 4 várias vezes em dias diferentes até você conseguir refazê-los sem errar muito e sem demorar muito... eles vão te ajudar a entender porque é que a gente não pode misturar a variável antiga e a nova na mesma integral. Releia esta história aqui, [2gT11](#), trate estes exercícios como exercícios de música, e seja como o Bob!

## Expandindo as contas do $\int (\sin \theta)^3 (\cos \theta)^5 d\theta$

$$[\text{MVI}] \quad = \left( \int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du \right)$$

$$[\text{MVI}] \begin{bmatrix} g(x) := \sin x \\ g'(x) := \cos x \end{bmatrix} = \left( \int f(\sin x) \cos x dx = \int f(u) du \right)$$

$$[\text{MVI}] \begin{bmatrix} g(x) := \sin x \\ g'(x) := \cos x \\ f(u) := u^2(1-u^2)^2 \end{bmatrix} = \left( \int (\sin x)^3 (1 - (\sin x)^2)^2 \cos x dx = \int u^2(1-u^2)^2 du \right)$$

$$[\text{MVI3}] = \left( \begin{array}{l} \int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) \\ \phantom{\int f(g(x))g'(x) dx} = F(u) \\ \phantom{\int f(g(x))g'(x) dx} = \int f(u) du \end{array} \right)$$

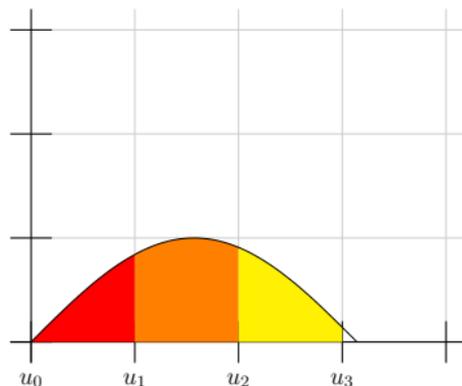
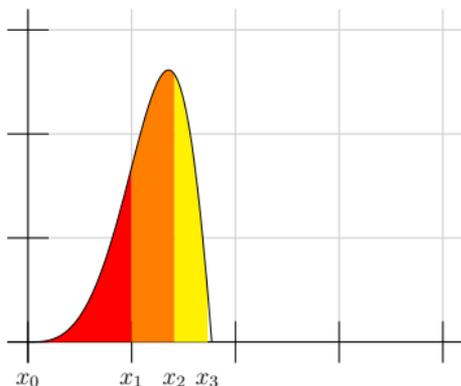
$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := \sin x \\ g'(x) := \cos x \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{l} \int f(\sin x) \cos x dx = F(\sin x) \\ \phantom{\int f(\sin x) \cos x dx} = F(u) \\ \phantom{\int f(\sin x) \cos x dx} = \int f(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := \sin x \\ g'(x) := \cos x \\ f(u) := u^2(1-u^2)^2 \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{l} \int (\sin x)^3 (1 - (\sin x)^2)^2 \cos x dx = F(\sin x) \\ \phantom{\int (\sin x)^3 (1 - (\sin x)^2)^2 \cos x dx} = F(u) \\ \phantom{\int (\sin x)^3 (1 - (\sin x)^2)^2 \cos x dx} = \int u^2(1-u^2)^2 du \end{array} \right)$$

## Uma figura pra mudança de variável

$$x^2 = u$$

$$\int_{x=a}^{x=b} \text{sen}(x^2) \cdot 2x \, dx = \int_{u=a^2}^{u=b^2} \text{sen } u \, du$$



## O macaco e as contas formais

Na aula de 25/abril nós passamos muito tempo revendo coisas que deveriam ser básicas – já vou dizer quais – e eu passei um dever de casa bem grande: *leia o que você conseguir das seções do Miranda e do Leithold sobre a regra da cadeia e faça todos os exercícios que você puder*. Aqui tem links pra elas:

**Miranda87** Seção 3.5: regra da cadeia

**Miranda228** Seção 7.5.1: TFC2

**Leit3p45** (p.181) Seção 3.6: regra da cadeia

**Leit5p61** (p.344) Seção 5.8: Os teoremas fundamentais do Cálculo

Lembre que: 1) um dos objetivos do curso é fazer vocês se tornarem capazes de estudar pelos livros, 2) as provas vão ter várias questões que vocês só vão conseguir fazer se vocês tiverem muita prática de fazer contas, e 3) o livro do Leithold é difícil em alguns lugares mas ele é INCRIVELMENTE bom – estudem por ele sempre que puderem!

Outra coisa: dê uma olhada na seção do Miranda sobre a regra da cadeia – você vai ver que essa fórmula tem uma demonstração, e que a fórmula e a demonstração só funcionam quando certas hipóteses são obedecidas. Aliás, uma questão da P1 do semestre passado foi sobre situações em que a fórmula do TFC2 dá resultados errados. Dê uma olhada nela:

**2FT110** A fórmula do TFC2 nem sempre vale

*A P1 deste semestre vai ter uma questão parecida com essa.*

Em algumas situações nós vamos primeiro aplicar a fórmula como se ela valesse sempre, e só depois que nós fizermos todas as contas nós vamos descobrir quais são as hipóteses necessárias pra aquelas contas valerem. O nome “oficial” pra essas contas sem a verificação das hipóteses é “contas formais”, mas eu vou usar a terminologia do Mathologer... ele fala muito no macaco que faz contas automaticamente sem fazer a menor idéia do que aquelas contas querem dizer, então eu vou usar expressões como “aqui vamos fazer contas como o macaco”.

### Exercício

Use o que você lembra de Cálculo 1 pra obter boas fórmulas pras derivadas abaixo:

- a)  $\frac{d}{dx} e^{g(x)}$
- b)  $\frac{d}{dx} g(x)^{1/2}$
- c)  $\frac{d}{dx} \sqrt{g(x)}$
- c)  $\frac{d}{dx} f(4x)$

No próximo slide nós vamos ver como o macaco faz essas contas usando a operação “[:=]”.

## Diferença

Lembre que esta notação aqui

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx$$

tem várias pronúncias:

“a integral da função  $f(x)$  entre  $x = a$  e  $x = b$ ”,  
 “a área sob a curva  $f(x)$  entre  $x = a$  e  $x = b$ ”,  
 “a área sob a curva  $f(x)$  desde  $x = a$  até  $x = b$ ”,  
 etc...

A pronúncia desta operação daqui

$$f(x)|_{x=a}^{x=b}$$

vai ser “a diferença da  $f(x)$  entre  $x = a$  e  $x = b$ ”,  
 e a definição formal dela vai ser esta:

$$f(x)|_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a)$$

### Exercício

O Leithold e o Miranda usam notações ligeiramente diferentes da minha para a operação diferença. Dê uma olhada nestas páginas aqui,

[Leit5p65](#) p.348

[Miranda344](#)

e traduza a expressão

$$(\sin 2x)|_{x=3}^{x=4}$$

da minha notação para

- a) a notação do Miranda,
- b) a notação do Leithold.

## Integral indefinida

Tanto o Leithold quanto o Miranda explicam a *integral indefinida* antes da *integral definida*. Dê uma olhada:

Miranda181 6. Integral Indefinida

Miranda207 7. Integração definida

Leit5p3 (p.286) 5.1. Antidiferenciação

Leit5p41 (p.324) 5.5. A integral definida

StewPtCap5p40 (p.361) A primitiva mais geral de  $1/x^2$

*Todos os modos fáceis de atribuir um significado intuitivo para expressões como esta aqui*

$$\int f(x) dx$$

*são gambiarras que funcionam mal.*

Eu vou usar esta definição aqui,

2fT23 (p.4) Outra definição para a integral indefinida

e aqui tem um caso em que a definição usual quebra:

2fT24 (p.5) Meme: expanding brain, versão ln

Nós vamos começar usando a integral indefinida como o macaco que faz contas sem ter idéia do significado do que está fazendo, e só depois que tivermos bastante prática nós vamos discutir os vários jeitos de atribuir significados intuitivos para

A regra básica vai ser esta aqui:

$$[\text{II}] = \left( \int f'(x) dx = f(x) \right)$$

### Exercícios

Calcule:

a) [II]  $\begin{bmatrix} f(x) := x + 42 \\ f'(x) := 1 \end{bmatrix}$

b) [II]  $\begin{bmatrix} f(x) := \frac{1}{2}x^2 \\ f'(x) := x \end{bmatrix}$

c) Resolva os exercícios 1 a 10 daqui por chutar e testar:

Miranda185 Exercícios 6.1

d) Entenda tudo que esta nesta página:

Leit5p6 (p.289) 5.1.8. Teorema

## Outra definição pra integral indefinida

O Leithold, e a maioria dos livros, usam uma definição bem complicada pra  $\int 2x dx \dots$  pra eles  $\int 2x dx$  é o conjunto de todas as ‘ $f$ ’s que obedecem isto aqui:

$$f'(x) = 2x$$

e  $x^2 + C$  é o conjunto de todas as ‘ $g$ ’s que são “da forma  $x^2 + C$ ” para algum  $C \in \mathbb{R}$ , e pra ele esta igualdade

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

quer dizer: o conjunto de funções  $\int 2x dx$  é igual ao conjunto de funções  $x^2 + C$ .

Nós vamos usar uma **outra definição** pra igualdades como esta,

$$\int f(x) dx = g(x),$$

que é a seguinte: as três igualdades abaixo vão ser equivalentes pra nós,

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &\stackrel{?}{=} g(x) \\ \frac{d}{dx} \int f(x) dx &\stackrel{?}{=} g'(x) \\ f(x) &\stackrel{?}{=} \frac{d}{dx} g(x) \end{aligned}$$

Essa tradução vai servir pra qualquer igualdade com integrais, e ela vai nos permitir testar facilmente se uma igualdade com integrais é verdadeira ou não. Por exemplo, digamos que o macaco integrador do Mathologer tem estas integrais na tabela de integrais dele:

$$\begin{aligned} \int x dx &= \frac{1}{2}x^2 + 3 \\ \int 2x dx &= x^2 + 42 \end{aligned}$$

Então dá pra testar esta igualdade

$$\int 2x dx = 2 \int x dx + 99$$

assim:

$$\begin{aligned} \int 2x dx &\stackrel{?}{=} 2 \int x dx + 99 \\ \frac{d}{dx} \underbrace{\int 2x dx}_{x^2+42} &\stackrel{?}{=} \frac{d}{dx} \underbrace{(2 \int x dx + 99)}_{\frac{1}{2}x^2+3} \\ &\qquad\qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{x^2+6} \\ &\qquad\qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{x^2+105} \\ &\qquad\qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{2x} \end{aligned}$$

ou seja, a igualdade acima é verdadeira — e a gente conseguiu testar isso usando números “concretos” ao invés de ‘ $+C$ ’s! Yesss!!! =)

## Meme: expanding brain, versão ln

Na definição do Leithold a fórmula

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \text{ é } \mathbf{FALSA!!!}$$

A fórmula certa é a que aparece na quarta linha desse meme aqui:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} dx &= \ln x \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| + C \\ \int \frac{1}{x} dx &= \begin{cases} \ln |x| + C_1 & \text{quando } x < 0, \\ \ln |x| + C_2 & \text{quando } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$



Esse vídeo aqui mostra como é que o  $C_1$

“ajusta a altura da parte esquerda” e o  $C_2$

“ajusta a altura da parte direita” do gráfico:

<http://www.youtube.com/watch?v=u4kex7hDC2o#t=5m25s>

## Integração por partes

Vou usar isto, de 2022.2:

[2fT25](#) (p.6) Pedacos do quadro

E:

[Leit9](#) 9. Técnicas de integração

[Leit9p4](#) (p.531) 9.1. Integração por partes

[Miranda182](#) 6.1.1 Regras Básicas de Integração

[Miranda199](#) 6.3 Integração por partes

Ainda não  $\LaTeX$ ei as contas desta aula!

Mas os quadros dela – os sobre integração por partes –  
estão aqui: [2gQ20](#).

$$\text{[TFC2]} \quad \stackrel{(1)}{=} \left( \int_{x=a}^{x=b} f'(x) dx = f(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

$$\text{[TFC2]} \quad \left[ \begin{array}{l} f(x):=3 \\ f'(x):=0 \\ a:=2 \\ b:=5 \end{array} \right] \stackrel{(2)}{=} \left( \int_{x=2}^{x=5} 0 dx = 3 \Big|_{x=2}^{x=5} \right)$$

$$\text{[TFC2]} \quad \left[ \begin{array}{l} f(x):=4 \\ f'(x):=0 \\ a:=2 \\ b:=5 \end{array} \right] \stackrel{(3)}{=} \left( \int_{x=2}^{x=5} 0 dx = 4 \Big|_{x=2}^{x=5} \right)$$

$$3 \Big|_{x=2}^{x=5} \stackrel{(4)}{=} \int_{x=2}^{x=5} 0 dx$$

$$\stackrel{(5)}{=} 4 \Big|_{x=2}^{x=5}$$

$$3 \Big|_{x=2}^{x=5} \stackrel{(6)}{=} 4 \Big|_{x=2}^{x=5}$$

$$\text{[II]} \quad \stackrel{(7)}{=} (f f'(x) dx = f(x))$$

$$\text{[II]} \quad \left[ \begin{array}{l} f(x):=3 \\ f'(x):=0 \\ a:=2 \\ b:=5 \end{array} \right] \stackrel{(8)}{=} (f 0 dx = 3)$$

$$\text{[II]} \quad \left[ \begin{array}{l} f(x):=4 \\ f'(x):=0 \\ a:=2 \\ b:=5 \end{array} \right] \stackrel{(9)}{=} (f 0 dx = 4)$$

$$3 \stackrel{(10)}{=} \int 0 dx$$

$$\stackrel{(11)}{=} 4$$

$$3 \stackrel{(12)}{=} 4$$

$$\begin{aligned}
\text{[IIMC}_2\text{]} &= \left( \int cg'(x) dx = cg(x) \right. \\
&= \left. c \int g'(x) dx \right) \\
\text{[IIMC}_1\text{]} &= \left( \int cg'(x) dx = c \int g'(x) dx \right) \\
\text{[IIMC]} &= \left( \int ch(x) dx = c \int h(x) dx \right) \\
\text{[IIMC}_2\text{]} \left[ \begin{array}{l} g(x) := \int_{t=a}^{t=x} h(x) dt \\ g'(x) := h(x) \end{array} \right] &= \left( \int ch(x) dx = c \left( \int_{t=a}^{t=x} h(x) dt \right) \right. \\
&= \left. c \int h(x) dx \right) \\
\text{[IIMC}_2\text{]} \left[ \begin{array}{l} g(x) := H(x) \\ g'(x) := h(x) \end{array} \right] &= \left( \int ch(x) dx = cH(x) \right. \\
&= \left. c \int h(x) dx \right) \\
\text{[IIMC}_1\text{]} \left[ \begin{array}{l} g(x) := H(x) \\ g'(x) := h(x) \end{array} \right] &= \left( \int ch(x) dx = c \int h(x) dx \right) \\
\text{[IIMC}_1\text{]} [g'(x) := h(x)] &= \left( \int ch(x) dx = c \int h(x) dx \right)
\end{aligned}$$

$$\text{StewPtCap5p33 (p.354): } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$\text{StewPtCap5p39 (p.360): } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \Big|_a^b$$

# Propriedades da integral indefinida

StewPtCap5p40 (p.361) Propriedades da integral indefinida

## Contas fáceis e difíceis

Quando a gente pede pro Maxima “calcule  $2+3$ ” ele responde ‘5’; ele está nos dizendo que  $2+3=5$ . Mas quando a gente pede pra ele “calcule 5” ele responde ‘5’, e não ‘ $2+3$ ’... ou seja, ele nos diz que ‘ $5=5$ ’, não que ‘ $5=2+3$ ’..

Nesses casos o que está antes do ‘=’ é a expressão “antes” – a expressão original, que nós demos pro Maxima – e o que está à direita do ‘=’ é a expressão “depois” – o resultado do Maxima calcular a expressão original e simplificá-la o máximo que ele consegue.

Em casos como esse o ‘=’ quer dizer “o resultado de **calcular** a expressão da esquerda é a expressão da direita”, ou “o resultado de **simplificar** a expressão da esquerda é expressão da direita”.

Estes dois capítulos do “Maxima Workbook” explicam em detalhes excruciantes como o Maxima “calcula” e “simplifica” expressões:

**MaximaWorkbookP96** (p.76) 11. Evaluation

**MaximaWorkbookP101** (p.81) 12. Simplification

aaa

$f(x)$	$c$	$x^n$	$\sin x$	$\cos x$	$\ln x$	$e^x$	$\dots$
$f(x)$	$0$	$nx^{n-1}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{x}$	$e^x$	$\dots$



$$\begin{aligned}
 + & (f+g)' = f'+g' \\
 - & (f-g)' = f'-g' \\
 \times & (fg)' = f'g+fg' \\
 \div & \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{SUB } (f(g))' = f'(g)g'$$



- $c' \Rightarrow 0$
- $(x^n)' \Rightarrow nx^{n-1}$
- $\sin x \Rightarrow \cos x$
- $\cos x \Rightarrow -\sin x$
- $\ln x \Rightarrow \frac{1}{x}$
- $e^x \Rightarrow e^x$
- $(f+g)' \Rightarrow f'+g'$
- $(f-g)' \Rightarrow f'-g'$
- $(fg)' \Rightarrow f'g+fg'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' \Rightarrow \frac{f'g-fg'}{g^2}$
- $(f(g))' \Rightarrow f'(g)g'$



# Cálculo C2 - 2023.2

Aula 9: teste de nivelamento  
(duração 15 mins, 13/set/2023)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF  
<http://anggtwu.net/2023.2-C2.html>

### As perguntas

Calculem:

$$\frac{d}{dx} f(\text{sen}(x^4) + \ln x)$$

e digam em que semestre vocês passaram em Cálculo 1  
e com quem vocês fizeram.

### Links

2hQ24 Quadro com a questão

2hQ25 Quadro com a solução

### Alguns chutes e testes

$$\text{[RC]} \quad = \left( \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

$$\text{[RC]} \begin{cases} g(x) := \text{sen}(x^4) \\ g'(x) := \frac{d}{dx} \text{sen}(x^4) \end{cases} = \left( \frac{d}{dx} f(\text{sen}(x^4)) = f'(\text{sen}(x^4)) \frac{d}{dx} \text{sen}(x^4) \right)$$

$$\text{[RC]} \begin{cases} g(x) := (\text{sen}(x^4) + \ln x) \\ g'(x) := \frac{d}{dx} (\text{sen}(x^4) + \ln x) \end{cases} = \left( \frac{d}{dx} f(\text{sen}(x^4) + \ln x) = f'(\text{sen}(x^4) + \ln x) \frac{d}{dx} (\text{sen}(x^4) + \ln x) \right)$$

### A solução

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(\text{sen}(x^4) + \ln x) &= f'(\text{sen}(x^4) + \ln x) \frac{d}{dx} (\text{sen}(x^4) + \ln x) \\ &= f'(\text{sen}(x^4) + \ln x) \left( \frac{d}{dx} \text{sen}(x^4) + \frac{d}{dx} \ln x \right) \\ &= f'(\text{sen}(x^4) + \ln x) \left( \cos(x^4) \frac{d}{dx} x^4 + \frac{1}{x} \right) \\ &= f'(\text{sen}(x^4) + \ln x) \left( \cos(x^4) \cdot 4x^3 + \frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

# Cálculo C2 - 2023.2

Aulas 8 a 11: mudança de variáveis

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2023.2-C2.html>

## Links

Links da aula 8:

[2hQ21](#) Quadros da aula 8 (4a, 12/set/2023)  
[StewPtCap5p39](#) (p.360) 5.4 Integrais Indefinidas  
[StewPtCap5p48](#) (p.369) 5.5 A Regra da Substituição  
[StewPtCap7p5](#) (p.420) 7.1 Integração por Partes  
[2gT45](#) (2023.1) Mudança de variável: exemplo  
[2gT46](#) (2023.1) Mudança de variável: caixinhas

Mudança de variável na integral definida (MVD):

[2eT131](#) (t-ints, p.12) Uma figura pra mudança de variável  
[Thomas55p11](#) (p.376) Theorem 5: Substitution in definite integrals  
[2fT49](#) Meu PDF de 2022.2 sobre mudança de variáveis

Mudança de variável na integral indefinida (MVI):

[2eT133](#) (t-ints, p.14) Um exemplo com contas  
[2eT135](#) (t-ints, p.16) Outro exemplo com contas  
[Thomas55p3](#) (p.370) Theorem 5: The substitution rule  
[Leit5p13](#) (p.296) A regra da cadeia para a antidiferenciação  
[Leit9p10](#) (p.537) Integração de potências de sen e cos  
[Miranda189](#) 6.2. Integração por substituição  
[Miranda192](#) Exemplo 6.6  
[Miranda193](#) Não podemos  
[Miranda196](#) Exercícios  
[Miranda255](#) 8.3 Integrais Trigonométricas

Vídeo do Reginaldo:

<https://www.youtube.com/watch?v=PTCUjrEBc4g>

Alguns quadros de 2023.1:

[2gQ22](#) Quadros da aula 10 (05/maio/2023)  
[2gQ24](#) Quadros da aula 11 (09/maio/2023)  
[2gQ26](#) Quadros da aula 12 (12/maio/2023)  
[2gQ28](#) Quadros da aula 13 (16/maio/2023)

## Introdução

O Stewart explica o truque da mudança de variável na integral usando *variáveis dependentes* e *diferenciais*. Por exemplo, se  $x$  é a variável independente,  $u$  é a variável dependente, e a relação entre elas é  $u = g(x) = 2x$ , então temos

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}2x = 2$$

e:

$$\int \underbrace{\text{sen}\left(\underbrace{2x}_u\right)}_u \underbrace{2}_{\frac{du}{dx}} dx = \int \text{sen}(u) du$$

Dê uma olhada:

**StewPtCap1p5** (p.10) variável dependente

**StewPtCap3p75** (p.228) Diferenciais

**StewPtCap5p39** (p.360) 5.4 Integrais Indefinidas

**StewPtCap5p48** (p.369) 5.5 A Regra da Substituição

Só que contas com variáveis dependentes e diferenciais são difíceis de justificar formalmente! A gente viu como expandir contas curtas em que certos passos têm justificativas complicadas em contas maiores mas em que cada passo tem uma justificativa bem simples... se a gente tenta fazer isso com a igualdade entre integrais acima a gente acaba descobrindo que as regras pra variáveis dependentes e diferenciais são bem complicadas.

Então eu vou fazer o seguinte. A regra da mudança de variável na integral definida, que o Stewart explica nesta página,

**StewPtCap5p51** (p.372) ...para as integrais definidas é bem fácil de demonstrar usando só o **[TFC2]**.

Eu vou usar estas quatro definições aqui – onde **[MVD]** é a fórmula pra mudança de variável na integral definida, **[MVI]** é a fórmula pra mudança de variável na integral indefinida, **[MVD4]** é uma demonstração da **[MVD]** com 4 igualdades **[MVI3]** é uma demonstração da **[MVI]** com 3 igualdades,

$$\begin{aligned} \text{[MVD]} &= \left( \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \right) \\ \text{[MVI]} &= \left( \int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du \right) \\ \text{[MVD4]} &= \left( \begin{aligned} \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx &= F(g(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= F(u) \Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ &= \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \end{aligned} \right) \\ \text{[MVI3]} &= \left( \begin{aligned} \int f(g(x))g'(x) dx &= F(g(x)) \\ &= F(u) \\ &= \int f(u) du \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

e a gente vai ver que dá pra tratar algumas destas fórmulas e demonstrações como abreviações pras outras, e que dá pra expandir as versões mais abreviadas em outras em que os passos são mais fáceis de justificar.

## Um exemplo

Isto aqui é um exemplo de como contas com mudança de variável costumam ser feitas na prática:

$$\begin{aligned}
 & \int 2 \cos(3x + 4) dx \\
 &= \int 2(\cos u) \cdot \frac{1}{3} du \\
 &= \frac{2}{3} \int \cos u du \\
 &= \frac{2}{3} \operatorname{sen} u \\
 &= \frac{2}{3} \operatorname{sen}(3x + 4)
 \end{aligned}$$

É necessário indicar em algum lugar que a relação entre a variável nova e a antiga é esta:  $u = 3x + 4$ .

Compare as contas acima, que não têm nem os limites de integração nem as barras de diferença, com as da coluna da direita:

$$\begin{aligned}
 & \int_{x=a}^{x=b} 2 \cos(3x + 4) dx \\
 &= \int_{u=3a+4}^{u=3b+4} 2(\cos u) \cdot \frac{1}{3} du \\
 &= \frac{2}{3} \int_{u=3a+4}^{u=3b+4} \cos u du \\
 &= \frac{2}{3} \left( (\operatorname{sen} u) \Big|_{u=3a+4}^{u=3b+4} \right) \\
 &= \frac{2}{3} \left( (\operatorname{sen}(3x + 4)) \Big|_{x=a}^{x=b} \right)
 \end{aligned}$$

Nós vamos tratar a versão à esquerda como uma abreviação pra versão da direita. Note que pra ir da versão “completa” pra “abreviada” é super fácil, é só apagar os limites de integração e as barras de diferença – mas pra ir da versão “abreviada” pra “completa” a gente precisa reconstruir os limites de integração e as barras de diferença, o que é bem mais difícil.

## Caixinhas de anotações

O meu truque preferido pra não me enrolar nas contas de uma mudança de variável é fazer uma caixinha de anotações como essa aqui,

$$\left[ \begin{array}{l} u = 3x + 4 \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(3x + 4) = 3 \\ \frac{du}{dx} = 3 \\ du = 3 dx \\ dx = \frac{1}{3} du \end{array} \right]$$

na qual: a) a primeira linha diz a relação entre a variável antiga e a variável nova – que nesse exemplo é  $u = 3x + 4$ , b) todas as outras linhas da caixinha são consequências dessa primeira, e c) dentro da caixinha a gente permite gambiarras como:

$$dx = 42 du$$

Durante quase todo o curso de C2 a gente vai tratar esse tipo de coisa como uma igualdade entre expressões incompletas – mais ou menos como se a gente estivesse dizendo isso aqui:

$$+20) = /99]$$

Na caixinha à esquerda eu colori as linhas que são gambiarras em vermelho.

Repare que se a gente soubesse usar diferenciais a gente saberia dar um sentido pras igualdades que envolvem diferenciais, e que eu marquei em vermelho... mas a gente não sabe, então a gente vai considerar que elas são gambiarras que a gente só vai entender direito em Cálculo 3.

Aqui tem um exemplo grande:

**2fT112** (C2-P1, p.5) Questão 1: gabarito

## Os detalhes horríveis

Nesta página aqui – [Miranda193](#) – o Miranda diz “Não podemos calcular uma integral que possui tanto um  $x$  e um  $u$  nela”, mas ele não explica porquê... se em

$$\int_{x=a}^{x=b} 2 \cos(u) dx$$

esse  $u$  fosse uma abreviação para  $3x + 4$  essa integral acima seria equivalente à do início do slide anterior, né?... =(

Neste slide eu vou tentar contar o que eu sei sobre como o método da substituição funciona – *pra convencer vocês de que não vale a pena vocês tentarem entender os detalhes agora.*

Toda mudança de variável numa integral definida é consequência da igualdade (13) do slide “Contas (2)”. Por exemplo, compare:

$$\begin{aligned} \int_{x=a}^{x=b} g(h(x))h'(x) dx &= \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g(u) du \\ \int_{x=a}^{x=b} 2 \cos(3x+4) dx &= \int_{u=3a+4}^{u=3b+4} 2(\cos u) \cdot \frac{1}{3} du \end{aligned}$$

A gente pode tentar descobrir qual é a substituição certa passo a passo, começando pelas funções mais simples.... eu faria assim: olhando pra parte direita eu chuto que  $g(u) = 2(\cos u) \cdot \frac{1}{3}$ ; olhando pra parte esquerda eu chuto que  $h(x) = 3x + 4$ , e daí  $h'(x) = 3$ ; aí eu testo esta substituição aqui,

$$(13) \begin{bmatrix} g(u) := 2(\cos u) \cdot \frac{1}{3} \\ h(x) := 3x + 4 \\ h'(x) := 3 \end{bmatrix}$$

e vejo que o resultado dela é *equivalente* (mas não igual!!!) à última igualdade da coluna da esquerda – não preciso nem substituir o  $a$  e o  $b$ .

**Preciso reescrever este slide!**

## Os detalhes horríveis (2)

Estas contas aqui,

$$\begin{aligned} u &= x^4 \\ \frac{du}{dx} &= 4x^3 \\ du &= \frac{du}{dx} dx \\ &= 4x^3 dx \end{aligned}$$

fazem sentido se a gente considerar que:

1.  $x$  é uma variável independente,
2.  $u$  é uma variável dependente, com  $u = u(x) = x^4$ ,
3.  $dx$  é uma variável independente,
4.  $du$  é uma variável dependente, com  $du = \frac{du}{dx} dx$ ,
5. estas regras sobre diferenciais valem: [Leit4p61](#) (p.275),
6. estas regras sobre variáveis dependentes valem: [Stew14p53](#) (p.951),
7. o  $dx$  num  $\int f(x) dx$  funciona como uma diferencial.

Eu já perguntei pra vários matemáticos fodões que eu conheço – incluindo os desenvolvedores do Maxima, na mailing list – onde eu posso encontrar alguma formalização das regras de como lidar com variáveis dependentes, diferenciais e mudança de variável na integral indefinida, e todos eles me responderam a mesma coisa: “*não faço a menor idéia! Eu sei algumas das regras mas não todas, e não sei onde você pode procurar...*” =(

Moral: é melhor a gente tratar o  $du = 4x^3 dx$  como uma gambiarra...

## Caixinhas com mais anotações

$$\begin{aligned}
 \int (\operatorname{sen} \theta)^4 (\cos \theta)^7 d\theta &= \int (\operatorname{sen} \theta)^4 (\cos \theta)^6 \cos \theta d\theta \\
 &= \int (\operatorname{sen} \theta)^4 ((\cos \theta)^2)^3 \cos \theta d\theta \\
 &= \int (\operatorname{sen} \theta)^4 (1 - (\operatorname{sen} \theta)^2)^3 \cos \theta d\theta \\
 &= \int s^4 (1 - s^2)^3 ds
 \end{aligned}
 \left[ \begin{array}{l} \operatorname{sen} \theta = s \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \operatorname{sen} \theta = \cos \theta \\ ds = \cos \theta d\theta \\ \cos \theta d\theta = ds \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \int (\operatorname{sen} \theta)^4 (\cos \theta)^7 d\theta &= \int (\operatorname{sen} \theta)^4 (\cos \theta)^6 \cos \theta d\theta \\
 &= \int s^4 (1 - s^2)^3 ds
 \end{aligned}
 \left[ \begin{array}{l} \operatorname{sen} \theta = s \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \operatorname{sen} \theta = \cos \theta \\ ds = \cos \theta d\theta \\ \cos \theta d\theta = ds \\ (\cos \theta)^2 = 1 - (\operatorname{sen} \theta)^2 \\ (\cos \theta)^2 = 1 - s^2 \\ (\cos \theta)^6 = (1 - s^2)^3 \end{array} \right]$$

## Caixinhas com mais anotações (2)

$$\begin{aligned}
 \int s\sqrt{1-s^2} ds &= \int (\text{sen } \theta)\sqrt{1-(\text{sen } \theta)^2} \cos \theta d\theta && \left[ \begin{array}{l} s = \text{sen } \theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \text{sen } \theta = \cos \theta \\ ds = \cos \theta d\theta \end{array} \right] \\
 &= \int (\text{sen } \theta)\sqrt{(\cos \theta)^2} \cos \theta d\theta \\
 &= \int (\text{sen } \theta)(\cos \theta) \cos \theta d\theta \\
 &= \int (\text{sen } \theta)(\cos \theta)^2 d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int s\sqrt{1-s^2} ds &= \int (\text{sen } \theta)(\cos \theta) \cos \theta d\theta && \left[ \begin{array}{l} s = \text{sen } \theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \text{sen } \theta = \cos \theta \\ ds = \cos \theta d\theta \\ s^2 = (\text{sen } \theta)^2 \\ 1 - s^2 = 1 - (\text{sen } \theta)^2 \\ 1 - s^2 = (\cos \theta)^2 \\ \sqrt{1-s^2} = \cos \theta \\ \arcsen s = \arcsen \text{sen } \theta \\ \arcsen s = \theta \\ \theta = \arcsen s \end{array} \right] \\
 &= \int (\text{sen } \theta)(\cos \theta)^2 d\theta \\
 \\
 \int \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds &= \int \frac{1}{\cos \theta} \cos \theta d\theta \\
 &= \int 1 d\theta \\
 &= \theta \\
 &= \arcsen s
 \end{aligned}$$

## Caso particular 1 (MVD)

$$[\text{MVD}] \quad = \left( \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \right)$$

$$[\text{MVD}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left( \int_{x=a}^{x=b} f(2x) \cdot 2 dx = \int_{u=2a}^{u=2b} f(u) du \right)$$

$$[\text{MVD}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \text{sen } u \end{bmatrix} = \left( \int_{x=a}^{x=b} \text{sen}(2x) \cdot 2 dx = \int_{u=2a}^{u=2b} \text{sen } u du \right)$$

$$[\text{MVD4}] \quad = \left( \begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx = F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = F(g(b)) - F(g(a)) \\ = F(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f(2x) \cdot 2 dx = F(2x)\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = F(2b) - F(2a) \\ = F(u)\Big|_{u=2a}^{u=2b} \\ = \int_{u=2a}^{u=2b} f(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \text{sen } u \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} \text{sen}(2x) \cdot 2 dx = F(2x)\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = F(2b) - F(2a) \\ = F(u)\Big|_{u=2a}^{u=2b} \\ = \int_{u=2a}^{u=2b} \text{sen } u du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \text{sen } u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} \text{sen}(2x) \cdot 2 dx = (-\cos 2x)\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = (-\cos 2b) - (-\cos 2a) \\ = (-\cos u)\Big|_{u=2a}^{u=2b} \\ = \int_{u=2a}^{u=2b} \text{sen } u du \end{array} \right)$$

## Caso particular 1 (MVI)

$$[\text{MVI}] \quad = \left( \int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du \right)$$

$$[\text{MVI}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left( \int f(2x) \cdot 2 dx = \int f(u) du \right)$$

$$[\text{MVI}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \text{sen } u \end{bmatrix} = \left( \int \text{sen}(2x) \cdot 2 dx = \int \text{sen } u du \right)$$

$$[\text{MVI3}] \quad = \left( \begin{array}{l} \int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) \\ \phantom{\int f(g(x))g'(x) dx} = F(u) \\ \phantom{\int f(g(x))g'(x) dx} = \int f(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{l} \int f(2x) \cdot 2 dx = F(2x) \\ \phantom{\int f(2x) \cdot 2 dx} = F(u) \\ \phantom{\int f(2x) \cdot 2 dx} = \int f(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \text{sen } u \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{l} \int \text{sen}(2x) \cdot 2 dx = F(2x) \\ \phantom{\int \text{sen}(2x) \cdot 2 dx} = F(u) \\ \phantom{\int \text{sen}(2x) \cdot 2 dx} = \int \text{sen } u du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \text{sen } u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{l} \int \text{sen}(2x) \cdot 2 dx = (-\cos 2x) \\ \phantom{\int \text{sen}(2x) \cdot 2 dx} = (-\cos u) \\ \phantom{\int \text{sen}(2x) \cdot 2 dx} = \int \text{sen } u du \end{array} \right)$$

## Caso particular 2 (MVD)

$$[\text{MVD}] \quad = \left( \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \right)$$

$$[\text{MVD}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \left( \int_{x=a}^{x=b} f(x^2) \cdot 2x dx = \int_{u=a^2}^{u=b^2} f(u) du \right)$$

$$[\text{MVD}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \text{sen } u \end{bmatrix} = \left( \int_{x=a}^{x=b} \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx = \int_{u=a^2}^{u=b^2} \text{sen } u du \right)$$

$$[\text{MVD4}] \quad = \left( \begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx = F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = F(g(b)) - F(g(a)) \\ = F(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f(x^2) \cdot 2x dx = F(x^2)\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = F(b^2) - F(a^2) \\ = F(u)\Big|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ = \int_{u=a^2}^{u=b^2} f(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \text{sen } u \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx = F(x^2)\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = F(b^2) - F(a^2) \\ = F(u)\Big|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ = \int_{u=a^2}^{u=b^2} \text{sen } u du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \text{sen } u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx = (-\cos x^2)\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = (-\cos b^2) - (-\cos a^2) \\ = (-\cos u)\Big|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ = \int_{u=a^2}^{u=b^2} \text{sen } u du \end{array} \right)$$

## Caso particular 2 (MVI)

$$\text{[MVI]} \quad = \left( \int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du \right)$$

$$\text{[MVI]} \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \left( \int f(x^2) \cdot 2x dx = \int f(u) du \right)$$

$$\text{[MVI]} \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \text{sen } u \end{bmatrix} = \left( \int \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx = \int \text{sen } u du \right)$$

$$\text{[MVI3]} = \left( \begin{array}{l} \int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) \\ \phantom{\int f(g(x))g'(x) dx} = F(u) \\ \phantom{\int f(g(x))g'(x) dx} = \int f(u) du \end{array} \right)$$

$$\text{[MVI3]} \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{l} \int f(x^2) \cdot 2x dx = F(x^2) \\ \phantom{\int f(x^2) \cdot 2x dx} = F(u) \\ \phantom{\int f(x^2) \cdot 2x dx} = \int f(u) du \end{array} \right)$$

$$\text{[MVI3]} \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \text{sen } u \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{l} \int \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx = F(x^2) \\ \phantom{\int \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx} = F(u) \\ \phantom{\int \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx} = \int \text{sen } u du \end{array} \right)$$

$$\text{[MVI3]} \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \text{sen } u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{l} \int \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx = (-\cos x^2) \\ \phantom{\int \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx} = (-\cos u) \\ \phantom{\int \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx} = \int \text{sen } u du \end{array} \right)$$

### Caso particular 3 (MVI)

$$\text{[MVI]} \quad = \left( \int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du \right)$$

$$\text{[MVI]} \begin{bmatrix} g(x) := \text{sen } x \\ g'(x) := \cos x \end{bmatrix} = \left( \int f(\text{sen } x) \cos x dx = \int f(u) du \right)$$

$$\text{[MVI]} \begin{bmatrix} g(x) := \text{sen } x \\ g'(x) := \cos x \\ f(u) := u^2(1-u^2)^2 \end{bmatrix} = \left( \int (\text{sen } x)^3(1 - (\text{sen } x)^2)^2 \cos x dx = \int u^2(1-u^2)^2 du \right)$$

$$\text{[MVI3]} \quad = \begin{pmatrix} \int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) \\ = F(u) \\ = \int f(u) du \end{pmatrix}$$

$$\text{[MVI3]} \begin{bmatrix} g(x) := \text{sen } x \\ g'(x) := \cos x \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \int f(\text{sen } x) \cos x dx = F(\text{sen } x) \\ = F(u) \\ = \int f(u) du \end{pmatrix}$$

$$\text{[MVI3]} \begin{bmatrix} g(x) := \text{sen } x \\ g'(x) := \cos x \\ f(u) := u^2(1-u^2)^2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \int (\text{sen } x)^3(1 - (\text{sen } x)^2)^2 \cos x dx = F(\text{sen } x) \\ = F(u) \\ = \int u^2(1-u^2)^2 du \end{pmatrix}$$

## O macaco, de novo

Estas duas igualdades são falsas

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - (\operatorname{sen} \theta)^2} &= \cos \theta \\ \operatorname{arcsen} \operatorname{sen} \theta &= \theta\end{aligned}$$

quando  $\theta = \pi \dots$  confira!

Mas elas são verdadeiras para  $\theta = 0$ , e para todo  $\theta$  num certo intervalo em torno do 0 que eu não quero contar qual é.

Lembre quem em Cálculo 2 a gente vai primeiro fazer as contas como o macaco que faz todas as contas como se tudo funcionasse, e a gente vai deixar pra checar os detalhes, como se  $\theta$  estivesse no intervalo certo, só no final, depois de termos feito as contas todas.

O Leithold é super cuidadoso nas contas e nesses detalhes como os domínios das funções e o intervalo onde mora o  $\theta$ , mas a maioria dos outros livros de Cálculo 2 que eu conheço não são – eles são meio porcalhões com esses detalhes... e a gente também vai ser, senão não vai dar tempo de cobrir o suficiente da matéria.

## O truque dos intervalos

Dê uma olhada nas primeiras páginas daqui:

**Leit5p3** 5.1. Antidiferenciação

O Leithold usa expressões como “num intervalo  $I$ ”, “para todo  $x \in I$ ” e “definidas no mesmo intervalo” um montão de vezes. O truque de usar sempre intervalos resolve esse esse problema daqui super bem:

**2fT24** Meme: expanding brain, versão ln

A minha definição preferida pra integral indefinida,

**2fT23** Outra definição pra integral indefinida

também resolve o problema – de um modo bem mais simples, e que é suficiente pro tipo de conta que a gente tem que treinar em Cálculo 2.

## MVI

A nossa fórmula pra mudança de variável na integral indefinida vai ser esta aqui:

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du = \left( \int f'(g(x))g'(x) dx = \int f'(u) du \right)$$

Dá pra demonstrar ela deste jeito,

$$\int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) = f(u) = \int f'(u) du$$

onde a primeira e a terceira igualdades são consequências do , e a igualdade do meio só vale se tivermos  $u = g(x)$ .

Os livros demonstram a  $\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$  de um jeitos que eu nunca achei muito convincentes – ou fingindo que tudo é óbvio, ou “derivando tudo em  $x$ ”. As contas abaixo me ajudaram a entender o que acontece quando a gente “deriva tudo em  $x$ ”:

$$\underbrace{\frac{d}{dx} \left( \int \underbrace{f'(g(x))g'(x)} \right)}_{f'(g(x))g'(x)} = \underbrace{\frac{d}{dx} f(g(x))}_{f'(g(x))g'(x)} = \frac{d}{dx} \underbrace{f(u)}_{f'(g(x))g'(x)} = \frac{d}{dx} \underbrace{\int \underbrace{f'(u)}_{f(u)} du}_{f(g(x))}_{f'(g(x))g'(x)}$$

## Simplificando raízes quadradas

Na aula de 16/maio/2023 você aprendeu – na prática, não vendo uma definição formal – o que é transformar uma integral mais difícil numa integral mais fácil, que nós sabemos integrar...

a) Digamos que você sabe integrar  $\int \sqrt{1-s^2} ds$ . Transforme  $\int \sqrt{1-(5x)^2} dx$  em algo que você sabe integrar.

b) Transforme  $\int \sqrt{1-(ax)^2} dx$  em algo que você sabe integrar.

c) Digamos que você sabe integrar  $\int \sqrt{1-s^{2k}} ds$  para qualquer valor de  $k$ .

Transforme  $\int \sqrt{1-(5x)^{2k}} dx$  em algo que você sabe integrar.

d) Transforme  $\int \sqrt{1-(ax)^{2k}} dx$  em algo que você sabe integrar.

e) Transforme  $\int \sqrt{1-(ax)^{2k}} dx$  em algo que você sabe integrar.

f) Transforme  $\int \sqrt{1-(ax)^{2k}} dx$  em algo que você sabe integrar.

g) Entenda este truque aqui:

$$\begin{aligned}\sqrt{3^2-x^2} &= \sqrt{3^2-3^2\frac{1}{3^2}x^2} \\ &= \sqrt{3^2-3^2\left(\frac{x}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{3^2\left(1-\left(\frac{x}{3}\right)^2\right)} \\ &= \sqrt{3^2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2} \\ &= 3\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}\end{aligned}$$

Use ele – com adaptações, óbvio – pra transformar  $\int \sqrt{25-x^2} dx$  em algo que você sabe integrar.

h) Use ele pra transformar  $\int \sqrt{25-x^2}^{42} dx$  em algo que você sabe integrar.

i) Use ele pra transformar  $\int \sqrt{a^2-x^2} dx$  em algo que você sabe integrar.

j) Use ele pra transformar  $\int \sqrt{a^2-x^2}^k dx$  em algo que você sabe integrar.

j) Use ele pra transformar  $\int x^{20}\sqrt{a^2-x^2}^k dx$  em algo que você sabe integrar.

## Exercício 3

Slogan:

*Toda integral que pode ser resolvida por uma sequência de mudanças de variável pode ser resolvida por uma mudança de variável só.*

Durante a quarentena eu dei algumas questões de prova sobre este slogan. Dê uma olhada:

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=4>

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=9>

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-P1.pdf#page=15>

a) Resolva a integral abaixo usando uma mudança de variável só (dica:  $u = g(h(x))$ ):

$$\int f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x) dx = ?$$

b) Resolva a integral acima usando duas mudanças de variável. Dica: comece com  $u = h(x)$ .

O Miranda e o Leithold preferem fazer em um passo só certas mudanças de variáveis que eu prefiro fazer em dois ou três passos. Entenda o exemplo 8.1 do Miranda – o da seção 8.4, na página 264...

<http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#263>

c) ...e descubra como resolver a integral dele fazendo duas mudanças de variáveis ao invés de uma só. A segunda mudança de variável vai ser  $s = \sin \theta$ , e a primeira eu prefiro não contar qual é – tente usar as idéias do exercício 1 pra descobrir qual ela tem que ser.

Ainda não atualizei este slide!

# Cálculo C2 - 2023.2

Aula 10: derivada da função inversa

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2023.2-C2.html>

## Links

[StewPtCap3p35](#) (p.188) 3.5 Derivação Implícita

[StewPtCap3p39](#) (p.192) Derivadas de Funções Trigonômétricas Inversas

[StewPtCap3p43](#) (p.196) 3.6 Derivadas de Funções Logarítmicas

[MirandaP90](#) 3.6 Derivada da Função Inversa

[MirandaP97](#) 4.1 Derivação Implícita

[MirandaP101](#) 4.2 Derivadas das Funções Exponencial e Logaritmo

[MirandaP104](#) 4.3 Derivação das Funções Trigonômétricas Inversas

[Leit3p59](#) (p.195) 3.8 Derivação implícita

[Leit7p15](#) (p.433) 7.2.3 Teorema: derivada da função inversa

## Introdução

Pra mim a “fórmula da derivada da função inversa” e a “demonstração da fórmula da derivada da função inversa” são essas séries de igualdades aqui, que eu vou chamar de [DFI2] e [DFI6], onde o 2 e o 6 dizem o número de igualdades em cada uma:

$$\begin{aligned}
 \text{[DFI2]} &= \left( \begin{array}{l} \text{Se: } f(g(x)) = x \\ \text{Então: } g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \end{array} \right) \\
 \text{[DFI6]} &= \left( \begin{array}{l} \text{Se: } f(g(x)) = x \\ \text{Então: } \frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx} x \\ \qquad \qquad \qquad = 1 \\ \qquad \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \\ f'(g(x))g'(x) = 1 \\ \qquad \qquad \qquad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Você já viu algo assim em Cálculo 1 quando mostraram pra você que  $\frac{d}{dx} \ln x = 1/\dots$  mas agora nós vamos reusar essa demonstração pra provar várias outras coisas diferentes.

### Exercício 0.

Calcule o resultado das substituições abaixo.

$$\text{a) [DFI6]} \quad \left[ \begin{array}{l} g(x) := \ln x \\ g'(x) := \ln' x \\ f(x) := \exp x \\ f'(x) := \exp' x \end{array} \right] = ?$$

$$\text{b) [DFI6]} \quad \left[ \begin{array}{l} g(x) := \ln x \\ g'(x) := \ln' x \\ f(x) := e^x \\ f'(x) := e^x \end{array} \right] = ?$$

$$\text{c) [DFI2]} \quad \left[ \begin{array}{l} g(x) := \ln x \\ g'(x) := \ln' x \\ f(x) := e^x \\ f'(x) := e^x \end{array} \right] = ?$$

$$\text{d) [DFI2]} \quad \left[ \begin{array}{l} g(x) := \arcsen x \\ g'(x) := \arcsen' x \\ f(x) := \sen x \\ f'(x) := \cos x \end{array} \right] = ?$$

$$\text{e) [DFI2]} \quad \left[ \begin{array}{l} g(x) := \arcsen x \\ g'(x) := \arcsen' x \\ f(x) := \sen x \\ f'(x) := \sqrt{1 - (\sen x)^2} \end{array} \right] = ?$$

## Secante e tangente

Lembre que  $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$  e  $\sec x = \frac{1}{\operatorname{cos} x}$ . Vou definir estas abreviações – que vão ser temporárias, essas letras vão ter outros significados em outros lugares...

$$\begin{aligned} s &= \operatorname{sen} x \\ c &= \operatorname{cos} x \\ t &= \tan x \\ z &= \sec x \end{aligned}$$

Então temos:

$$\begin{aligned} z^2 &= \frac{1}{c^2} = \frac{s^2 + c^2}{c^2} = \frac{s^2}{c^2} + \frac{c^2}{c^2} = t^2 + 1 \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \\ \left(\frac{1}{g}\right)' &= \frac{1'g - 1g'}{g^2} = \frac{-g'}{g^2} \\ z' &= \left(\frac{1}{c}\right)' = \frac{-c'}{c^2} = \frac{s}{c^2} = \frac{1}{c} \frac{s}{c} = zt \\ t' &= \left(\frac{s}{c}\right)' = \frac{s'c - sc'}{c^2} = \frac{c^2 + s^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} = z^2 \end{aligned}$$

### Exercício 1.

Leia com cuidado todos os passos do “Então temos:” à esquerda e veja quais são os passos que você não acha óbvios. Expanda cada uma das igualdades que você achou complicadas em uma série de igualdades bem fáceis de justificar.

### Exercício 2.

No item (e) do Exercício 0 eu usei que:

$$\operatorname{sen}' x = \sqrt{1 - (\operatorname{sen} x)^2}$$

ou seja, eu “expressei  $\operatorname{sen}' x$  em termos de  $\operatorname{sen} x$ ”. Se você nunca viu essa expressão “expressar blá em termos de outro blá” veja como ela é usada nesta página do Stewart:

[StewPtCap3p35](#) (p.188) 3.5 Derivação Implícita

Expresse:

- $\tan x$  em termos de  $\sec x$
- $\sec x$  em termos de  $\tan x$
- $\tan' x$  em termos de  $\tan x$
- $\sec' x$  em termos de  $\sec x$

## Secante e tangente (2)

No final do exercício (0e) você obteve isto aqui,

$$\arcsen' x = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sen \arcsen x)^2}}$$

ou seja, você agora sabe justificar a primeira igualdade daqui,

$$\begin{aligned} \arcsen' x &= \frac{1}{\sqrt{1 - (\sen \arcsen x)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

e imagino que a segunda também, porque ela é relativamente fácil...

### Exercício 3.

- Expresse  $\arctan x$  em termos de  $x$ .
  - Expresse  $\operatorname{arcsec} x$  em termos de  $x$ .
- Aqui você vai ter que combinar idéias dos exercícios 0 e 2.

**Dica 1:** todas as idéias principais estão aqui:

**StewPtCap3p39** (p.192)

**Dica 2:** releia estes dois trechos das legendas de um dos vídeos sobre didática que eu preparei no início do ano:

**Visaud01:25** até 03:00

**Visaud50:43** até 52:24

Você não quer (só) virar a pessoa que lê demonstrações complicadas e acha elas óbvias. O que vai ser mais útil pra você no futuro vai ser você virar a pessoa que sabe expandir demonstrações complicadas e transformar elas em demonstrações que os seus colegas entendam! Lembre da Dica 7 daqui:

**2gT4** “Releia a Dica 7”

# Cálculo 2 - 2023.2

Aulas 11 e 12: Frações parciais

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2023.2-C2.html>

## Links

Quadros:

[2hQ31](#) (2023.2) Aula 11

[2hQ37](#) (2023.2) Aula 12

[2gQ30](#) (2023.1) Aula 14

[2xQ26](#) (2019.1)

[2yQ43](#) (2019.2)

[2yQ106](#) (2019.2, polinômios em duas variáveis).

Seções sobre frações parciais nos livros:

[StewPtCap7p23](#) (p.438) Seção 7.4

[Leit9p24](#) (p.551) Seção 9.5

[Miranda240](#) Seção 8.1: Frações parciais

Eu tentei fazer um programa pra typesetear essas figuras mas o resultado ficou feio – [2bT212](#) – e eu ainda não tive tempo de melhorá-lo.

Polinômios de Laurent em Maxima:

<http://anggtwu.net/MAXIMA/laurent1.mac.html>

## Sobre as questões de prova

A P1 vai ter uma questão em que você vai ter que resolver uma integral como essa aqui:

$$\int \frac{ax + b}{cx^2 + dx + e} dx$$

A VR e a VS vão ter questões em que você vai ter que resolver integrais de “funções racionais impróprias”, como isto aqui,

$$\int \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{ex^2 + fx + g} dx$$

em que você vai precisar de divisão de polinômios com resto.

Neste semestre eu vou considerar que frações parciais são principalmente uma desculpa pra gente aprender duas coisas: a) um jeito de lidar com polinômios que vai nos permitir fazer um montão de contas com polinômios ou de cabeça ou escrevendo muito pouco, e b) um caso que a gente precisa usar um pouquinho de Álgebra Linear – “resolver um sistema” – pra transformar uma integral complicada em outra mais simples.

*A gente só vai ver os casos em que o polinômio do denominador tem raízes reais e essas raízes são todas diferentes.*

## A integral do $\frac{1}{x}$

Lembre que:

$$\begin{aligned}
 \text{[II]} &= \left( \int f'(x) dx = f(x) \right) \\
 \text{[RC]} &= \left( \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right) \\
 \text{[DFI]} &= \left( \begin{array}{l} f(g(x)) = x \\ \frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx} x \\ = 1 \\ \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \\ f'(g(x))g'(x) = 1 \\ g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

e que eu estou usando uma definição pra integral indefinida na qual as duas igualdades abaixo são equivalentes:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{d}{dx} g(x) \\
 \int f(x) dx &= g(x)
 \end{aligned}$$

Ou seja, pra mim o '+C' é opcional.

Me contaram que o Reginaldo dá errado pra quem não escreve o '+C', então se você for fazer C2 com ele no próximo semestre não esqueça o '+C'!!!

### Exercício 1

Calcule a integral abaixo. Dica:  $u = bx + c$ .

$$\int \frac{a}{bx+c} dx$$

Temos:

$$\begin{aligned}
 \exp(\ln(x)) &\stackrel{(1)}{=} x \\
 \ln' x &\stackrel{(2)}{=} 1/\exp(\ln(x)) \\
 &\stackrel{(3)}{=} 1/\exp(\ln(x)) \\
 &\stackrel{(4)}{=} 1/x \\
 \frac{d}{dx} f(g(x)) &\stackrel{(5)}{=} f'(g(x))g'(x) \\
 \frac{d}{dx} \ln(-x) &\stackrel{(6)}{=} \ln'(-x) \cdot -1 \\
 &\stackrel{(7)}{=} 1/(-x) \cdot -1 \\
 &\stackrel{(8)}{=} 1/x \\
 \ln |x| &\stackrel{(9)}{=} \begin{cases} \ln x & \text{quando } 0 < x, \\ \ln -x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\
 \frac{d}{dx} \ln |x| &\stackrel{(10)}{=} \frac{d}{dx} \begin{cases} \ln x & \text{quando } 0 < x, \\ \ln -x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{(11)}{=} \begin{cases} \frac{d}{dx} \ln x & \text{quando } 0 < x, \\ \frac{d}{dx} \ln -x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{(12)}{=} \begin{cases} 1/x & \text{quando } 0 < x, \\ 1/x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{(13)}{=} 1/x \\
 1/x &\stackrel{(14)}{=} \frac{d}{dx} \ln x \\
 1/x &\stackrel{(15)}{=} \frac{d}{dx} \ln(-x) \\
 1/x &\stackrel{(16)}{=} \frac{d}{dx} \ln |x| \\
 \int \frac{1}{x} dx &\stackrel{(17)}{=} \ln x \\
 \int \frac{1}{x} dx &\stackrel{(18)}{=} \ln(-x) \\
 \int \frac{1}{x} dx &\stackrel{(19)}{=} \ln |x|
 \end{aligned}$$

## Contas sem “vai um” e polinômios

Compare esta conta com números,

$$\begin{array}{r}
 2773 \overline{) 12} \\
 \underline{-24} \phantom{00} \\
 37 \phantom{00} \\
 \underline{-36} \phantom{00} \\
 13 \phantom{00} \\
 \underline{-12} \phantom{00} \\
 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 2400 = 200 \cdot 12 \\
 360 = 30 \cdot 12 \\
 12 = 1 \cdot 12 \\
 2772 = 231 \cdot 12 \\
 2773 = 231 \cdot 12 + 1
 \end{array}$$

Com esta conta com polinômios:

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + 7x^2 + 7x + 3 \overline{) x + 2} \\
 \underline{-(2x^3 + 4x^2)} \phantom{00} \\
 3x^2 + 7x \phantom{00} \\
 \underline{-(3x^2 + 6x)} \phantom{00} \\
 1x + 3 \phantom{00} \\
 \underline{-(1x + 2)} \phantom{00} \\
 1
 \end{array}$$

$$2x^3 + 4x^2 + 0x + 0 = (2x^2 + 0x + 0) \cdot (x + 2)$$

$$3x^2 + 6x + 0 = (3x + 0) \cdot (x + 2)$$

$$1x + 2 = 1 \cdot (x + 2)$$

$$2x^3 + 7x^2 + 7x + 1 = (2x^2 + 3x + 1) \cdot (x + 2)$$

$$2x^3 + 7x^2 + 7x + 3 = (2x^2 + 3x + 1) \cdot (x + 2) + 1$$

### Exercício 2

Traduza a conta com polinômios da esquerda pra notação de caixinhas daqui: **2xQ26, 2yQ43**.

### Exercício 3

Traduza a conta abaixo pra notação de caixinhas:

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{x+3} + \frac{4}{x-5} \\
 &= \frac{2(x-5)}{(x+3)(x-5)} + \frac{(x+3)4}{(x+3)(x-5)} \\
 &= \frac{2(x-5) + (x+3)4}{(x+3)(x-5)}
 \end{aligned}$$

## Funções racionais

### Exercício 4

Entenda a definição de “função racional própria” daqui – [Miranda240](#) – e acrescente mais linhas nas contas do exercício 3 pra “simplificar” o resultado até ele virar uma “função racional própria”. Faça isso tanto na notação usual quanto na notação de caixinhas.

### Exercício 5

Entenda as contas do Exemplo 8.1 daqui – [Miranda241](#) – e transforme a expressão abaixo numa função racional imprópria:

$$1000x^2 + 100x + 10 + \frac{2}{x+3} + \frac{4}{x-5}$$

### Exercício 6

Isto aqui é verdade:

$$\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5} = \frac{(A+B)x + (-5A+3B)}{x^2 - 2x - 15}$$

mostre porquê “aumentando o nível de detalhe” – transforme a igualdade acima numa série de igualdades na qual cada passo seja bem fácil de verificar.

### Exercício 7

Resolva:

$$\text{a) } (A+B)x + (-5A+3B) = 9x + 11$$

$$\text{b) } \frac{(A+B)x + (-5A+3B)}{x^2 - 2x - 15} = \frac{9x + 11}{x^2 - 2x - 15}$$

$$\text{c) } \frac{(A+B)x + (-5A+3B)}{x^2 - 2x - 15} = \frac{2x + 7}{x^2 - 2x - 15}$$

$$\text{d) } \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5} = \frac{2x+7}{x^2 - 2x - 15}$$

$$\text{e) } \int \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5} dx$$

$$\text{f) } \int \frac{2x+7}{x^2 - 2x - 15} dx$$

### Exercício 8

(Bem trabalhoso, pra casa!)

Mostre como organizar a solução do (7f) em várias séries de igualdades fáceis de justificar, como no slide 3. Você pode precisar de algumas coisinhas em português, como na última página do PDF de 2022.2: [2fT137](#).

**Aviso:** Todos os slides a partir daqui são antigos!  
Assim que der eu vou fazer uma faxina neles  
e deixar só o que ainda serve!!!

## Exercício 1

Algumas consequências da regra da cadeia...

$$\text{[RC]} = \left( \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

Obtenha os seguintes casos particulares da [RC]:

a)  $g(x) = 2x$

b)  $g(x) = 2x + 3$

c)  $g(x) = x + 3$

d)  $g(x) = x + 3, f(x) = \ln x$

e)  $g(x) = -x$

f)  $g(x) = -x, f(x) = \ln x$

g)  $g(x) = -x + 200, f(x) = \ln x$

**Exercício 2.**

a)  $\int \frac{1}{3x} dx = ?$

b)  $\int \frac{1}{3x + 4} dx = ?$

c)  $\int \frac{2}{3x + 4} dx = ?$

d)  $\int \frac{a}{bx + c} dx = ?$

## Derivadas formais (de novo)

Todas estas igualdades são verdadeiras, mas se tentarmos formalizar elas com todos os detalhes vamos ver que várias delas falam de funções com domínios diferentes...

$$\begin{array}{ll}
 \frac{d}{dx} \ln x & = \frac{1}{x} & \int \frac{1}{x} dx & = \ln(x) \\
 \frac{d}{dx} \ln(-x) & = \frac{1}{x} & \int \frac{1}{x} dx & = \ln(x) + C \\
 \frac{d}{dx} \ln|x| & = \frac{1}{x} & \int \frac{1}{x} dx & = \ln(-x) \\
 & & \int \frac{1}{x} dx & = \ln(-x) + C \\
 & & \int \frac{1}{x} dx & = \ln(|x|) \\
 & & \int \frac{1}{x} dx & = \ln(|x|) + C \\
 & & \int \frac{1}{x} dx & = \begin{cases} \ln(-x) + C_1 & \text{quando } x < 0, \\ \ln(x) + C_2 & \text{quando } x > 0 \end{cases}
 \end{array}$$

REPARE QUE:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+5} &= \frac{2(x+5) + 4(x+3)}{(x+3)(x+5)} \\ &= \frac{2(x+5) + 4(x+3)}{(x+3)(x+5)} \\ &= \frac{2x + 10 + 4x + 12}{x^2 + 8x + 15} \\ &= \frac{6x + 22}{x^2 + 8x + 15} \end{aligned}$$

A MAIORIA DOS PROGRAMAS DE "COMPUTER ALGEBRA"  
TEM FUNÇÕES QUE FAZEM A OPERAÇÃO ACIMA E  
A INVERSA DELA:

$$\left( \frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+5} \right) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{"together"} \\ \text{(FÁCIL)}} \\ \xleftarrow{\text{"apart"} \\ \text{(DIFÍCIL)}} \end{array} \left( \frac{6x + 22}{x^2 + 8x + 15} \right)$$

**Exercício 3.**

a) together  $\left( \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) = ?$

b) together  $\left( \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \right) = ?$

c) together  $\left( \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} \right) = ?$

## Exercício 4.

EXERCÍCIO:

- a) ENCONTRE EXPRESSÕES  
PARA  $c, d, e, f$  QUE  
FAÇAM ESTA FÓRMULA  
SER VERDADE:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{cx+d}{x^2+ex+f}$$

AS SUAS FÓRMULAS PARA  $c, d, e, f$   
NÃO PODEM CONTER "x".

- b) USE A FÓRMULA QUE VOCÊ  
ACABOU DE OPTER PARA ENCONTRAR  
OS  $A, a, B, b$  TAIS QUE:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{2x+3}{x^2-7+10}$$

**Exercício 4: uma solução pro item (a)**

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} &= \frac{cx+d}{x^2+ex+f} \\ \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} &= \frac{A(x-b)}{(x-a)(x-b)} + \frac{B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \\ &= \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \\ &= \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab} \\ c &= A + B \\ d &= -Ab - Ba \\ e &= -a - b \\ f &= ab \end{aligned}$$

## Exercício 4: uma solução pro item (a), cont...

Dá pra gente reescrever isso usando o ‘[:=]’:

$$\left( \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{cx+d}{x^2+ex+f} \right) \begin{array}{l} c:=A+B \\ d:=-Ab-Ba \\ e:=-a-b \\ f:=ab \end{array}$$

$$= \left( \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab} \right),$$

e sabemos que esta igualdade é verdadeira:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab}$$

então isto aqui

$$\begin{aligned} c &= A+B \\ d &= -Ab-Ba \\ e &= -a-b \\ f &= ab \end{aligned}$$

é **uma** solução para a equação

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{cx+d}{x^2+ex+f} \dots$$

mas não sabemos se é a **única** solução!

Sempre dá pra escrever soluções de equações usando o ‘[:=]’. Por exemplo, as duas soluções da equação

$$(x-2)(x-5) = 0 :$$

São:

$$\begin{aligned} ((x-2)(x-5) = 0) [x := 2] &= \\ ((2-2)(2-5) = 0) &= \\ ((x-2)(x-5) = 0) [x := 5] &= \\ ((5-2)(5-5) = 0) &= \end{aligned}$$

**Nenhum** livro “básico” define

“solução de uma equação” desse jeito — como “a substituição que transforma a equação numa igualdade verdadeira” — mas eu acho isso um bom modo de entender o que são “equações” e “soluções”...

Ah, note que eu não fiquei repetindo a condição “as suas fórmulas para  $c, d, e, f$  não podem conter ‘ $x$ ’ o tempo todo... eu deixei isso implícito. =)

### Exercício 4: uma solução pro item (b)

Temos duas soluções para

$$(x - a)(x - b) = x^2 - 7x + 10 :$$

uma é  $a = 2$  e  $b = 5$ , e a outra é  $a = 5$  e  $b = 2$ .

Lembre que Cálculo 2 é sobre **chutar** e **testar**.

A gente pode chutar que  $a = 5$ ,  $b = 2$ , e que

$c, d, e, f$  são os que a gente obtém pelo

item (a), e aí ver se isso nos leva a uma

solução...

(Obs: isso funciona!!!)

**Exercício 4: item (c)**

Seja [PFP] esta igualdade aqui – o

“princípio por trás das frações parciais”:

$$[\text{PFP}] = \left( \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{A(x-b) + B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \right)$$

c) Resolva o exercício 8.7.2 do livro do Miranda –

<http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=251>

e depois mostre qual é a substituição da forma

$$[\text{PFP}] \begin{bmatrix} a:=? \\ b:=? \\ A:=? \\ B:=? \end{bmatrix}$$

que “está por trás” da sua solução.

**Exercício 5.**

Use estas idéias para integrar:

$$\int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 3}{x + 2} dx = ?$$

**Exercício 6.**

O que acontece nos casos em que “teria vai um”?

a) Tente fazer a divisão com resto de  $x^3$  por  $x + 2$ .

Mais precisamente, encontre um polinômios  $R(x)$  e  $Q(x)$  tais que  $(x^3) = Q(x) \cdot (x + 2) + R(x)$  e  $R(x)$  é no máximo de grau 1.

Teste a sua resposta!

b) Calcule  $\int \frac{x^3}{x+2} dx$  pelo método acima.

Teste a sua resposta derivando a sua antiderivada para  $\frac{x^3}{x+2}$ .

c) Calcule  $\int \frac{x^3}{x+2} dx$  fazendo a substituição  $u = x + 2$ .

Você deve obter o mesmo resultado que na (b).

d) Calcule  $\int \frac{x^2}{(x+1)(x-1)} dx$  por frações parciais.

## Dica importante

Lembre que uns dos meus slogans é

“eu só vou corrigir os sinais de igual”...

No slide ?? a igualdade mais importante é a da última linha.

Nós vamos usá-la assim, pra transformar a integral original em algo fácil de integrar:

$$\begin{aligned} & \int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 3}{x+2} dx \\ &= \int \frac{(2x^2 + 3x + 1) \cdot (x+2) + 1}{x+2} dx \\ &= \int \frac{(2x^2 + 3x + 1) \cdot \cancel{(x+2)}}{x+2} + \frac{1}{x+2} dx \\ &= \int 2x^2 + 3x + 1 + \frac{1}{x+2} dx \end{aligned}$$

## Uma questão da P1 de 2020.1

A questão 3 da P1 de 2020.1,

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C2-P1.pdf>

era de frações parciais, e eu pus nesse PDF um gabarito parcial dela, que não inclui nem as contas da divisão de polinômios nem a verificação de que a nossa integral está certa. Faça a questão, incluindo a parte que não está no gabarito.

# Cálculo 2 - 2023.2

Aulas 13 até 16: Somas de Riemann

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2023.2-C2.html>

## Links

Umás figuras (minhas) que mostram como definir a integral como dois limites:

[2eT95](#) A integral como limite

Alguns slides da introdução ao curso:

[2hT11](#) Atirei o pau no gato - tempo infinito

[2hT12](#) Imagens de intervalos

Stewart:

[StewPtCap5p8](#) (p.329) somas superiores e inferiores

[StewPtCap5p10](#) (p.331) pontos amostrais

[StewPtCap5p16](#) (p.337) definição da integral definida

Miranda:

[Miranda207](#) 7.1 Áreas e somas de Riemann

[Miranda212](#) 7.2 Integral definida

[Miranda213](#) marcas

[Miranda217](#) 7.3. Definição 3: Soma superior e inferior

Leithold:

[Leit5p35](#) (p.318) Figura 3

[Leit5p36](#) (p.319) Figura 4

[Leit5p41](#) (p.324) 5.5. A integral definida

Livro de Análise do Ross:

[RossAp16](#) (p.269) The Riemann Integral

Quadros de 2023.2:

[2hQ39](#) Quadros da aula 13 (25/set/2023)

Vou (re)usar muito material destes PDFzinhos:

[2fT60](#) 2022.2, aulas 13, 14 e 16: Somas de Riemann

[2fT89](#) 2022.2, aula 19, 14 e 16: o TFC1 e o TFC2

[2eT39](#) 2022.1, aula 15: infs e sups

Quadros de 2023.1:

[2gQ32](#) Quadros da aula 15 (23/maio/2023)

[2gQ34](#) Quadros da Aula 16 (26/maio/2023)

[2gQ37](#) Quadros da Aula 18 (02/junho/2023)

[2gQ39](#) Quadros da Aula 19 (06/junho/2023)

## Spoiler: descontinuidades

Digamos que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função qualquer.

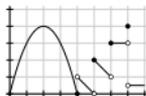
Vamos definir o conjunto dos pontos de descontinuidade da  $f$ , ou, pra abreviar, o “conjunto das descontinuidades da  $f$ ”, assim:

$$\text{desc}(f) = \{ x \in [a, b] \mid f \text{ é descontinua em } x \}$$

A expressão “ $f$  tem um número finito de pontos de descontinuidade”, que eu vou abreviar pra “ $f$  tem finitas descontinuidades” apesar disso soar bem estranho em português, vai querer dizer:

$\text{desc}(f)$  é um conjunto finito

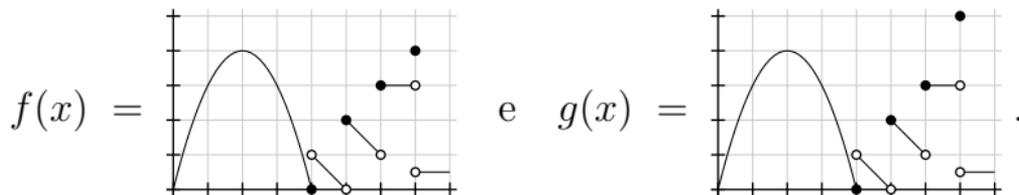
O conjunto vazio é finito, então toda  $f$  contínua “tem finitas descontinuidades”. Essa função aqui tem finitas descontinuidades:



A função de Dirichlet, que nós vimos aqui, **2dT104** (2021.2) A função de Dirichlet tem infinitas descontinuidades.

## Spoiler: descontinuidades (2)

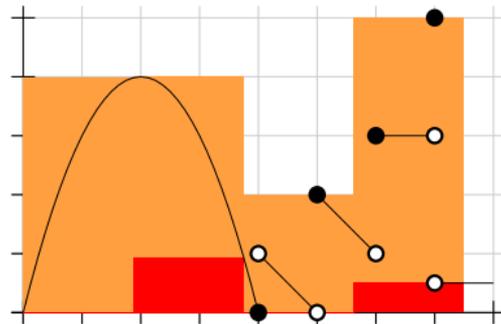
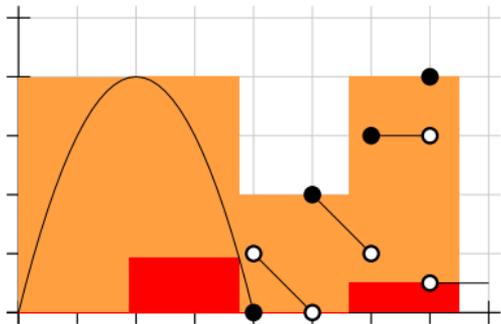
Sejam

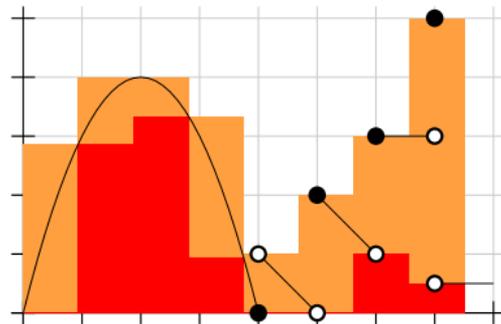
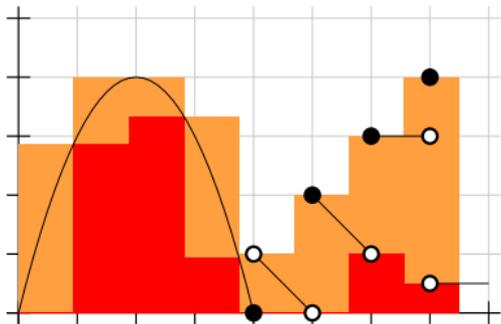


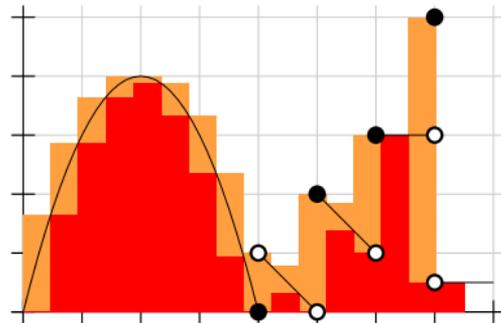
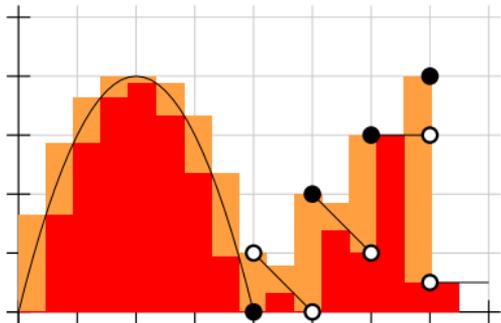
As figuras dos próximos slides mostram

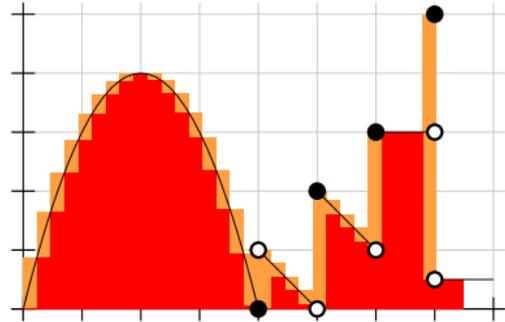
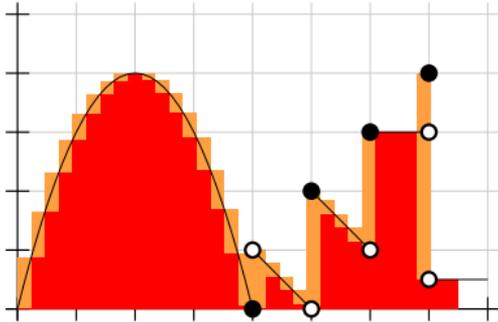
$$\overline{\int}_{[0,7.5]_{2k}} f(x) dx \quad \text{e} \quad \overline{\int}_{[0,7.5]_{2k}} g(x) dx$$

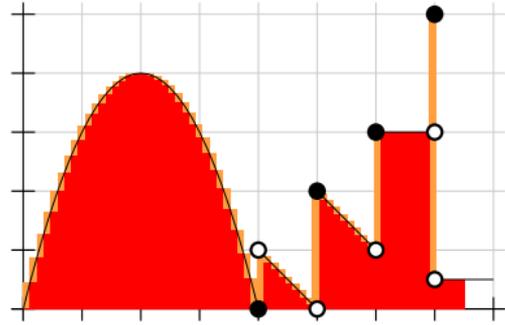
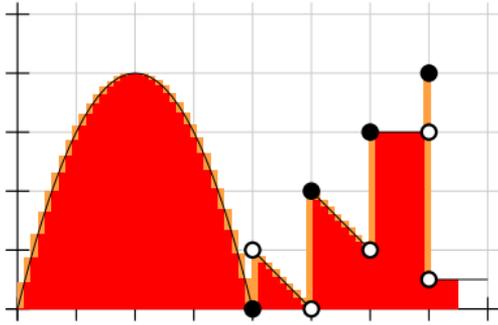
para vários valores de  $k$ . Use-as pra entender porque “na integral as descontinuidades não importam” — se só tivermos um número finito de descontinuidades.

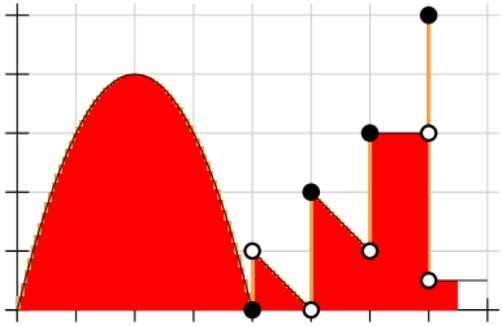
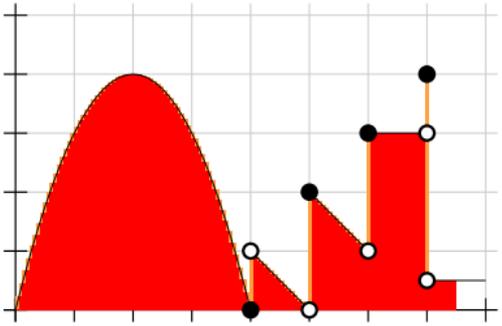












## Montanhas

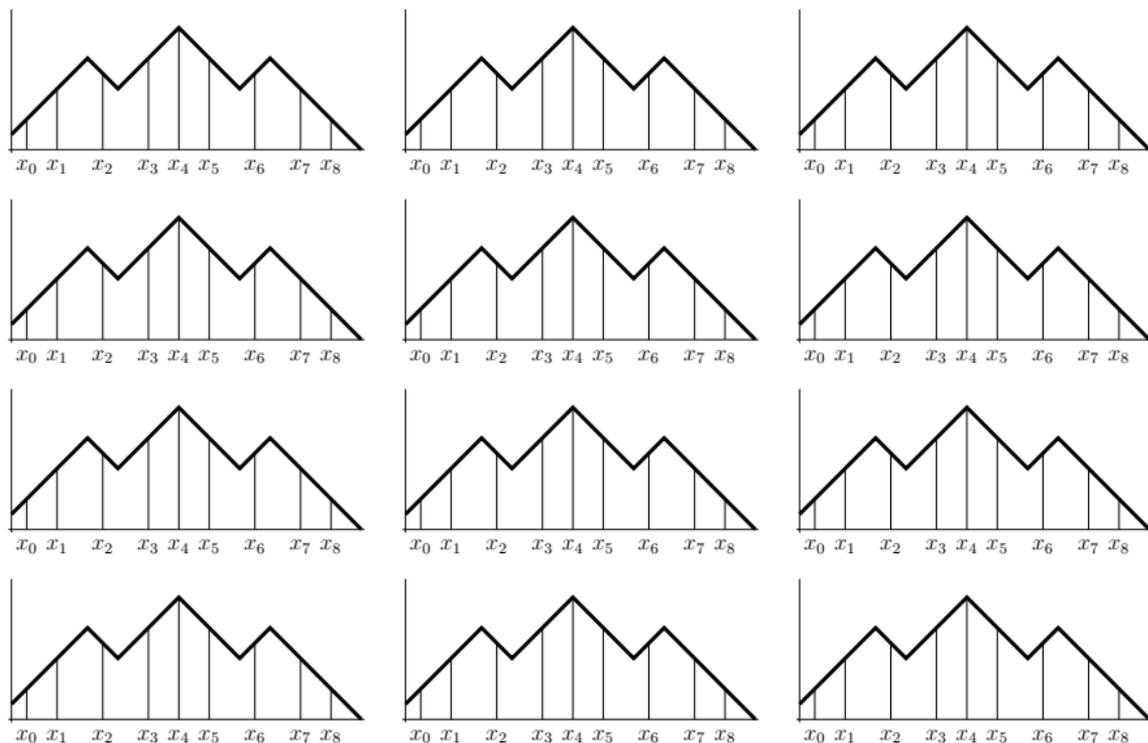
Seja  $f(x)$  a função da próxima página – “as montanhas”.  
 Você vai receber (pelo menos) uma cópia dessa página.  
 Faça cada item abaixo em um dos 12 gráficos da  $f(x)$ .

Represente graficamente cada um dos somatórios abaixo.  
 Se você tiver dificuldade com algum desses somatórios  
 faça ele em vários passos, como nestes slides:

2fT65 Somatórios

2gT85 Partições, informalmente

- $\sum_{i=1}^8 f(x_i)(x_i - x_{i-1})$
- $\sum_{i=1}^8 f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$
- $\sum_{i=1}^8 \max(f(x_{i-1}), f(x_i))(x_i - x_{i-1})$
- $\sum_{i=1}^8 \min(f(x_{i-1}), f(x_i))(x_i - x_{i-1})$
- $\sum_{i=1}^8 f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)(x_i - x_{i-1})$
- $\sum_{i=1}^8 \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1})$



## Miranda: somas inferiores e superiores

Nas páginas 217 e 218 o Miranda define as notações  $I(f, P)$  e  $S(f, P)$ , e lá no meio dessas definições ele define

$$\min_{x \in I} f(x) \quad \text{e} \quad \max_{x \in I} f(x)$$

usando o truque do “vire-se”: ele mostra uma figura e o leitor tem que se virar pra entender o que essas notações querem dizer... veja: [Miranda217](#) (Definição 3)

### Mais itens pra fazer na figura das montanhas

a) Entenda o que essas notações do Miranda querem dizer e verifique que na figura das montanhas temos:

$$\max(f(x_1), f(x_2)) < \max_{x \in [x_1, x_2]} f(x)$$

$$\min_{x \in [x_2, x_3]} f(x) < \min(f(x_2), f(x_3))$$

e depois represente nas montanhas:

- b)  $\sum_{i=1}^8 (\max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x))(x_i - x_{i-1})$   
 c)  $\sum_{i=1}^8 (\min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x))(x_i - x_{i-1})$

## Partições, informalmente

Informalmente uma partição de um intervalo  $[a, b]$  é um modo de decompor  $[a, b]$  em intervalos menores consecutivos. Por exemplo,

$$[2, 7] = [2, 3.5] \cup [3.5, 4] \cup [4, 6] \cup [6, 7]$$

A definição “certa” é mais complicada... vamos vê-la daqui a pouco. O caso geral da igualdade acima é:

$$[a, b] = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \dots \cup [a_N, b_N],$$

onde:

$N$  é o número de intervalos,

$a = a_1, b = b_N$ , (“extremidades”)

$a_i < b_i$  para todo  $i$  em que isto faz sentido ( $i = 1, \dots, N$ )

$b_i = a_{i+1}$  para todo  $i$  e.q.i.f.s.; neste caso,  $i = 1, \dots, N - 1$

Um jeito prático de definir uma partição é usando uma tabela. Por exemplo, esta tabela

$i$	$a_i$	$b_i$	$I_i$
1	2	3.5	$[2, 3.5]$
2	3.5	4	$[3.5, 4]$
3	4	6	$[4, 6]$
4	6	7	$[6, 7]$

corresponde à partição de  $[2, 7]$  do início deste slide.

Compare com:

Miranda212 7.2 Integral definida

Leit5p41 (p.324) 5.5 A integral definida

StewPtCap5p8 (p.329) somas superiores e inferiores

StewPtCap5p10 (p.331) pontos amostrais

StewPtCap5p16 (p.337) definição da integral definida

Uma definição um pouco melhor de partição é a seguinte.

Digamos que  $P$  seja um subconjunto não-vazio e finito de  $\mathbb{R}$ , e que o menor elemento de  $P$  seja  $a$  e o maior seja  $b$ .

Então  $P$  é uma partição do intervalo  $[a, b]$ .

Exemplo: a partição  $P = \{2, 3.5, 4, 6, 7\}$  corresponde a:

$$[2, 7] = [2, 3.5] \cup [3.5, 4] \cup [4, 6] \cup [6, 7]$$

Pra fazer a tradução da “versão conjunto” pra “versão tabela” ponha os elementos de  $P$  em ordem e chame-os de  $b_0, \dots, b_N$ ; defina cada  $a_i$  como sendo  $b_{i-1}$  – por exemplo,  $a_1 = b_0$  – e encontre  $a, b$ , e  $N$ . Depois que você tem a “versão tabela” é bem fácil obter a “versão união de intervalos”.

Quando dizemos algo como “Seja  $P$  a partição  $\{2.5, 4, 6\}$ ” estamos criando um contexto no qual há uma partição “default” definida... e neste contexto vamos ter valores definidos para  $N, a, b$ , e para cada  $a_i$  e  $b_i$ . Por exemplo...

Seja  $P$  a partição  $\{2.5, 4, 6\}$ . Então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N f(b_i) \cdot (b_i - a_i) &= \sum_{i=1}^2 f(b_i) \cdot (b_i - a_i) \\ &= f(b_1) \cdot (b_1 - a_1) \\ &\quad + f(b_2) \cdot (b_2 - a_2) \\ &= f(4) \cdot (4 - 2.5) \\ &\quad + f(6) \cdot (6 - 4) \end{aligned}$$

## A definição de partição

Se  $P$  é um subconjunto **finito** e **não-vazio** de  $\mathbb{R}$ , então podemos interpretar  $P$  como uma partição...

Por exemplo, se  $P = \{20, 20, 42, 99, 63, 33, 20, 20\}$  então  $P = \{20, 33, 42, 63, 99, 200\}$ , e aí vamos interpretar esse conjunto de 6 pontos – ordenados em ordem crescente – como uma partição do intervalo  $I = [a, b] = [20, 200]$  em 5 subintervalos (“ $N = 5$ ”), assim:

20	33	42	63	99	200	
$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$a_1$	$b_1$					$I_1 = [a_1, b_1]$
	$a_2$	$b_2$				$I_2 = [a_2, b_2]$
		$a_3$	$b_3$			$I_3 = [a_3, b_3]$
			$a_4$	$b_4$		$I_4 = [a_4, b_4]$
				$a_5$	$b_5$	$I_5 = [a_5, b_5]$
$a$					$b$	$I = [a, b] = [x_0, x_N]$

## Exercícios sobre partições

a) Converta esta “partição”

$$[4, 12] = [4, 5] \cup [5, 6] \cup [6, 9] \cup [9, 10] \cup [10, 12]$$

para uma tabela. Neste caso quem são  $a$ ,  $b$  e  $N$ ?

b) Seja  $P = \{2.5, 3, 4, 6, 10\}$ .

Converta  $P$  para o “formato tabela” e para o “formato união de subintervalos”, que é este aqui:

$$[a, b] = [a_1, b_1] \cup \dots \cup [a_N, b_N].$$

c) Seja  $P = \{4, 2, 1, 1.5\}$ .

Interprete  $P$  como uma partição. Diga quem são o  $N$ , o  $a$  e o  $b$  dela e monte a tabela dos subintervalos dela.

d) Seja  $P = [2, 4]_6$ .

Diga quem são os pontos da partição  $P$ .

e) Seja  $P = [2, 5]_{23}$ .

Diga quem são os pontos da partição  $P$ .

### Uma dica sobre simplificação

No Ensino Médio às vezes convencem a gente de que uma fração como  $\frac{6}{4}$  **tem** que ser simplificada pra  $\frac{3}{2}$ , mas se a gente tem que listar uma sequência de números começando em 0 em que cada número novo é o anterior mais  $\frac{1}{4}$  eu acho bem melhor escrever essa sequência como

$$0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \dots$$

do que como:

$$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \dots$$

Lembre destes trechos da Dica 7: **2gT4**

“Uma solução bem escrita é fácil de ler e fácil de verificar”, e “Se as outras pessoas acharem que ler a sua solução é um sofrimento, isso é mau sinal; se as outras pessoas acharem que a sua solução está claríssima e que elas devem estudar com você, isso é bom sinal”.

## Aviso

As próximas páginas têm definições precisas de: partição, inf e sup, [inf] e [sup], integral definida, e um monte de definições intermediárias que a gente vai precisar pra entender as definições mais importantes...

*O objetivo desta parte do curso é fazer vocês aprenderem um monte de técnicas pra entenderem definições complicadas “visualizando o que elas querem dizer”. Estas técnicas vão ser uma das partes do curso que vão ser mais úteis pras matérias seguintes.*

Aparentemente cada um dos exercícios deste PDF tem um monte de “dicas” de como fazê-lo. A gente normalmente imagina que essas dicas sejam só sugestões de um modo de chegar até o resultado final, mas aqui não é bem assim...

Lembre que neste slide daqui, da “Introdução ao curso”,

2hT22 Sobre aulas expositivas

eu falei em “músculos mentais diferentes”. Essa idéia vai valer aqui também; por exemplo, nos slides sobre o “Jogo colaborativo” eu digo que é pro jogador  $P$  escrever as suas jogadas num determinado formato e pro jogador  $O$  escrever as suas respostas num outro formato, e digo que se o jogador  $P$  não entender imediatamente a resposta do jogador  $O$  é porque o jogador  $P$  tem que rever certos exercícios básicos de “set comprehensions”...

*Escrever as jogadas exatamente nesses formatos vai exercitar uma série de músculos mentais bem específicos.*

## Aviso (2)

Quando a gente vê um artista do Cirque de Soleil fazendo um número de aéreos a gente reconhece imediatamente que ele tem uma coordenação motora absurda e que ele tá usando um monte de músculos que a gente nunca usou e um monte de outros músculos que a gente nem sabia que existiam...

Quando a gente vê uma pessoa que entende bem – e que é capaz de explicar claramente – cada detalhe de uma definição bizarramente complicada como essa daqui, que o Stewart fez altos malabarismos pra ela caber em 9 linhas,

[StewPtCap5p16](#) (p.337)

é a mesma coisa, só que essa pessoa treinou músculos mentais. *Nos exercícios deste PDFzinho a gente vai treinar vários dos músculos mentais que essas pessoas mais usam – e pra isso a gente vai fazer devagar e por escrito e com desenhos muitas coisas que elas fazem de cabeça.*

Também dá pra comparar o que a gente vai fazer aqui com a historinha deste slide:

[2hT11](#) Atirei o pau no gato

Algumas mudanças de nota no Atirei o pau no gato exigem que a gente levante uns dedos da flauta ao mesmo tempo que a gente abaixa outros... a gente só consegue aprender isso treinando muitas vezes muito devagar, e enquanto a gente não treina bastante o som fica horrível.

## Um jogo colaborativo

...ou: como debugar representações gráficas.

Pense num jogo colaborativo. Os jogadores se chamam  $P$  (“proponente”), e  $O$  (“oponente”). O  $P$  quer encontrar uma representação gráfica pro conjunto  $A$ , e à primeira vista o  $O$  quer mostrar que o  $P$  está errado... mas na verdade o objetivo dos dois é fazer com que o  $P$  chegue numa representação gráfica que não tem erro nenhum.

Digamos que

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1, 2), y \in [1, 2) \}.$$

O  $P$  desenha uma representação gráfica **com um nome diferente de  $A$**  e “propõe” ela — por exemplo, o  $P$  diz isso aqui:



O oponente  $O$  diz: “verifica o ponto  $(1, 1)$ ”. Os dois verificam o ponto  $(1, 1)$  do  $A'$  e vêem que o desenho do  $A'$  é ambíguo no ponto  $(1, 1)$ , já que esse é um ponto de fronteira e o  $P$  não desenhou ele nem como linha grossa sólida nem com linha tracejada... então a resposta pra pergunta “ $(1, 1) \in A'$ ?” não é nem **V** nem **F**, é “erro”, e portanto  $A \neq A'$ , e o  $P$  ainda não conseguiu a representação gráfica certa. O oponente  $O$  ganha essa rodada, e o  $P$  tem que propôr outra representação gráfica.

Aí o  $P$  propõe uma outra representação gráfica, **com um outro nome, diferente de  $A$  e de  $A'$** . Por exemplo,  $P$  propõe isso aqui:



O oponente  $O$  diz: “verifica o ponto  $(0, 0)$ ”. Os dois verificam, e vêem que:

$$(0, 0) \notin A, \quad (0, 0) \in A''$$

E portanto  $A \neq A''$ , e o  $P$  ainda não conseguiu a representação gráfica certa. O oponente  $O$  ganha mais essa rodada.

Quando o  $P$  propõe um desenho que o  $O$  não consegue mostrar que está errado o  $P$  ganha a rodada.

Até vocês terem prática vocês vão jogar como o  $P$ , vão me mostrar as representações gráficas de vocês, e eu vou jogar como o  $O$ . Quando vocês tiverem mais prática vocês vão conseguir chutar representações gráficas (como o jogador  $P$ ) e testá-las (fazendo o papel do jogador  $O$  vocês mesmos).

## Um jogo colaborativo (2)

Represente graficamente os seguintes conjuntos:

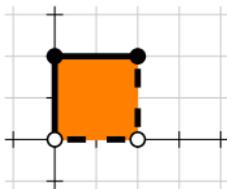
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1, 2), y \in [1, 2)\}$$

$$B = \{(x, 2x) \mid x \in [1, 2)\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \wedge x + y < 2\}$$

Dica: todos eles vão dar subconjuntos do plano feitos de infinitos pontos, e você vai ter que adaptar as convenções que usamos pra desenhar intervalos pra desenhar regiões.

Use bolinhas cheias pra indicar “este ponto pertence ao conjunto”, bolinhas ocas pra indicar “este ponto não pertence ao conjunto”, linhas grossas contínuas pra indicar “esse trecho da fronteira pertence ao conjunto” e linhas tracejadas pra indicar “esse trecho da fronteira não pertence ao conjunto”. Por exemplo:



Dica: se você não tem nenhuma prática com as duas notações da forma  $\{\dots \mid \dots\}$  – por exemplo:

$$\underbrace{\{a \in \{1, 2, 3, 4\}\}}_{\text{gerador}} \mid \underbrace{a \geq 3}_{\text{filtro}} = \{3, 4\}$$

$$\underbrace{\{10a\}}_{\text{expr}} \mid \underbrace{a \in \{1, 2, 3, 4\}}_{\text{gerador}} = \{10, 20, 30, 40\}$$

então comece fazendo alguns exercícios daqui:

**MpgP8** (até a p.12) Set Comprehensions

Todos os exercícios dessa parte do MPG dão conjuntos finitos, e os conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$  da coluna da esquerda são infinitos.

## Imagens de intervalos

Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  então em princípio a expressão  $f(\{7, 8, 9\})$  deveria dar um erro, porque  $f$  é uma função que espera receber um número, e  $\{7, 8, 9\}$  é um conjunto... mas aí normalmente a gente define que o comportamento da  $f$  quando ela recebe um conjunto vai ser este aqui:

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$$

A gente diz que  $f(A)$  é a **imagem do conjunto  $A$** .

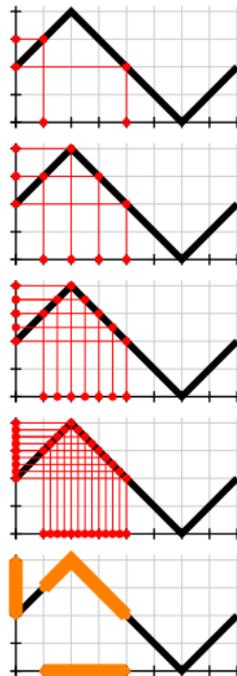
Algumas pessoas – como o Carlos, aqui: 2gT12 – acham que isto é sempre verdade:

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)].$$

**Não seja como o Carlos!!! Seja como o Bob!!!**

Nas figuras à direita temos:

$$\begin{aligned} f(\{1, 4\}) &= \{f(1), f(4)\} \\ &= \{3, 2\} \\ &= \{2, 3\} \\ f(\{1, 2, 3, 4\}) &= \{f(1), f(2), f(3), f(4)\} \\ &= \{2, 3, 4, 3\} \\ &= \{2, 3, 4\} \\ f([1, 4]) &= [2, 4] \\ [f(1), f(4)] &= [3, 2] \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid 3 \leq y \leq 2\} \\ &= \emptyset \\ &\neq f([1, 4]) \end{aligned}$$



## Imagens de intervalos: exercício

Seja  $f(x)$  esta função:



Calcule estas imagens de intervalos:

- |                |                 |
|----------------|-----------------|
| a) $f([0, 1])$ | a') $f((0, 1))$ |
| b) $f([1, 2])$ | b') $f((1, 2))$ |
| c) $f([0, 2])$ | c') $f((0, 2))$ |
| d) $f([2, 3])$ | d') $f((2, 3))$ |
| e) $f([1, 3])$ | e') $f((1, 3))$ |
| f) $f([0, 3])$ | f') $f((0, 3))$ |
| g) $f([0, 4])$ | g') $f((0, 4))$ |
| h) $f([4, 8])$ | h') $f((4, 8))$ |
| i) $f([0, 8])$ | i') $f((0, 8))$ |
| j) $f([1, 7])$ | j') $f((1, 7))$ |

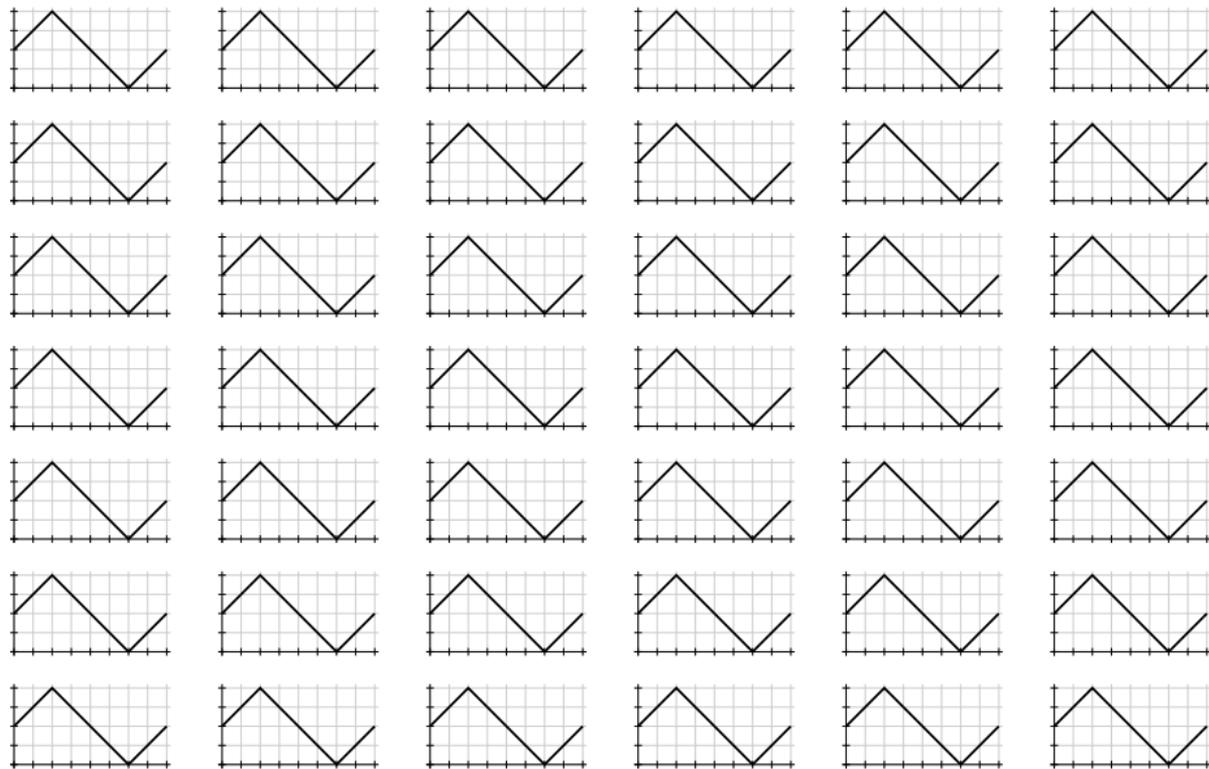
**Dicas:**

1) Faça os itens (a) até (j) primeiro. Os itens (a') até (j') são bem mais difíceis, e em alguns deles os resultados vão ser conjuntos fechados ou “semi-abertos”.

2) O Leithold define intervalos semi-abertos aqui: [Leit1p7](#)

3) Nos casos em que você tiver dificuldade de encontrar o  $f(I)$  desenhe num gráfico só:

a função  $f(x)$ ,  
 o conjunto  $I$  (no eixo  $x$ ),  
 o conjunto  $\{(x, f(x)) \mid x \in I\}$   
 (sobre o gráfico da  $f$ ),  
 e o conjunto  $f(I)$  (no eixo  $y$ ).



## As definições de inf e sup

Digamos que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $B \subset \mathbb{R}$ .

Vamos definir  $\inf(f(B))$  e  $\sup(f(B))$  —  
e também  $\inf(D)$  e  $\sup(D)$ , pra  $D \subset \mathbb{R}$  —  
desta forma:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

$$C = \{(x, f(x)) \mid x \in B\}$$

$$D = \{f(x) \mid x \in B\}$$

$$E = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in B. f(x) = y\}$$

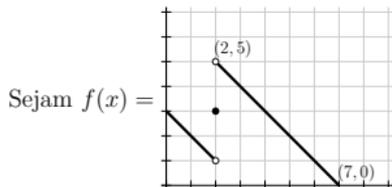
$$U = \{y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall d \in D. d \leq y\}$$

$$L = \{y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall d \in D. y \leq d\}$$

$$(\alpha = \sup(D)) = \alpha \in U \wedge (\forall u \in U. \alpha \leq u)$$

$$(\beta = \inf(D)) = \beta \in L \wedge (\forall \ell \in L. \ell \leq \beta)$$

## Agora uma função descontínua



e  $B = [1, 3]$ .

### Exercício

a) Represente graficamente estes conjuntos — as definições deles são as mesmas do slide anterior:

$$\begin{aligned} C &= \{ (x, f(x)) \mid x \in B \} \\ D &= \{ f(x) \mid x \in B \} \\ E &= \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in B. f(x) = y \} \\ U &= \{ y \in \mathbb{R} \mid \forall d \in D. d \leq y \} \\ L &= \{ y \in \mathbb{R} \mid \forall d \in D. y \leq d \} \end{aligned}$$

Dica pro  $L$  e pro  $U$ : desenhe o infinito perto, como aqui:

2eT40 Uma figura

Lembre que

$$\begin{aligned} B &= [1, 3] \\ D &= f(B) \end{aligned}$$

e que definimos o inf e o sup desta forma:

$$\begin{aligned} (\alpha = \sup(D)) &= \alpha \in U \wedge (\forall u \in U. \alpha \leq u) \\ (\beta = \inf(D)) &= \beta \in L \wedge (\forall \ell \in L. \ell \leq \beta) \end{aligned}$$

Isso é uma definição estranha e indireta... pode ser que a gente calcule ( $42 = \inf(D)$ ) e ( $99 = \inf(D)$ ) por ela e os dois dêem verdadeiro – se isso acontecer então  $\inf(D)$  não vai um número!!!

### Exercício (cont.)

Calcule:

- $(6 = \sup(D))$
- $(5 = \sup(D))$
- $(4 = \sup(D))$
- $(2 = \sup(D))$
- $(1 = \sup(D))$
- $(0 = \sup(D))$

## “Para todo” ( $\forall$ ) e “existe” ( $\exists$ )

$$\begin{aligned}
 (\forall a \in \{2, 3, 5\}.a^2 < 10) &= (a^2 < 10)[a := 2] \wedge \\
 &\quad (a^2 < 10)[a := 3] \wedge \\
 &\quad (a^2 < 10)[a := 5] \\
 &= (2^2 < 10) \wedge (3^2 < 10) \wedge (5^2 < 10) \\
 &= (4 < 10) \wedge (9 < 10) \wedge (25 < 10) \\
 &= \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \\
 &= \mathbf{F}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\exists a \in \{2, 3, 5\}.a^2 < 10) &= (a^2 < 10)[a := 2] \vee \\
 &\quad (a^2 < 10)[a := 3] \vee \\
 &\quad (a^2 < 10)[a := 5] \\
 &= (2^2 < 10) \vee (3^2 < 10) \vee (5^2 < 10) \\
 &= (4 < 10) \vee (9 < 10) \vee (25 < 10) \\
 &= \mathbf{V} \vee \mathbf{V} \vee \mathbf{F} \\
 &= \mathbf{V}
 \end{aligned}$$

## Visualizando ‘ $\forall$ ’s e ‘ $\exists$ ’s

Dá pra *visualizar* o que a expressão

$$(\forall x \in \{1, \dots, 7\}. 2 \leq x < 4 \vee x = 6)$$

“quer dizer” visualizando os ‘**V**’s e ‘**F**’s de expressões mais simples, e combinando esses “mapas” de ‘**V**’s e ‘**F**’s. E digamos que:

$$\begin{aligned} F(x) &= (2 \leq x), \\ G(x) &= (x \leq 4), \\ H(x) &= (x = 6) \end{aligned}$$

Então temos:

$$\begin{aligned} &(\forall x \in \{1, \dots, 7\}. 2 \leq x < 4 \vee x = 6) \\ = &(\forall x \in \{1, \dots, 7\}. (2 \leq x \wedge x < 4) \vee x = 6) \\ = &(\forall x \in \{1, \dots, 7\}. (F(x) \wedge G(x)) \vee H(x)) \end{aligned}$$

Às vezes vamos ter que fazer figuras com muitos ‘**V**’s e ‘**F**’s, e vai ser mais fácil visualizar onde estão os ‘**V**’s e ‘**F**’s delas se usarmos sinais mais fáceis de distinguir...

Vou usar essa convenção aqui:

O **V** é uma bolinha preta, ou sólida: ●

O **F** é uma bolinha branca, ou oca: ○

Compare:

$$\begin{aligned} (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. 2 \leq x) &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \\ (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. x < 4) &= \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. 2 \leq x < 4) &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. x = 6) &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. 2 \leq x < 4 \vee x = 6) &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. F(x)) &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \\ (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. G(x)) &= \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. F(x) \wedge G(x)) &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. H(x)) &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. F(x) \wedge G(x) \vee H(x)) &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. F(x)) &= \circ \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \bullet \\ (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. G(x)) &= \bullet \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \\ (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. F(x) \wedge G(x)) &= \circ \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \\ (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. H(x)) &= \circ \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \wedge \bullet \wedge \circ \\ (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. F(x) \wedge G(x) \vee H(x)) &= \circ \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \circ \wedge \circ \wedge \bullet \wedge \circ \end{aligned}$$

É isso que a gente vai fazer pra analisar expressões como  $(\forall x \in A. \_\_\_\_)$  e  $(\exists x \in A. \_\_\_\_)$  e descobrir quais são verdadeiras e quais não — **mesmo quando o conjunto  $A$  é um conjunto infinito**, como  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $[2, 10]$ .

Você **pode** fazer as suas próprias definições — como o meu “● = **V** e ○ = **F**” — mas elas **têm** que ficar claras o suficiente... releia isto:

2gT4 “Releia a Dica 7”

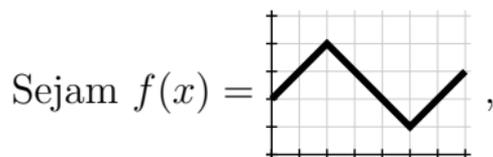
## Retângulos acima e abaixo

Lembre que eu contei que em cursos tradicionais de Cálculo 2 – aqueles em que as pessoas passam centenas de horas fazendo contas à mão, e mais outras centenas de horas estudando por aqueles livros que fingem que certas coisas difíceis são óbvias – as pessoas acabam aprendendo algumas coisas super úteis que não aparecem listadas explicitamente no programa do curso...

Uma dessas coisas é aprender a entender definições que *aparentemente* envolvem um número infinito de contas. Se a gente for como o Bob a gente consegue visualizar o que essas definições “querem dizer”.

As definições formais de “retângulo acima (ou abaixo) da curva” e “melhor retângulo acima (ou abaixo) da curva” são assim – elas aparentemente precisam de infinitas contas.

## Instruções de desenho (explícitas)



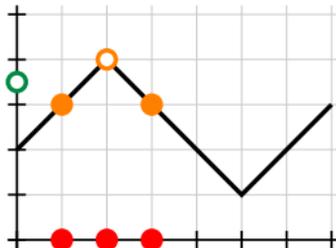
$$e \ P(y) = \forall x \in \{1, 2, 3\}. f(\underbrace{x}_{\text{em } (x,0)}) < y.$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{em } (0,y)}$$

As anotações sob as chaves são “instruções de desenho” que o Bob vai usar pra calcular cada  $P(y)$  de cabeça, e pra visualizar o que  $P(y)$  “quer dizer”...

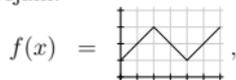
Na próxima página eu fiz as figuras pra  $P(3.5)$ .

$$\begin{aligned}
P(3.5) &= \forall x \in \{1, 2, 3\}. \underbrace{f(\underbrace{x}_{\text{em}(x,0)})}_{\text{em}(x,f(x))} < 3.5 \\
&= \underbrace{(f(\underbrace{1}_{\text{em}(1,0)}) < 3.5) \wedge (f(\underbrace{2}_{\text{em}(2,0)}) < 3.5) \wedge (f(\underbrace{3}_{\text{em}(3,0)}) < 3.5)}_{\text{em}(0,3.5)} \\
&= \underbrace{(3 < 3.5) \wedge (4 < 3.5) \wedge (3 < 3.5)}_{\text{em}(0,3.5)} \\
&= \underbrace{\left( \underbrace{\bullet}_{\text{em}(1,3)} \right) \wedge \left( \underbrace{\circ}_{\text{em}(2,4)} \right) \wedge \left( \underbrace{\bullet}_{\text{em}(3,3)} \right)}_{\text{em}(0,3.5)} \\
&= \underbrace{\circ}_{\text{em}(0,3.5)}
\end{aligned}$$



## Instruções de desenho: exercício

Sejam:



$$P(y) = \forall x \in \{1, 2, 3\}. f(x) < y,$$

$$Q(y) = \forall x \in \{1, 2, 3\}. f(x) \leq y,$$

$$R(y) = \forall x \in \{1, 2, 3\}. f(x) \geq y,$$

$$S(y) = \forall x \in \{1, 2, 3\}. f(x) > y,$$

$$P'(y) = \forall x \in [3, 5]. f(x) < y,$$

$$Q'(y) = \forall x \in [3, 5]. f(x) \leq y,$$

$$R'(y) = \forall x \in [3, 5]. f(x) \geq y,$$

$$S'(y) = \forall x \in [3, 5]. f(x) > y.$$

Para cada uma das expressões à direita visualize-a, represente-a graficamente numa das cópias do gráfico da  $f(x)$  da próxima página, e dê o resultado dela.

Note que aqui eu não estou dando instruções de desenho *explícitas* – você vai ter que escolher como você vai fazer pra visualizar cada expressão.

a)  $P(3.5), P(3.0), \dots, P(0.5)$

b)  $Q(3.5), Q(3.0), \dots, Q(0.5)$

c)  $R(3.5), R(3.0), \dots, R(0.5)$

d)  $S(3.5), S(3.0), \dots, S(0.5)$

e)  $P'(3.5), P'(3.0), \dots, P'(0.5)$

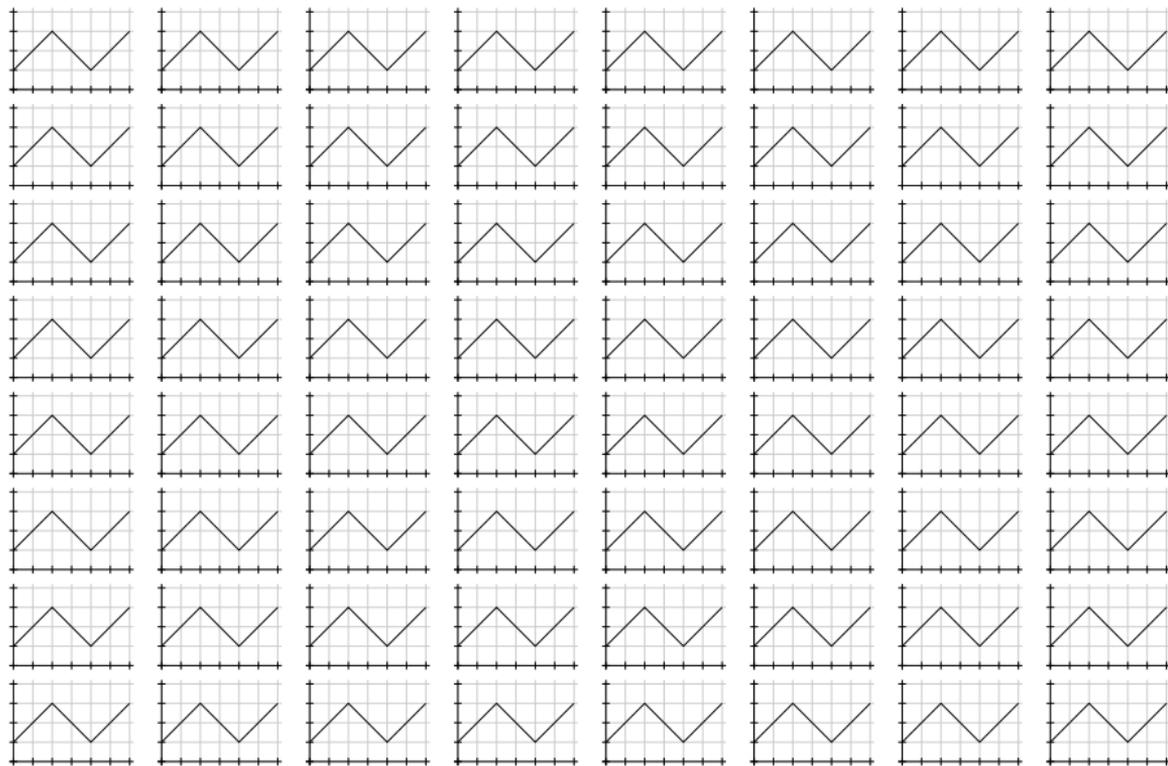
f)  $Q'(3.5), Q'(3.0), \dots, Q'(0.5)$

g)  $R'(3.5), R'(3.0), \dots, R'(0.5)$

h)  $S'(3.5), S'(3.0), \dots, S'(0.5)$

Nos itens (e) até (f) os seus desenhos vão ter infinitas bolinhas... aliás, você vai ter que fazer desenhos que *finjam* que têm infinitas bolinhas, e nos quais o leitor consiga entender o que você quis representar... veja este slide antigo:

[2dT142](#) “E pra conjuntos infinitos?”



## Instruções de desenho: outro exercício

A seção “Mais sobre bolinhas” daqui:

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2-4.pdf#page=29>

tem dicas sobre como visualizar subconjuntos “definidos por proposições”, como este aqui:

$$\{x \in A \mid P(a)\}$$

A gente primeiro marca cada ponto de  $A$  com uma bolinha ou preta ou branca, e depois a gente pega o conjunto das bolinhas pretas e interpreta ele como um outro conjunto – o resultado.

Use isto pra visualizar cada um dos conjuntos à direita e pra encontrar uma descrição mais simples para cada um deles. Geralmente essas “descrições mais simples” vão ser em notação de intervalos.

As funções  $P, \dots, S, P', \dots, S'$  são as do exercício 8. O símbolo  $\overline{\mathbb{R}}$  denota a “reta real estendida”:

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{R}} &= \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \\ &= (-\infty, +\infty) \cup \{-\infty, +\infty\} \\ &= [-\infty, +\infty]\end{aligned}$$

Para mais detalhes, veja:

[https://en.wikipedia.org/wiki/Extended\\_real\\_number\\_line](https://en.wikipedia.org/wiki/Extended_real_number_line)

a)  $\{y \in [0, 3] \mid P(y)\}$

b)  $\{y \in [0, 3] \mid Q(y)\}$

c)  $\{y \in [0, 3] \mid R(y)\}$

d)  $\{y \in [0, 3] \mid S(y)\}$

a')  $\{y \in [0, 3] \mid P'(y)\}$

b')  $\{y \in [0, 3] \mid Q'(y)\}$

c')  $\{y \in [0, 3] \mid R'(y)\}$

d')  $\{y \in [0, 3] \mid S'(y)\}$

e)  $\{y \in \mathbb{R} \mid P(y)\}$

f)  $\{y \in \mathbb{R} \mid Q(y)\}$

g)  $\{y \in \mathbb{R} \mid R(y)\}$

h)  $\{y \in \mathbb{R} \mid S(y)\}$

i)  $\{y \in \overline{\mathbb{R}} \mid P(y)\}$

j)  $\{y \in \overline{\mathbb{R}} \mid Q(y)\}$

k)  $\{y \in \overline{\mathbb{R}} \mid R(y)\}$

l)  $\{y \in \overline{\mathbb{R}} \mid S(y)\}$

## Algumas somas de Riemann

Vou definir:

$$\begin{aligned}
 [L] &= \sum_{i=1}^N f(a_i)(b_i - a_i) \\
 [R] &= \sum_{i=1}^N f(b_i)(b_i - a_i) \\
 [\text{Trap}] &= \sum_{i=1}^N \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i - a_i) \\
 [M] &= \sum_{i=1}^N f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)(b_i - a_i) \\
 [\min] &= \sum_{i=1}^N \min(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
 [\max] &= \sum_{i=1}^N \max(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
 [\inf] &= \sum_{i=1}^N \inf(f([a_i, b_i]))(b_i - a_i) \\
 [\sup] &= \sum_{i=1}^N \sup(f([a_i, b_i]))(b_i - a_i)
 \end{aligned}$$

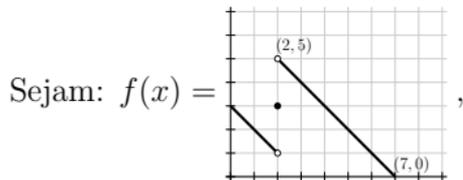
Compare com: os exercícios das montanhas, as páginas 208–210 do Miranda ([Miranda208](#)), e: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Soma\\_de\\_Riemann](https://pt.wikipedia.org/wiki/Soma_de_Riemann)

Nas duas últimas linhas o  $f([a_i, b_i])$  é a **imagem de um intervalo**. Temos:

$$\begin{aligned}
 f(A) &= \{f(a) \mid a \in A\} \\
 f(\{7, 8, 9\}) &= \{f(a) \mid a \in \{7, 8, 9\}\} \\
 &= \{f(7), f(8), f(9)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[a, b]_N &= \{a + k(\frac{b-a}{N}) \mid k \in \{0, \dots, N\}\} \\
&= \{a + 0(\frac{b-a}{N}), a + 1(\frac{b-a}{N}), \dots, a + N(\frac{b-a}{N})\} \\
&= \{a, a + \frac{b-a}{N}, a + 2\frac{b-a}{N}, a + 3\frac{b-a}{N}, \dots, b\} \\
\overline{\int}_P f(x) dx &= [\sup]_P \\
&= \sum_{i=1}^N \sup(f([a_i, b_i]))(b_i - a_i) \\
\underline{\int}_P f(x) dx &= [\inf]_P \\
&= \sum_{i=1}^N \inf(f([a_i, b_i]))(b_i - a_i) \\
\overline{\int}_P f(x) dx &= \overline{\int}_P f(x) dx - \underline{\int}_P f(x) dx \\
\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x) dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\int}_{[a, b]_{2^k}} f(x) dx \\
\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x) dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{\int}_{[a, b]_{2^k}} f(x) dx \\
\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x) dx &= \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x) dx - \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x) dx \\
\left(\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx \text{ existe}\right) &= \left(\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x) dx\right) \\
&= \left(\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x) dx = 0\right) \\
\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx &= \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x) dx \quad (\text{se a integral existir}) \\
&= \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x) dx \quad (\text{se a integral existir})
\end{aligned}$$

## Aproximações por cima e por baixo



$$P = \{3, 4, 5\},$$

$$Q = \{1, 3, 4, 5\},$$

e **por enquanto** considere que:

$$\sup(f(B)) = \max_{x \in B} f(x) \quad \text{e}$$

$$\inf(f(B)) = \min_{x \in B} f(x).$$

### Exercício.

Represente graficamente:

a)  $\overline{\int}_P f(x) dx$

b)  $\underline{\int}_P f(x) dx$

c)  $\overline{\int}_P f(x) dx$

d)  $\overline{\int}_Q f(x) dx$

e)  $\underline{\int}_Q f(x) dx$

f)  $\overline{\int}_Q f(x) dx$

g)  $\overline{\int}_{[1,5]_2} f(x) dx$

h)  $\underline{\int}_{[1,5]_4} f(x) dx$

# Cálculo 2 - 2023.2

Aula 16: a função de Dirichlet

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2023.2-C2.html>

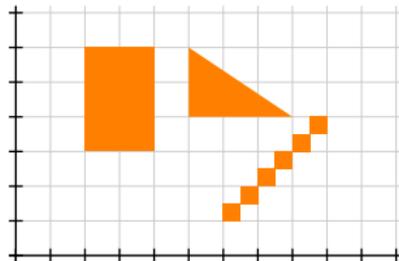
## Links

[2gQ39](#) (2023.1) Quadros da aula 19 (06/jun/2023)

## Áreas no olhómetro

A partir daqui eu vou supor que todo mundo sabe calcular determinadas áreas “no olho” — contando quadradinhos, fazendo “base  $\cdot$  altura” (pra retângulos), ou fazendo “(base  $\cdot$  altura)/2” (pra triângulos)...

Tente calcular a área da figura abaixo de cabeça.  
Se você não conseguir peça ajuda URGENTE!!!



## A função de Dirichlet

A *função de Dirichlet* é definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{quando } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{quando } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ela não tem um nome oficial, então vamos chamá-la de ‘ $f$ ’ nos próximos slides.

O gráfico dela alterna freneticamente entre  $y = 0$  e  $y = 1$ .

Lembre que:

os números racionais são os cuja expansão decimal é “periódica”, e os irracionais são os que não são assim; entre cada dois racionais diferentes há um irracional, e entre cada dois irracionais diferentes há um racional...

## A função de Dirichlet (2)

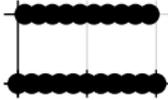
Lembre que podemos obter um irracional entre, digamos,  $a = \frac{10}{7} = 1.428571\underline{42857}$  e  $b = \frac{1285715}{900000} = 1.42857\underline{2}$ , modificando a expansão decimal de um deles e trocando-a pela expansão decimal de  $\sqrt{2}$  a partir de um certo ponto... Por exemplo:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1.41421356237\dots \\ b &= 1.42857\underline{222222}\dots \\ c &= 1.42857156237\dots \\ a &= 1.428571\underline{42857}\dots\end{aligned}$$

Neste caso temos  $a < c < b$ , com  $a, b \in \mathbb{Q}$  e  $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .  
Dá pra fazer algo parecido pra obter um racional entre dois irracionais.

### A função de Dirichlet (3)

Dá pra desenhar o gráfico da função de Dirichlet assim:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{quando } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{quando } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} = \text{img}$$


Repare que isso só funciona porque o desenho é claramente ambíguo... um leitor “normal” não consegue descobrir no olho quais são as coordenadas das bolinhas em  $y = 1$  e em  $y = 0$ , então ele é obrigado a olhar pra definição formal da  $f(x)$ ...

e aí quando ele entende a definição formal da  $f(x)$  ele descobre que o desenho quer dizer “muitas bolinhas em  $y = 1$ , muito próximas umas das outras, e muitas bolinhas em  $y = 0$  muito próximas das outras”...

...e ele entende que esse “muitas” quer dizer “infinitas”.

**Exercício 19.**

A função de Dirichlet é um dos exemplos mais simples de uma função que não é integrável.

Sejam  $f(x)$  a função de Dirichlet,

$$e d_k = \int_{[0,1]_{2^k}} f(x) dx.$$

- a) Represente graficamente  $d_0, d_1, d_2, d_3$ .
- b) Calcule no olhômetro o limite  $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k$ .  
(Dica: esse limite não dá zero...)
- c) Represente graficamente  $[\max]_{[0,1]_{2^2}}$  e  $[\min]_{[0,1]_{2^2}}$ .  
(Dica: o método do máximo “não enxerga” os pontos com  $y = 1$ ...)

# Cálculo C2 - 2023.2

Aula 16: o TFC1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2023.2-C2.html>

## Links

[2hT27](#) (2023.2) Exercício 1: faça um gráfico da  $G'(x)$

[2hT32](#) (2023.2) Exercício 5:  $G(x) = \int_{t=3}^{t=x} g(t) dt$

[StewPtCap2p26](#) (p.97) O teorema do confronto

[StewPtCap5p30](#) (p.351) TFC1

[StewPtCap5p31](#) (p.352) TFC1, demonstraçãõ

[Leit2p61](#) (p.114) 2.8 Teorema do confronto ou do sanduíche

[Leit5p62](#) (p.345) 5.8.1 TFC1

[MirandaP29](#) Teorema do confronto

[MirandaP225](#) TFC1

[RossAp38](#) (p.291) Fundamental Theorem of Calculus

## Introdução (2021.2)

Digamos que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função integrável.

Digamos que  $c \in [a, b]$ .

Digamos que a função  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é **definida** por:

$$F(t) = \int_{x=c}^{x=t} f(x) dx.$$

O TFC1 tem duas versões.

A versão mais simples diz o seguinte:

se a função  $f$  é contínua então para todo  $t \in (a, b)$  vale:

$$F'(t) = f(t). \quad (*)$$

A versão mais complicada do TFC1, que vamos ver depois, não supõe que a função  $f$  é contínua.

Nós vamos ver um argumento visual que mostra que a igualdade (\*) é verdade. Esse argumento visual é **quase** uma demonstração formal, num sentido que eu vou explicar depois.

## Introdução (2)

Digamos que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função **contínua**.

Digamos que  $c \in [a, b]$ .

Digamos que a função  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é **definida** por:

$$F(t) = \int_{x=c}^{x=t} f(x) dx.$$

Então:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(t + \varepsilon) - F(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{x=c}^{x=t+\varepsilon} f(x) dx - \int_{x=c}^{x=t} f(x) dx}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x) dx}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x) dx \\ &\stackrel{???}{=} f(t) \end{aligned}$$

### Introdução (3)

Digamos que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função **contínua**.

Digamos que  $c \in [a, b]$ .

Digamos que a função  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é **definida** por:

$$F(t) = \int_{x=c}^{x=t} f(x) dx.$$

O nosso argumento visual vai mostrar que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x) dx = f(t).$$

**Primeiro exemplo:**

$f(x)$  é a nossa parábola preferida, e  $t = 1$ .

Primeira figura:  $\varepsilon = 2$ .

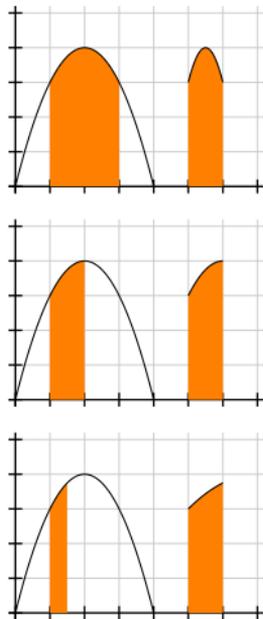
Segunda figura:  $\varepsilon = 1$ .

Terceira figura:  $\varepsilon = 1/2$ .

À esquerda:  $\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x) dx$ .

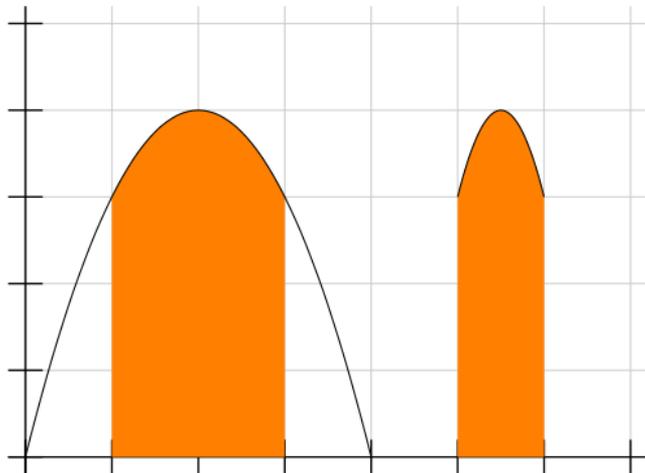
À direita:  $\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x) dx$ .

Repare que a área em laranja à esquerda sempre tem base  $\varepsilon$  e a área em laranja à direita sempre tem base  $\varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1$ .



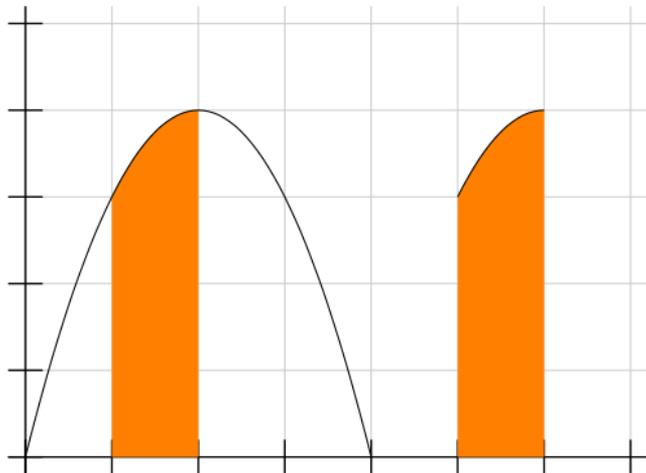
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad e$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad \text{quando } \varepsilon = 2:$$



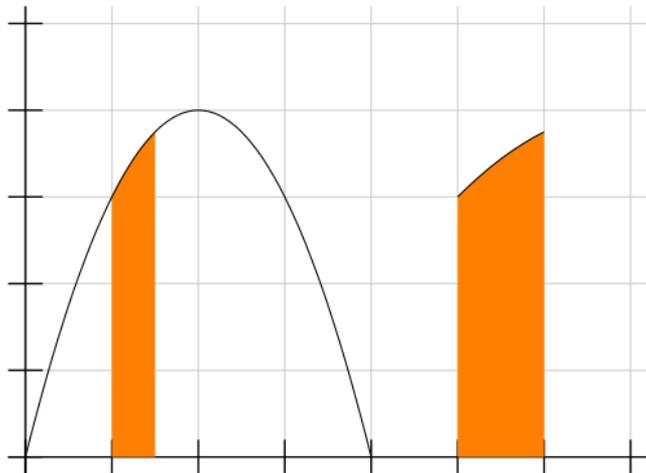
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad e$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1:$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad e$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/2:$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad e$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/4:$$



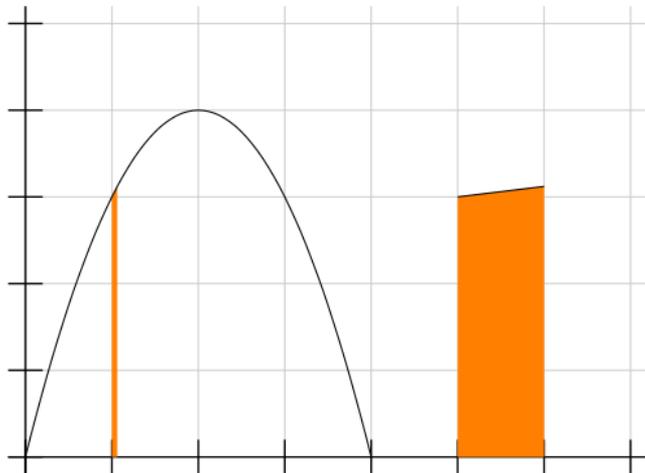
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad e$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/8:$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad e$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/16:$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad e$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/32:$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad e$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/64:$$



## Agora com $\varepsilon$ negativo!...

$f(x)$  é a nossa parábola preferida, e  $t = 1$ .

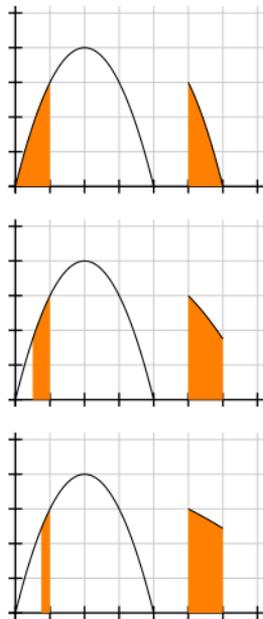
Primeira figura:  $\varepsilon = -1$ .

Segunda figura:  $\varepsilon = -1/2$ .

Terceira figura:  $\varepsilon = -1/4$ .

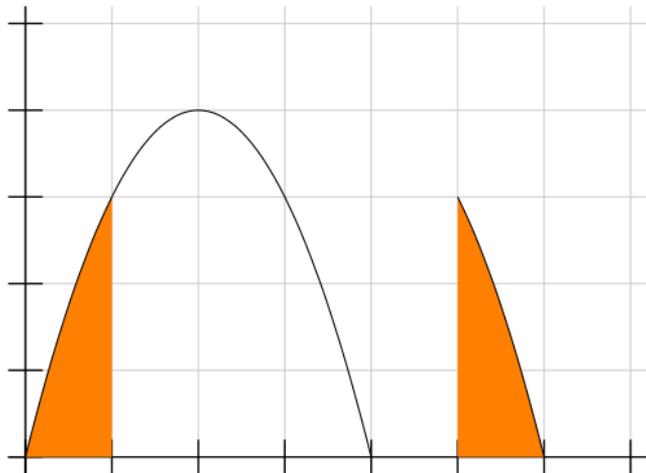
À esquerda:  $\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x) dx$ .

À direita:  $\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x) dx$ .



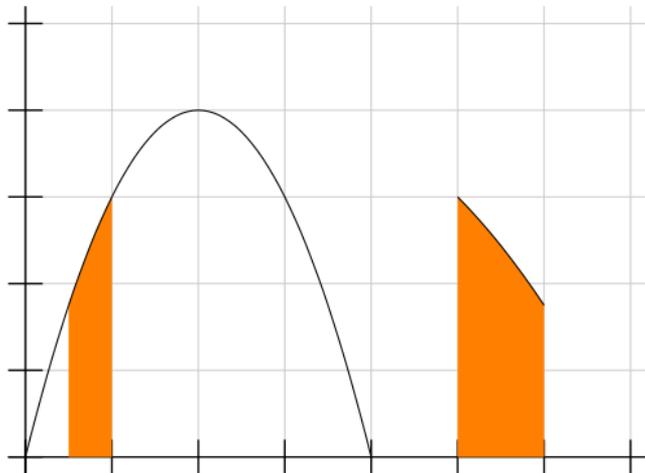
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad e$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1:$$



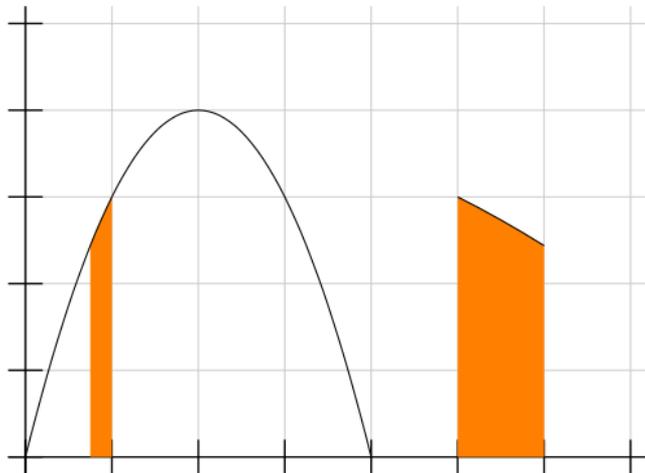
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad e$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/2:$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad e$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/4:$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad e$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/8:$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad e$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/16:$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad e$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/32:$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad e$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x) dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/64:$$



**Exercício 5.**

Seja  $f(x)$  a função à direita.

Seja  $t = 2$ .

a) Desenhe  $\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x) dx$   
para  $\varepsilon = 2$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\varepsilon = 1/2$ .

b) Desenhe  $\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x) dx$   
para  $\varepsilon = -2$ ,  $\varepsilon = -1$ ,  $\varepsilon = -1/2$ .

Dica: comece entendendo as áreas em laranja à direita!

c) Quanto você acha que dá  
 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x) dx$ ?

d) Quanto você acha que dá  
 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x) dx$ ?



**Exercício 6.**

Seja  $f(x)$  a função à direita.

Seja  $t = 2$ .

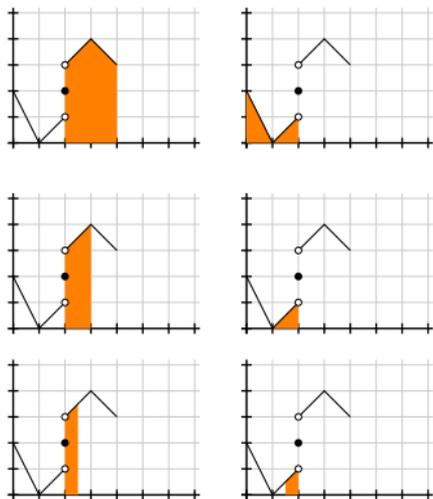
a) Desenhe  $\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x) dx$   
para  $\varepsilon = 2$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\varepsilon = 1/2$ .

b) Desenhe  $\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x) dx$   
para  $\varepsilon = -2$ ,  $\varepsilon = -1$ ,  $\varepsilon = -1/2$ .

Dica: comece entendendo as áreas em laranja à direita!

c) Quanto você acha que dá  
 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x) dx$ ?

d) Quanto você acha que dá  
 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x) dx$ ?



# Cálculo 2 - 2023.2

Dicas pra P1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2023.2-C2.html>

## Sobre as questões

A P1 vai ter uma questão de derivar e integrar funções no olhômetro, como essas daqui:

**2hT32** (2023.2) Exercício 5

**2gT111** (2023.1) P1, questão 5

**2gT117** (2023.1) P1, questão 5, gabarito

Essa questão vai valer 1.0 (pontos).

A P1 vai ter uma questão de “mostre que neste caso aqui a fórmula do TFC<sup>2</sup> dá um resultado errado”, como esta:

**2fT110** (2022.2) P1, questão 3

**2fT114** (2022.2) P1, questão 3, gabarito

A P1 vai ter uma questão de substituição trigonométrica em que o “termo malvado” vai ser da forma  $\sqrt{1-s^2}$ , como estas: isso é esse aqui,

**2gT50** (2023.1) Caixinhas com mais anotações (2)

**2gT110** (2023.1) P1, questão 1

**2gT113** (2023.1) P1, questão 1, gabarito

A P1 vai ter uma questão de “substituição não trigonométrica”, como esta aqui:

**2gT111** (2023.1) P1, questão 2

**2gT114** (2023.1) P1, questão 2, gabarito

A P1 vai ter uma questão de frações parciais da forma  $\int \frac{ax+b}{x^2+cx+d} dx$ . O melhor modo de estudar pra ela é fazendo o exercício 8 daqui,

**2hT95** Funções racionais

que depende de todos os exercícios anteriores.

A VR e a VS vão ter questões de substituição trigonométrica com termos malvados mais complicados e vão ter questões de frações parciais com frações impróprias. *Faça uma boa P1 e a uma boa P2 e não fique nem em VR nem em VS!!!*

Aqui tem um exemplo de substituição trigonométrica em que o termo malvado é mais complicado:

**2fT109** (2022.2) P1, questão 1

**2fT112** (2022.2) P1, questão 1, gabarito

## Mais dicas

Leia todos os slides da introdução ao curso:

2hT2 Aula 0: introdução ao curso

Nas provas de Cálculo 2 a gente corrige o que você escreveu, não o que você pensou. Nas matérias de matemática mais básicas você pode vir na vista de prova, mostrar que você pensou a coisa certa, e ganhar um monte de pontos com isso – mas em Cálculo 2 não dá pra fazer isso, porque um dos objetivos principais de Cálculo 2 é fazer as pessoas aprenderem a escrever e forçar as pessoas a treinarem jeitos de escrever...

Releia a Dica 7!!!

Alguns erros de sintaxe são considerados graves – como por exemplo escrever “ $\int_{x=2}^{x=3}$ ” ou “ $\int_{x=2}^{x=3} \cos x$ ” ao invés de “ $\int_{x=2}^{x=3} \cos x dx$ ”. Tratar essas abreviações informais como erros graves é um truque pra forçar as pessoas a aprenderem os jeitos certos de definir abreviações.

Por enquanto vocês estão começando a aprender a definir funções e conjuntos, e muitas pessoas já estão tendo uma dificuldade enorme pra escrever os “sejas” e pra nomear as funções e conjuntos; o jeito certo de definir abreviações envolve dificuldades conceituais ainda maiores, que a gente vai ver depois.

Os livros usam “ $\int_2^3 \cos x dx$ ” ao invés de “ $\int_{x=2}^{x=3} \cos x dx$ ” – e você pode usar isso também.

Não escrever os sinais de ‘=’ é um erro **GRAVÍSSIMO** que pode fazer você tirar **ZERO** na questão. Isso é porque eu vou interpretar cada ‘=’ como uma afirmação e analisar cada afirmação que você fez pra ver se ela faz sentido e se os detalhes dela estão certos, e se você não escrever os ‘=’s eu não consigo apontar pras afirmações que eu vou analisar... e aí fica muito mais difícil corrigir a questão e muitíssimo mais difícil discutir ela na vista de prova. *Releia a Dica 3!*

Alguns ‘=’s não são afirmações, são coisas como “queremos que”, “vamos testar se”. *Comece a treinar usar essas partículas em português, elas vão ser importantíssimas na P2!*

Usar ‘→’ ou ‘⇒’ **ao invés de ‘=’** é um erro grave mas não gravíssimo. Isso é porque eu sei que regras usar pra julgar se um ‘=’ está certo e se ele é fácil de justificar, mas eu não sei quais são as regras que os ‘→’s e ‘⇒’s devem obedecer... e eu nem sei onde encontrar livros e vídeos que usem ‘→’ e ‘⇒’ ao invés de ‘=’. *Se você conhecer algum me mande o link!*

Na P1 você não vai precisar usar o [=] pra nada – por enquanto ele é só algo que a gente usou pra discutir certas operações que as pessoas já deveriam saber fazer de cabeça. Na P2 a gente vai usar ele um pouquinho pra obter casos particulares.

# Cálculo 2 - 2023.2

Aulas 19 e 21: volumes

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2023.2-C2.html>

## Links

- [StewPtCap6p12](#) (p.389) 6.2 Volumes  
[StewPtCap6p13](#) (p.390) volume da esfera  
[StewPtCap6p18](#) (p.395) pirâmide de base quadrada  
[StewPtCap6p20](#) (p.397) Exercícios: **façam do 1 ao 5!**  
[StewPtCap8p17](#) (p.500) trombeta de Gabriel  
[StewPtCap13p18](#) (p.768) 13.3 Comprimento de Arco e Curvatura  
[StewPtCap15p6](#) (p.874) 15.1 Integrais múltiplas sobre retângulos  
[StewPtCap15p9](#) (p.877) aproximações do volume  
[Miranda285](#) 9.3 Volume  
[Miranda288](#) O volume da esfera de raio  $r$  é  $\frac{4}{3}\pi r^3$   
[Miranda285](#) 9.3.1 Secções transversais  
[Miranda289](#) 9.3.2 Sólidos de revolução  
[Miranda292](#) **Façam os exercicios 2, 3, 4 e 5!**  
[Leit6p3](#) (p.374) 6.1 Volumes de sólidos por cortes  
[Leit6p17](#) (p.388) 6.3 Comprimento de arco  
  
[3cT75](#) Pirâmide (3D)  
[2gT105](#) Um jogo colaborativo  
[2gT137](#) P2 de 2023.1, questão sobre volumes  
  
 Quadros de 2023.2:  
[2hQ47](#) Quadros da aula 19 (09/out/2023)  
[2hQ49](#) Quadros da aula 21 (11/out/2023)  
  
 Quadros de 2023.1:  
[2gQ59](#) Quadros da aula 27 (4/julho/2023)

# Exercício 1

Sejam:

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \\ B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\} \\ C &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\} \\ D &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x\} \\ E &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq x\} \\ [x = \alpha] &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \alpha\} \\ [y = \beta] &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \beta\} \\ [[x = \alpha]] &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \alpha\} \\ [[y = \beta]] &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = \beta\} \\ [[z = \gamma]] &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \gamma\} \end{aligned}$$

Lembre das técnicas do “jogo colaborativo”, e:

- Represente graficamente  $A$ .
- Represente graficamente  $B$ .
- Represente graficamente  $C$ .
- Represente graficamente  $D$ .
- Represente graficamente  $E$ .
- Represente num gráfico só  $A$  e  $A \cap [x = 0.5]$ . Qual é o comprimento de  $A \cap [x = 0.5]$ ?
- Represente num gráfico só  $B$  e  $B \cap [x = 0.5]$ . Qual é o comprimento de  $B \cap [x = 0.5]$ ?
- Represente num gráfico só  $D$  e  $D \cap [[x = 0.5]]$ . Qual é a área de  $D \cap [[x = 0.5]]$ ?
- Represente num gráfico só  $D$  e  $D \cap [[y = 0.5]]$ . Qual é a área de  $D \cap [[y = 0.5]]$ ?
- Represente num gráfico só  $D$  e  $D \cap [[z = 0.5]]$ . Qual é a área de  $D \cap [[z = 0.5]]$ ?
- Represente num gráfico só  $E$  e  $E \cap [[x = 0.5]]$ . Qual é a área de  $E \cap [[x = 0.5]]$ ?
- Represente num gráfico só  $E$  e  $E \cap [[y = 0.5]]$ . Qual é a área de  $E \cap [[y = 0.5]]$ ?
- Represente num gráfico só  $E$  e  $E \cap [[z = 0.5]]$ . Qual é a área de  $E \cap [[z = 0.5]]$ ?

Calcule:

n) área( $E \cap [[x = 0.2]]$ )

o) área( $E \cap [[x = 0.8]]$ )

p)  $\int_{t=0}^{t=1} \text{área}(E \cap [[x = t]]) dt$

## Dicas pro exercício 1

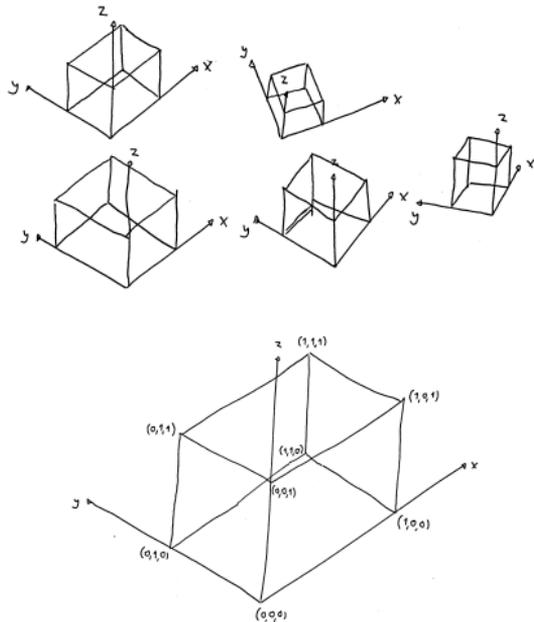
O conjunto  $C$  é um cubo e os conjuntos  $D$  e  $E$  vão ser pedaços do cubo  $C$ .

Existem 8 pontos de  $\mathbb{R}^3$  que obedecem isto aqui:  $x, y, z \in \{0, 1\}$ . Vou inventar um nome pra eles: eles vão ser os pontos “simples”. O conjunto  $C$  contém todos os pontos simples mas os conjuntos  $D$  e  $E$  só contém alguns pontos simples cada um... quais?

Pra fazer os itens que envolvem os conjuntos  $D$  e  $E$  comece fazendo um MONTE de desenhos de cubos à mão, SEM USAR RÉGUA – como eu fiz na figura de cima à direita. Se você não usar régua o seu ganho de velocidade vai ser tão grande que você não vai se incomodar muito pra descartar os desenhos que ficarem tortos demais, e você vai poder escolher quais são os desenhos nos quais os eixos estão numa posição melhor pra desenhar o conjunto  $E$ , que é meio complicado.

Quando você encontrar uma posição pros eixos que você ache que está boa faça uma versão ampliada do seu cubo naquela posição ocupando uma folha inteira, e depois escreva do lado de cada um dos pontos “simples” as coordenadas dele – como eu fiz na figura de baixo à direita. Use essa figura pra tentar entender os conjuntos  $D$  e  $E$ .

A melhor posição pra desenhar o conjunto  $E$  não é a da figura de baixo à direita.



## Aviso

Na aula 19 – que era pra ser a única aula sobre volumes – as pessoas tiveram tanta dificuldade pra desenhar os conjuntos  $C$ ,  $D$  e  $E$  em 3D que eu preferi considerar que elas não teriam condições de entender os trechos do Stewart em que ele faz cortes em figuras 3D e depois calcula as áreas desses cortes... então nós vamos ter uma segunda aula sobre isso.  
Slogans

# Cálculo 2 - 2023.2

P1 (Primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2023.2-C2.html>

**Questão 1****(Total: 2.5 pts)**

Calcule:

$$\int s^3 \sqrt{1-s^2}^3 ds .$$

**Questão 2****(Total: 3.0 pts)**

Calcule a integral abaixo fazendo pelo menos duas mudanças de variável e teste o seu resultado:

$$\int \frac{(\ln x)^3 \cos((\ln x)^4)}{x} dx .$$

**Questão 3****(Total: 2.5 pts)**

Calcule e teste o seu resultado:

$$\int \frac{3x+2}{(x+4)(x-5)} dx .$$

**Dicas:**

1) Nestas questões o que vai contar mais pontos é você organizar as contas de modo que cada passo seja fácil de entender, de verificar, e de justificar – “chegar no resultado certo” vai valer relativamente pouco.

2) Recomendo que vocês usem o método das “caixinhas de anotações” nas mudanças de variável... numa caixinha de anotações a primeira linha diz a relação entre a variável nova e a antiga, todas as outras linhas são consequências da primeira, e dentro da caixinha de anotações você pode usar as gambiarras com variáveis dependentes e diferenciáveis, como isto aqui:  $dx = 42 du...$

3) ...por exemplo:

$$\left[ \begin{array}{l} s = \sin \theta \\ \sqrt{1-s^2} = \cos \theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos \theta \\ ds = \cos \theta d\theta \\ \theta = \arcsen s \end{array} \right]$$

**Questão 4****(Total: 1.0 pts)**

No curso nós definimos que pra nós a “fórmula” do TFC2 seria esta aqui:

$$[\text{TFC2}] = \left( \int_{x=a}^{x=b} F'(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

Mostre que quando  $a = 1$ ,  $b = 3$  e

$$F(x) = \begin{cases} 2x & \text{quando } x < 2, \\ x & \text{quando } x \geq 2 \end{cases}$$

a fórmula [TFC2] é falsa.

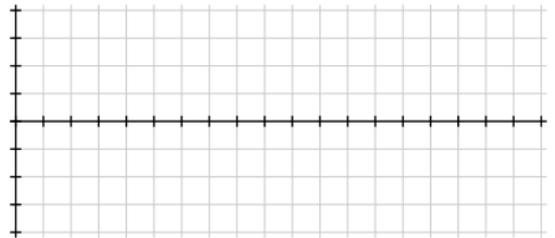
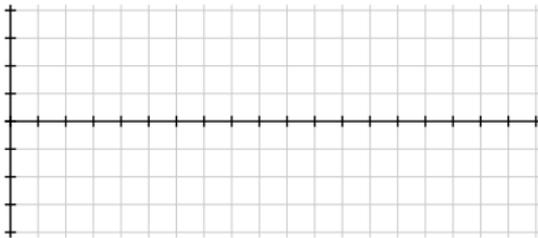
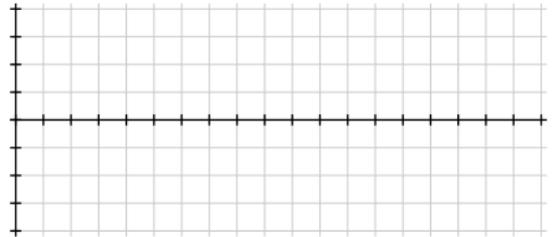
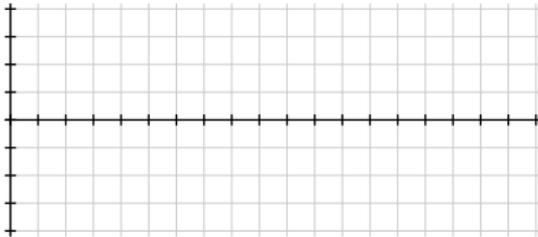
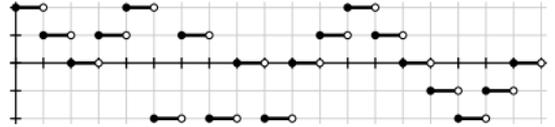
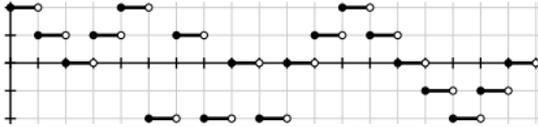
Dicas: o melhor modo de fazer isto é representando graficamente  $F(x)$  e  $F'(x)$  e calculando certas coisas a partir dos gráficos. Considere que o leitor sabe calcular áreas de retângulos, triângulos e trapézios no olhômetro quando as coordenadas deles são números simples, mas complementemente os seus gráficos com um pouquinho de português quando nem tudo for óbvio só a partir dos gráficos.

**Questão 5****(Total: 1.0 pts)**

Seja  $f(t)$  a função no topo da página seguinte. Seja

$$F(x) = \int_{t=2}^{t=x} f(t) dt.$$

Desenhe o gráfico de  $F(x)$  em algum dos grids vazios da próxima página. Indique claramente qual é a versão final e quais desenhos são rascunhos.



## Questão 1: gabarito

$$\begin{aligned}
 \int s^3 \sqrt{1-s^2} ds &= \int (\sin \theta)^3 (\cos \theta)^3 (\cos \theta) d\theta \\
 &= \int (\cos \theta)^4 (\sin \theta)^2 (\sin \theta) d\theta \\
 &= \int (\cos \theta)^4 (1 - (\cos \theta)^2) (\sin \theta) d\theta \\
 &= \int c^4 (1 - c^2) (-1) dc \\
 &= \int c^4 (c^2 - 1) dc \\
 &= \int c^6 - c^4 dc \\
 &= \frac{1}{7} c^7 - \frac{1}{5} c^5 \\
 &= \frac{1}{7} \sqrt{1-s^2}^7 - \frac{1}{5} \sqrt{1-s^2}^5
 \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{array}{l} s = \sin \theta \\ s^2 = (\sin \theta)^2 \\ 1 - s^2 = (\cos \theta)^2 \\ \sqrt{1-s^2} = \cos \theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos \theta \\ ds = \cos \theta d\theta \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{l} c = \cos \theta \\ \frac{dc}{d\theta} = -\sin \theta \\ dc = -\sin \theta d\theta \\ (-1)dc = \sin \theta d\theta \\ (\sin \theta)^2 = 1 - c^2 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds} \sqrt{1-s^2} &= \frac{d}{ds} (1-s^2)^{1/2} \\
 &= \frac{1}{2} (1-s^2)^{-1/2} \frac{d}{ds} (1-s^2) \\
 &= \frac{1}{2} (1-s^2)^{-1/2} (-2s) \\
 &= -(1-s^2)^{-1/2} s \\
 &= -\sqrt{1-s^2}^{-1} s \\
 \frac{d}{ds} \sqrt{1-s^2}^k &= (k\sqrt{1-s^2}^{k-1}) \left( \frac{d}{ds} \sqrt{1-s^2} \right) \\
 &= (k\sqrt{1-s^2}^{k-1}) (-\sqrt{1-s^2}^{-1} s) \\
 &= -k\sqrt{1-s^2}^{k-2} s \\
 \frac{d}{ds} \sqrt{1-s^2}^7 &= -7\sqrt{1-s^2}^5 s \\
 \frac{d}{ds} \sqrt{1-s^2}^5 &= -5\sqrt{1-s^2}^3 s \\
 \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{7} \sqrt{1-s^2}^7 - \frac{1}{5} \sqrt{1-s^2}^5 \right) &= \frac{1}{7} (-7\sqrt{1-s^2}^5 s) - \frac{1}{5} (-5\sqrt{1-s^2}^3 s) \\
 &= -\sqrt{1-s^2}^5 s + \sqrt{1-s^2}^3 s \\
 &= (-\sqrt{1-s^2}^2 + 1) \sqrt{1-s^2}^3 s \\
 &= (-(1-s^2) + 1) \sqrt{1-s^2}^3 s \\
 &= (-1 + s^2 + 1) \sqrt{1-s^2}^3 s \\
 &= s^2 \sqrt{1-s^2}^3 s \\
 &= s^3 \sqrt{1-s^2}^3
 \end{aligned}$$

## Questão 2: gabarito

$$\begin{aligned}
 \int \frac{(\ln x)^3 \cos((\ln x)^4)}{x} dx &= \int (\ln x)^3 \cos((\ln x)^4) \frac{1}{x} dx && \left[ \begin{array}{l} u = \ln x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right] \\
 &= \int u^3 \cos(u^4) du \\
 &= \int \cos(u^4) u^3 du \\
 &= \int \cos v \cdot \frac{1}{4} dv && \left[ \begin{array}{l} v = u^4 \\ \frac{dv}{du} = 4u^3 \\ dv = 4u^3 du \\ \frac{1}{4} dv = u^3 du \end{array} \right] \\
 &= \frac{1}{4} \int \cos v dv \\
 &= \frac{1}{4} \operatorname{sen} v \\
 &= \frac{1}{4} \operatorname{sen}(u^4) \\
 &= \frac{1}{4} \operatorname{sen}((\ln x)^4) \\
 \\
 \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{4} \operatorname{sen}((\ln x)^4) \right) &= \frac{1}{4} \cos((\ln x)^4) \frac{d}{dx} ((\ln x)^4) \\
 &= \frac{1}{4} \cos((\ln x)^4) \cdot 4(\ln x)^3 \frac{d}{dx} (\ln x) \\
 &= \frac{1}{4} \cos((\ln x)^4) \cdot 4(\ln x)^3 \frac{1}{x} \\
 &= \cos((\ln x)^4) (\ln x)^3 \frac{1}{x} \\
 &= \frac{(\ln x)^3 \cos((\ln x)^4)}{x}
 \end{aligned}$$

### Questão 3: gabarito (falta o teste)

Queremos integrar:  $\int \frac{3x+2}{(x+4)(x-5)} dx$

Queremos que:

$$\frac{3x+2}{(x+4)(x-5)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-5}$$

Sabemos que:

$$\frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5)}{(x+4)(x-5)} + \frac{B(x+4)}{(x+4)(x-5)}$$

$$= \frac{A(x-5)+B(x+4)}{(x+4)(x-5)}$$

$$= \frac{Ax-5A+Bx+4B}{(x+4)(x-5)}$$

$$= \frac{(A+B)x+(-5A+4B)}{(x+4)(x-5)}$$

$$= \frac{(A+B)x+(-5A+4B)}{(x-4)(x+5)}$$

Então:

$$\frac{3x+2}{(x+4)(x-5)} = \frac{(A+B)x+(-5A+4B)}{(x-4)(x+5)}$$

$$3x + 2 = (A + B)x + (-5A + 4B)$$

$$A + B = 3$$

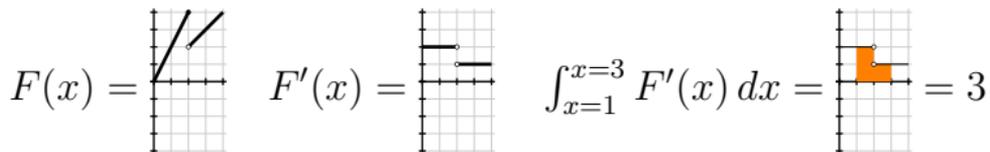
$$-5A + 4B = 2$$

$$A = 10/9$$

$$B = 17/9$$

$$\begin{aligned} \frac{3x+2}{(x+4)(x-5)} &= \frac{10/9}{x+4} + \frac{17/9}{x-5} \\ \int \frac{3x+2}{(x+4)(x-5)} dx &= \int \frac{10/9}{x+4} + \frac{17/9}{x-5} dx \\ &= \frac{10}{9} \ln|x+4| + \frac{17}{9} \ln|x-5| \end{aligned}$$

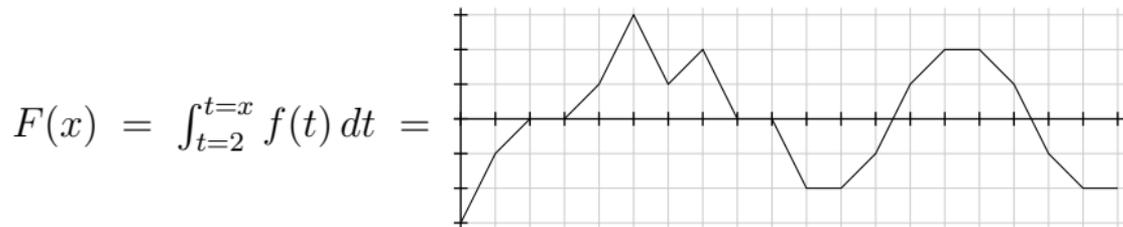
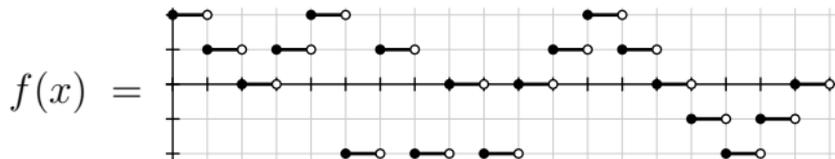
### Questão 4: gabarito



$$\underbrace{\int_{x=1}^{x=3} F'(x) dx}_3 = \underbrace{F(x)|_{x=1}^{x=3}}_{\underbrace{F(3)-F(1)}_{\underbrace{3-2}_1}}$$

**F**

## Questão 5: gabarito



## Erros que muitas pessoas cometeram

$$\text{1a: } \int c^4(c^2 - 1) dc = \int c^8 - c^4 dc$$

$$\text{3a: } \int \frac{3x + 2}{(x + 4)(x - 5)} dx = \frac{A}{x + 4} + \frac{B}{x - 5}$$

$$\text{3b: } \int \frac{3x + 2}{(x + 4)(x - 5)} = \int \frac{10/9}{x + 4} + \frac{17/9}{x - 5}$$

$$\text{3c: } \frac{\frac{10}{9}(x + 4) + \frac{17}{9}(x - 5)}{(x + 4)(x - 5)} = \frac{(\frac{10}{9} + \frac{17}{9})x + (\frac{68}{9} - \frac{50}{9})}{(x + 4)(x - 5)}$$

# Cálculo C2 - 2023.2

Aula 25: comprimento de arco

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2023.2-C2.html>

## Links

- [StewPtCap4p14](#) (p.257) 4.2 O Teorema do Valor Médio
- [StewPtCap4p15](#) (p.258) teorema da existência
- [StewPtCap5p16](#) (p.337) pontos amostrais arbitrários
- [StewPtCap6p33](#) (p.410) O Teorema do Valor Médio para Integrais
- [StewPtCap8p5](#) (p.488) 8.1 Comprimento de arco
- [StewPtCap10p16](#) (p.586) Comprimento de arco
- [StewPtCap13p18](#) (p.768) 13.3 Comprimento de Arco e Curvatura
- [MirandaP213](#) marcas
- [MirandaP224](#) Teorema do valor médio para integrais
- [MirandaP301](#) 9.5 Comprimento de arco
- [Leit4p18](#) (p.232) 4.3.2. Teorema do Valor Médio
- [Leit5p41](#) (p.324) ponto escolhido
- [Leit5p57](#) (p.340) 5.7 O teorema do valor médio para integrais
- [Leit6p17](#) (p.388) 6.3 Comprimento de arco do gráfico de uma função

## Introdução

Cada um dos três livros que nós estamos usando – Stewart, Miranda, Leithold – tem pelo menos um capítulo com várias “aplicações da integral”. Em cada uma dessas “aplicações” a gente aprende como pegar um certo conceito de Geometria ou Física, como volumes, comprimento de arco, áreas de superfícies de revolução, ou centro de massa e aí expressar a quantidade que a gente quer calcular como um somatório, e depois a gente transforma esse somatório numa integral. O método é sempre o mesmo, e ele tem dois passos: “expressar como somatório” e “transformar o somatório numa integral”. O passo de “expressar como somatório” é sempre trabalhoso e exige um olhômetro afiado pra gente entender os argumentos geométricos e as contas correspondentes a eles, e o passo de “transformar o somatório numa integral” exige um truque no qual a gente usa “partições pontilhadas” ao invés de “partições”, e se a gente escolhe os  $m_i$ 's das partições pontilhadas exatamente do jeito certo – se a gente escolhe os pontos **m**ágicos usando o Teorema do Valor **M**édio para Integrais – aí o limite dos somatórios vira algo bem simples...

Normalmente em Cálculo 2 a gente apresenta a demonstração da “fórmula” de cada uma das “aplicações” super rápido, e quase ninguém entende as demonstrações – mas as pessoas decoram as fórmulas e às vezes conseguem aplicar elas na prova... e depois elas esquecem tudo.

Neste semestre eu vou tentar apresentar os passos mais importantes de uma dessas “aplicações” – a fórmula pro comprimento de arco – com exemplos simples, figuras e exercícios... se tudo der certo depois vai ficar fácil entender as outras aplicações. Tomara que funcione! =)

## Pontos “mágicos”

Eu vou dizer que os “pontos mágicos” pra uma função  $f(x)$  no intervalo  $[a, b]$  – ou: os pontos mágicos pra integral  $\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx$  – são os pontos  $m \in [a, b]$  que obedecem isto aqui:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = f(m)(b-a)$$

Os pontos mágicos vão fazer os nossos somatórios virem integrais de um modo magicamente simples. Por exemplo:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 f(m_i)(b_i - a_i) \\ &= f(m_1)(b_1 - a_1) + f(m_2)(b_2 - a_2) \\ &= \int_{x=a_1}^{x=b_1} f(x) dx + \int_{x=a_2}^{x=b_2} f(x) dx \\ &= \int_{x=a_1}^{x=b_2} f(x) dx \end{aligned}$$

A figura da próxima página mostra os dois pontos mágicos para a minha parábola preferida,  $f(x) = 4 - (x-2)^2$ , no intervalo  $[0, 4]$ . As figuras das páginas 6 a 9 mostram os pontos mágicos pra  $f(x)$  nos subintervalos de várias partições do intervalo  $[2, 4]$ .

Os pontos mágicos geralmente são bem difíceis de calcular na mão; usando o Maxima eu consegui descobrir que os pontos mágicos da próxima página são:

$$x = \frac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad x = \frac{2\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}.$$

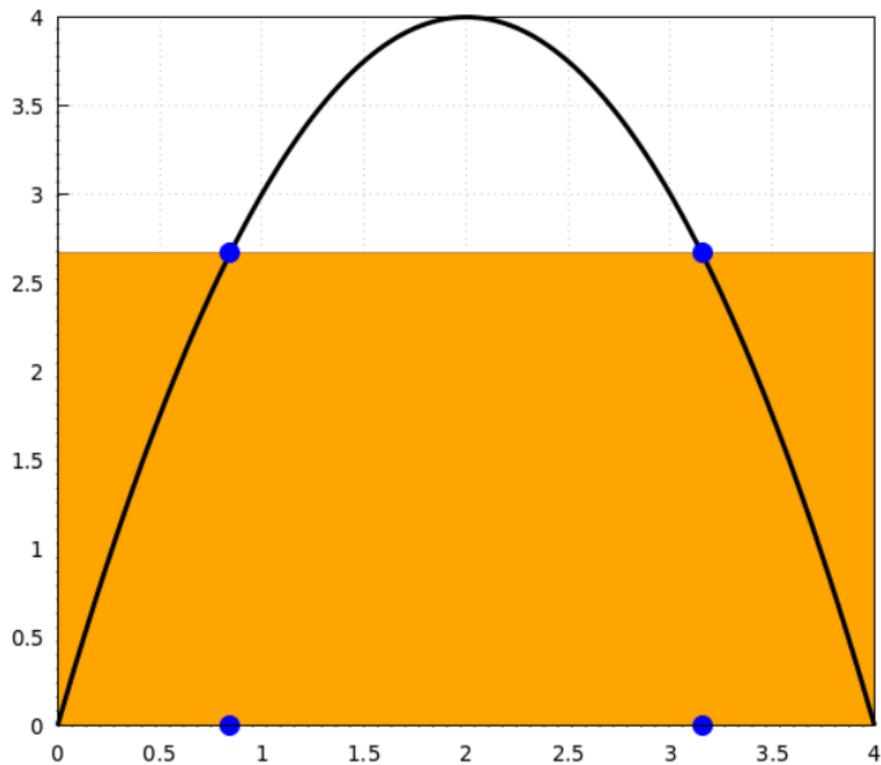
Os pontos mágicos das outras páginas têm fórmulas horríveis – eu usei o Maxima pra calculá-los e pra fazer os desenhos.

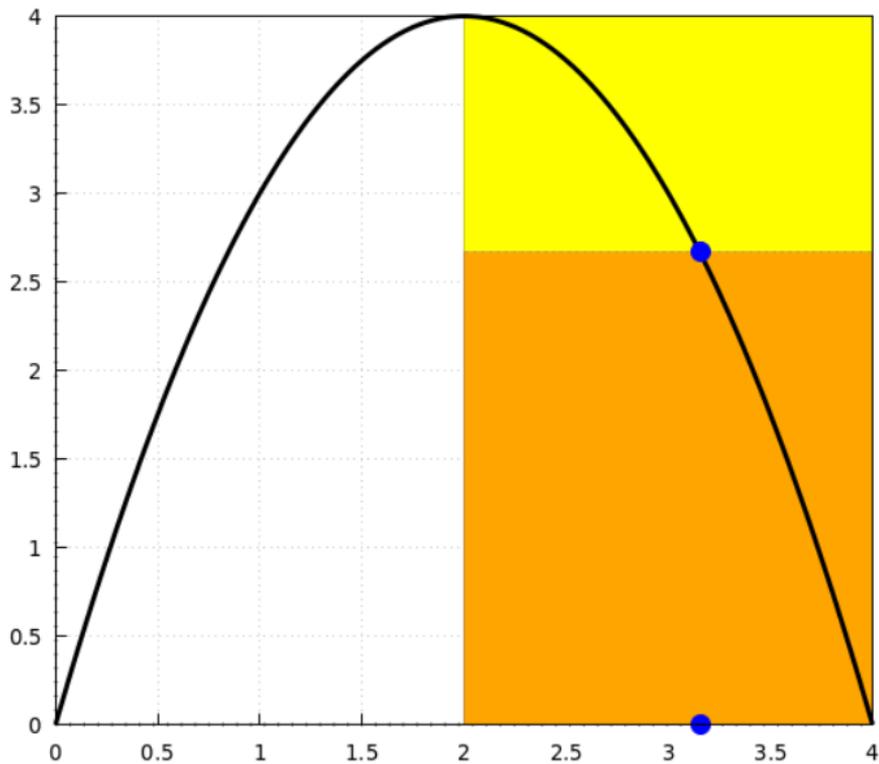
*Os livros usam argumentos que mostram que os pontos mágicos existem, mas não calculam eles explicitamente.*

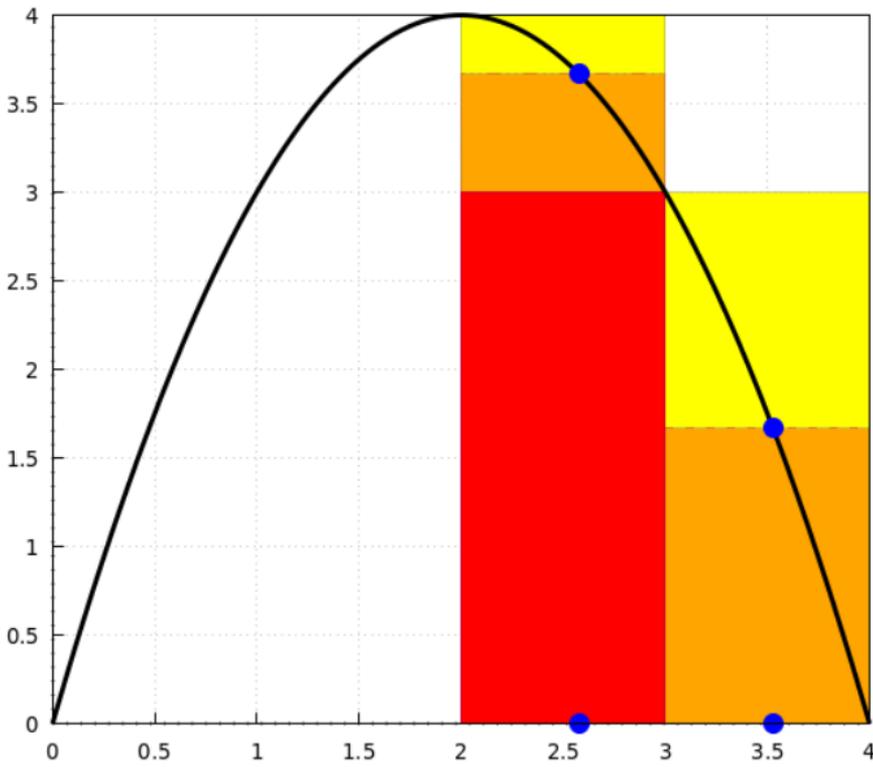
O Stewart e o Miranda chamam os pontos mágicos de ‘ $x_i^*$ ’s ao invés de ‘ $m_i$ ’s, e o Leithold chama eles de ‘ $\xi_i$ ’s. Essas notações não deixam claro o quão mágicos esses pontos são. =(

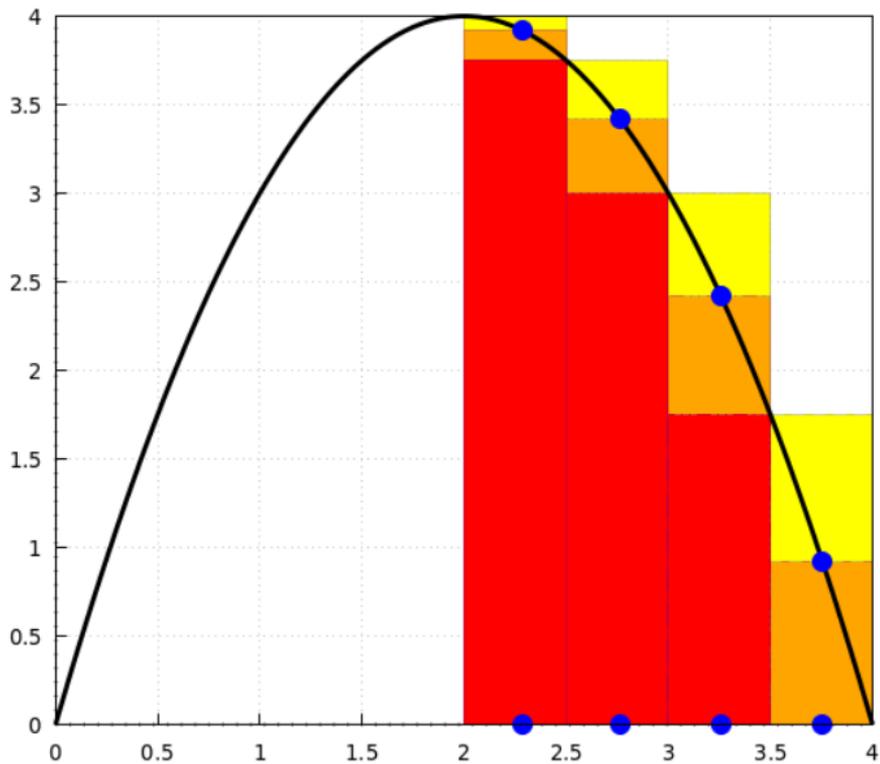
Dê uma olhada aqui: [StewPtCap4p15](#). Ele diz:

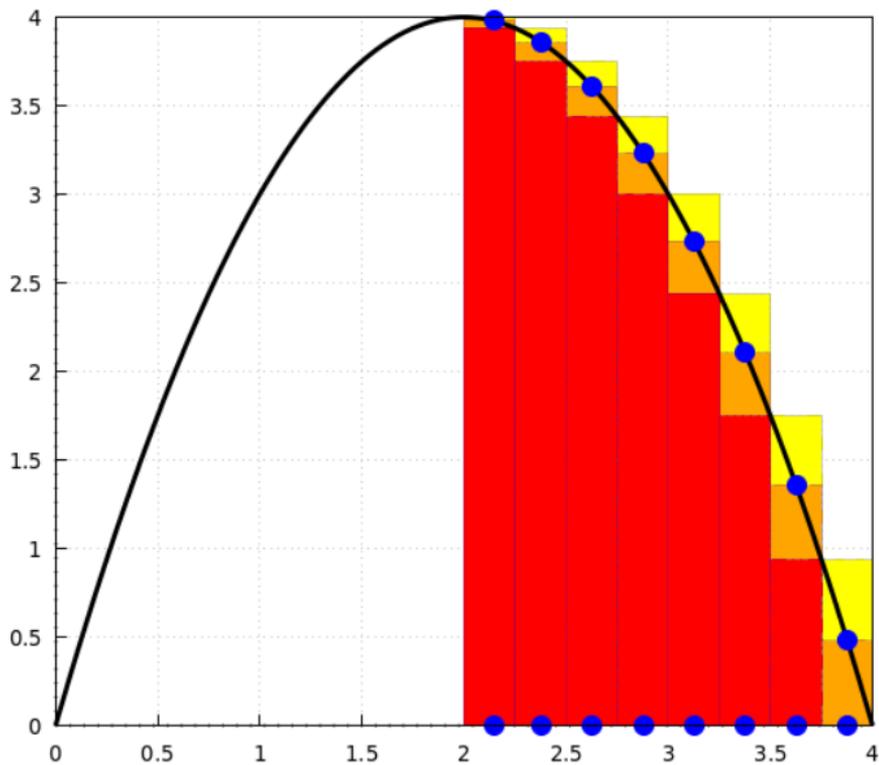
O Teorema do Valor Médio é um exemplo do que é chamado *teorema de existência*. Da mesma forma que o Teorema do Valor Intermediário, o Teorema dos Valores Extremos e o Teorema de Rolle, ele garante que existe um número com certa propriedade, mas não nos diz como achá-lo.











## Algumas contas

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} &= \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} \\
 &= \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{\frac{1}{a^2}} \\
 &= \sqrt{a^2 + b^2} \frac{1}{a}
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} a &= \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} a \\
 &= \sqrt{\frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}} a \\
 &= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} a \\
 &= \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{\frac{1}{a^2}} a \\
 &= \sqrt{a^2 + b^2} \frac{1}{a} a \\
 &= \sqrt{a^2 + b^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1 + \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)^2} (x_1 - x_0) &= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \\
 \sqrt{1 + f'(m_1)^2} (x_1 - x_0) &= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}
 \end{aligned}$$

Compare com:

StewPtCap8p6 (p.489)

MirandaP302

Leit6p19 (p.390)

## Somas de Riemann com pontos escolhidos

Uma *partição pontilhada*, ou uma *partição com pontos escolhidos*, é um par  $(P, Q)$  onde:  $P$  é uma partição de um intervalo  $[a, b]$  com  $N$  subintervalos e  $Q = (m_1, \dots, m_N), \forall i \in \{1, \dots, N\}. m_i \in [a_i, b_i]$ .

Se  $(P, Q)$  é uma partição pontilhada, então:

$$\int_{P,Q} f(x) dx = \sum_{i=1}^N f(m_i)(b_i - a_i)$$

Cada um dos livros que estamos usando define isso de um jeito ligeiramente diferente. Se você tiver tempo e curiosidade dê uma olhada nestas páginas:

StewPtCap5p16 (p.337) pontos amostrais

Leit5p41 (p.324) ponto escolhido

MirandaP213 marcas

### Exercício

As figuras da direita definem uma função  $f(x)$  e duas partições pontilhadas do intervalo  $[2, 6]$ ; vou chamá-las de “partição pontilhada da esquerda” (“p.p.esq.”) e “partição pontilhada da direita” (“p.p.dir.”). Na p.p.esq. nós temos:

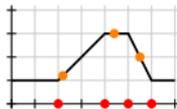
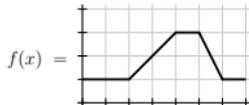
$$\begin{aligned} \int_{P,Q} f(x) dx &= 1.2 \cdot (4 - 2) \\ &+ 3.0 \cdot (5 - 4) \\ &+ 2.0 \cdot (6 - 5) \end{aligned}$$

Seja  $g(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ .

a) Quanto é  $\int_{P,Q} f(x) dx$  na p.p.dir.?

b) Faça o gráfico de  $f'(x)$ .

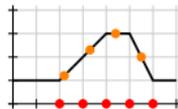
c) Faça o gráfico de  $g(x)$ .



$$P = \{2, 4, 5, 6\}$$

$$Q = (2.2, 4.4, 5.5)$$

$i$	$a_i$	$b_i$	$I_i$	$m_i$
1	2	4	$[2, 4]$	2.2
2	4	5	$[4, 5]$	4.4
3	5	6	$[5, 6]$	5.5



$$P = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$Q = (2.2, 3.3, 4.4, 5.5)$$

$i$	$a_i$	$b_i$	$I_i$	$m_i$
1	2	3	$[2, 3]$	2.2
2	3	4	$[3, 4]$	3.3
3	4	5	$[4, 5]$	4.4
4	5	6	$[5, 6]$	5.5

### Exercício (cont.)

d) Quanto é  $\int_{P,Q} g(x) dx$  na p.p.esq.?

e) Quanto é  $\int_{P,Q} g(x) dx$  na p.p.dir.?

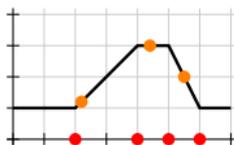
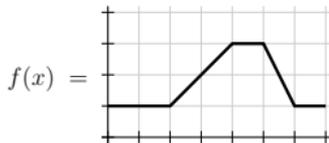
f) Quanto é  $\int_{x=2}^6 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ ?

g) Quanto é  $\sum_{i=1}^N \sqrt{(b_i - a_i)^2 + (f(b_i) - f(a_i))^2}$  na p.p.esq.?

h) Quanto é  $\sum_{i=1}^N \sqrt{(b_i - a_i)^2 + (f(b_i) - f(a_i))^2}$  na p.p.dir.?

## Revisão de pontos mágicos

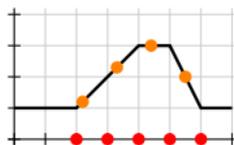
Lembre que:



$$P = \{2, 4, 5, 6\}$$

$$Q = (2.2, 4.4, 5.5)$$

$i$	$a_i$	$b_i$	$I_i$	$m_i$
1	2	4	$[2, 4]$	2.2
2	4	5	$[4, 5]$	4.4
3	5	6	$[5, 6]$	5.5



$$P = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$Q = (2.2, 3.3, 4.4, 5.5)$$

$i$	$a_i$	$b_i$	$I_i$	$m_i$
1	2	3	$[2, 3]$	2.2
2	3	4	$[3, 4]$	3.3
3	4	5	$[4, 5]$	4.4
4	5	6	$[5, 6]$	5.5

### Exercício

Vou definir  $M(a, b)$  desta forma:

$$M(a, b) = \{x \in [a, b] \mid f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\}$$

Considere que a igualdade  $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  retorna “falso” nos pontos em que  $f(x)$  não é derivável.

Diga quem são os conjuntos abaixo.

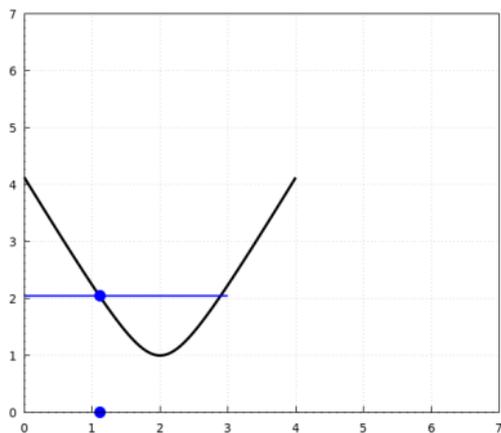
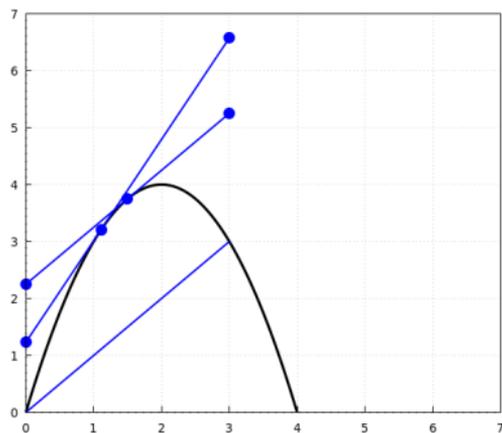
- $M(0, 2)$
- $M(2, 4)$
- $M(0, 4)$
- $M(2, 6)$
- $M(2, 7)$

Obs: compare:

**StewPtCap4p14** (p.257) 4.2 O TVM

**StewPtCap6p33** (p.410) O TVM para Integrais

## Três tipos de pontos mágicos



# Cálculo C2 - 2023.2

Aula 26: EDOs com variáveis separáveis

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2023.2-C2.html>

# Links

Quadros:

[2hQ53](#) Aula 26 de 2023.2: (24/out/2023): Campos de direções

[2hQ56](#) Aula 27 de 2023.2: (25/out/2023): EDOs com variáveis separáveis

[2gQ41](#) Aula 21 de 2023.1: (13/jun/2023)

[2gQ43](#) Aula 22 de 2023.1: (16/jun/2023)

[2dT293](#) Material sobre EDOVs de 2021.2

[2dT306](#) Slides sobre inversas de 2021.2

[2gT120](#) Slides sobre inversas de 2023.2

[Leit7](#) Funções inversas, logarítmicas e exponenciais

Questões sobre EDOVs nas provas de 2022.2:

[2fT123](#), [2fT126](#) P2, gabarito

[2fT135](#), [2fT137](#) VS, anexo

[StewPtCap9p11](#) (p.531) 9.2 Campos de Direções e Método de Euler

[StewPtCap9p18](#) (p.538) 9.3 Equações Separáveis

[StewPtCap14p10](#) (p.796) Curvas de nível

[ZillCullenInicioP13](#) (p.6) Soluções implícitas e explícitas

[ZillCullenInicioP16](#) (p.9) parâmetros, solução particular

[ZillCullenInicioP51](#) (p.44) 2.2 Variáveis separáveis

[ZillCullenInicioP57](#) (p.50) Exercícios

[ZillCullenEngCap2p17](#) (p.44) 2.2 Separable Variables

[ZillCullenEngCap2p23](#) (p.50) Exercises 2.2

[DiffyQsP27](#) 1.2 Slope fields

[Thomas11cap9](#) 9.1 Slope Fields and Separable Differential Equations

[2eT214](#) Algumas figuras de campos de direções

Questões sobre EDOVs nas provas de 2022.2:

[2fT123](#), [2fT126](#) P2, gabarito

[2fT135](#), [2fT137](#) VS, anexo

## EDOs por chutar-e-testar

Lembre que lá no início do curso eu mostrei – aqui: **2dT13** – que a gente podia resolver equações como esta

$$x + 2 = 5$$

por chutar-e-testar, e a gente podia escrever os chutes-e-testes usando o  $[:=]$ ... cada “chute” virava uma substituição e cada “teste” virava verificar se o resultado da substituição era uma igualdade verdadeira. Por exemplo:

$$\begin{aligned}(x + 2 = 5)[x := 42] &= (42 + 2 = 5) = (=) \\ (x + 2 = 5)[x := 3] &= (3 + 2 = 5) = (=)\end{aligned}$$

Eu costumo usar o ‘= $\Rightarrow$ ’ pra indicar “deu certo / chegamos numa igualdade verdadeira” e o ‘= $\neq$ ’ pra indicar “deu errado / chegamos numa igualdade falsa”. Os *smileys* ‘= $\Rightarrow$ ’ e ‘= $\neq$ ’ não tem cara de notações “sérias”, e isso é de propósito: é pra lembrar vocês de procurarem nos livros como eles fazem isso – usando português e supondo que o leitor vai ser capaz de fazer muitas contas de cabeça.

Uma outra notação pra isso – e que também não costuma ser usada em livros básicos, e que eu usei no gabarito da P1, – é esta aqui:

$$(x + 2 = 5)[x := 42] = \underbrace{(42 + 2 = 5)}_{\mathbf{F}}$$

Agora seja (\*) esta EDO (“equação diferencial ordinária”):

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \quad (*)$$

Podemos verificar que  $f(x) = x^4$  não é uma solução pra (\*), e que  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  é uma solução pra (\*), calculando os resultado das duas substituições abaixo e vendo que uma dá uma igualdade verdadeira e a outra dá uma igualdade falsa:

$$\begin{aligned}\left(f'(x) = -\frac{x}{f(x)}\right) \left[ \begin{array}{l} f(x) := x^4 \\ f'(x) := 4x^3 \end{array} \right] &= ? \\ \left(f'(x) = -\frac{x}{f(x)}\right) \left[ \begin{array}{l} f(x) := \sqrt{1-x^2} \\ f'(x) := -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right] &= ?\end{aligned}$$

## Campos de direções

StewPtCap9p11 (p.531) 9.2 Campos de Direções e Método de Euler

Os gráficos que usam tracinhos em certos pontos pra indicar

coeficientes angulares naqueles pontos são gráficos de

*campos de direções.*

### Exercício 1.

Represente graficamente os campos de direções abaixo desenhando tracinhos com os coeficientes angulares adequados nos pontos com  $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ; ou seja, em cada item você vai ter que desenhar 25 tracinhos. Quando  $\frac{dy}{dx} = \infty$  desenhe o tracinho na vertical, e quando  $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$  desenhe só um pontinho ao invés de um tracinho.

a)  $\frac{dy}{dx} = -1$

b)  $\frac{dy}{dx} = x$

c)  $\frac{dy}{dx} = 2x$

d)  $\frac{dy}{dx} = -x/y$

e)  $\frac{dy}{dx} = 1/y$

f)  $\frac{dy}{dx} = 2/y$

g)  $\frac{dy}{dx} = -y/x$

### Exercício 2.

Tente imaginar o resto de cada um dos 7 campos de direções que você desenhou no exercício 1. Para cada um dos campos tente imaginar as curvas que você obteria se ligasse todos os tracinhos, e tente interpretar essas curvas como o conjunto de soluções da EDO que representamos graficamente como o campo de direções. Neste exercício você vai tentar encontrar soluções para EDOs no olhômetro a partir dos campos de direções delas.

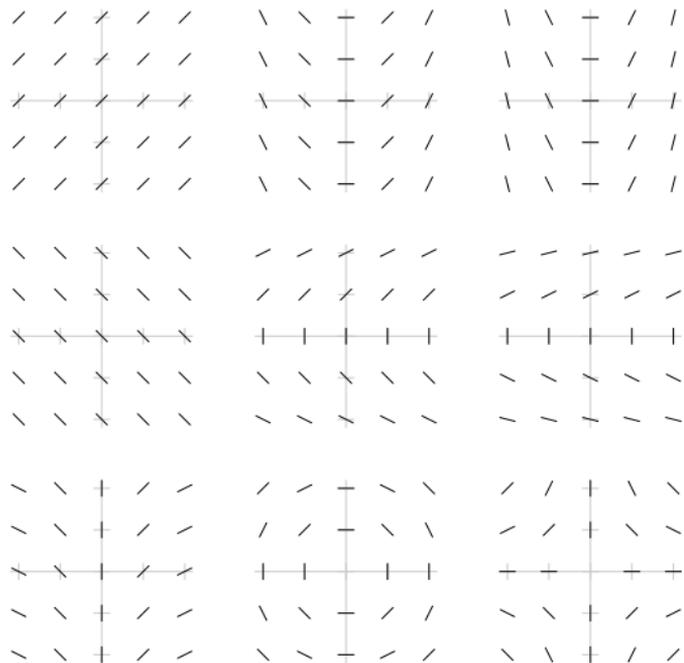
Para cada uma das funções abaixo diga quais das 7 EDOs do exercício 1 podem ter aquela função como solução.

a)  $y = x^2$

b)  $y = \sqrt{x}$

c)  $y = 1/x$

d)  $y = \sqrt{1-x^2}$



$$[M] = \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ h(y) dy = g(x) dx \\ \int h(y) dy = \int g(x) dx \\ \parallel \\ H(y) + C_1 \qquad G(x) + C_2 \\ H(y) = G(x) + C_2 - C_1 \\ \qquad = G(x) + C_3 \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right)$$

$$[M][S_1] = \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} \\ 2y dy = -2x dx \\ \int 2y dy = \int -2x dx \\ \parallel \\ y^2 + C_1 \qquad -x^2 + C_2 \\ y^2 = -x^2 + C_2 - C_1 \\ \qquad = -x^2 + C_3 \\ \sqrt{y^2} = \sqrt{-x^2 + C_3} \\ \parallel \\ y \end{array} \right)$$

$$[F_3] = \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right)$$

$$[F_3][S_1] = \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} \\ \sqrt{y^2} = \sqrt{-x^2 + C_3} \\ \parallel \\ y \end{array} \right)$$

$$[F_2] = \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ y = H^{-1}(G(x) + C_3) \end{array} \right)$$

$$[F_2][S_1] = \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} \\ y = \sqrt{-x^2 + C_3} \end{array} \right)$$

$$[S_1] = \left[ \begin{array}{l} g(x) := -2x \\ h(y) := 2y \\ G(x) := -x^2 \\ H(y) := y^2 \\ H^{-1}(u) := \sqrt{u} \end{array} \right]$$

## Funções inversas por chutar e testar

Digamos que

$$\begin{aligned} y &= 3 + \sqrt{x+4}, & \text{isto é,} \\ f(x) &= 3 + \sqrt{x+4}, \end{aligned}$$

e sejam:

$$\begin{aligned} g(y) &= (y-3)^2 + 4, \\ h(y) &= (y-4)^2 + 3. \end{aligned}$$

Eu acho difícil ver só fazendo contas de cabeça se  $f^{-1}(y) = g(y)$  ou se  $f^{-1}(y) = h(y)$ ... então é bom a gente saber testar se as inversas que a gente obteve de cabeça estão certas. O teste é:

$$\begin{aligned} (f^{-1}(f(x)) = x) \begin{bmatrix} f(x) := 3 + \sqrt{x+4} \\ f^{-1}(y) := (y-3)^2 + 4 \end{bmatrix} &= ? \\ (f^{-1}(f(x)) = x) \begin{bmatrix} f(x) := 3 + \sqrt{x+4} \\ f^{-1}(y) := (y-4)^2 + 3 \end{bmatrix} &= ? \end{aligned}$$

## Funções inversas por chutar e testar (2)

O modo tradicional de obter inversas é por uma série de passos, como:

$$\begin{aligned}f(x) &= 3 + \sqrt{x + 4} \\y &= 3 + \sqrt{x + 4} \\y - 3 &= \sqrt{x + 4} \\(y - 3)^2 &= x + 4 \\(y - 3)^2 - 4 &= x \\(y - 3)^2 - 4 &= f^{-1}(y)\end{aligned}$$

...mas é importante a gente saber testar se chegou na inversa certa.

**Exercício 4.**

Obtenha inversas para as seguintes funções:

$$\begin{aligned}f_1(x) &= 2 + 3\sqrt{5x + 6} \\f_2(x) &= 2 + 3\sqrt[4]{5x + 6} \\f_3(x) &= 2 + 3(4x + 5)^6 \\f_4(x) &= 2 + 3\ln(4x + 5) \\f_5(x) &= 2 + 3e^{4x+5} \\f_6(x) &= \sqrt{2 + 3e^{4x+5}} \\f_7(x) &= \ln x \\f_8(x) &= \ln -x \\f_9(x) &= |x| \\f_{10}(x) &= \ln |x|\end{aligned}$$

Porque é que  $f_9^{-1}(x)$  e  $f_{10}^{-1}(x)$  não existem?

## Inversas: introdução

Dê uma olhada nestes links:

[ZillCullenInicioP13](#) (p.6) Soluções implícitas e explícitas

[ZillCullenInicioP16](#) (p.9) parâmetros, solução particular

[ZillCullenInicioP51](#) (p.44) 2.2: Variáveis separáveis

O método pra resolver EDOs com variáveis separáveis nos dá primeiro “soluções implícitas”, como  $x^2 + y^2 = C$  or  $x^2 + y^2 = 42$ , e aí depois disso a gente tem que transformar essas soluções implícitas em “soluções explícitas”, em que  $y$  é uma função de  $x$ ... por exemplo:

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{C - x^2} &\Rightarrow f_1(x) &= \sqrt{C - x^2} \\x &= -\sqrt{C - x^2} &\Rightarrow f_2(x) &= -\sqrt{C - x^2} \\x &= \sqrt{42 - x^2} &\Rightarrow f_3(x) &= \sqrt{42 - x^2} \\x &= -\sqrt{42 - x^2} &\Rightarrow f_4(x) &= -\sqrt{42 - x^2}\end{aligned}$$

Praticamente todo mundo se enrola na hora de passar das “soluções implícitas” pras “soluções explícitas”, principalmente nos casos em que a gente tem “várias inversas”...

Eu vou usar uma terminologia que é meio errada, e vou dizer que  $g_1(y) = \sqrt{y}$  e  $g_2(y) = -\sqrt{y}$  são duas inversas diferentes para  $f(x) = x^2$ . Um bom lugar pra aprender a terminologia correta – que precisa que a gente especifique os domínios! – é o capítulo 7 do Leithold: [Leit7](#).

## Inversas: um exemplo complicado

Digamos que queremos inverter esta função:

$$f(x) = (x + 3)^4 + 5$$

O método é este aqui, mas repare que ele tem uma bifurcação...

$$\begin{aligned} y &= (x + 3)^4 + 5 \\ y - 5 &= (x + 3)^4 \\ \sqrt[4]{y - 5} &= \sqrt[4]{(x + 3)^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{y - 5} &= x + 3 & \sqrt[4]{y - 5} &= -(x + 3) \\ -3 + \sqrt[4]{y - 5} &= x & \sqrt[4]{y - 5} &= -x - 3 \\ & & \sqrt[4]{y - 5} &= -x - 3 \\ & & 3 + \sqrt[4]{y - 5} &= -x \\ & & -(3 + \sqrt[4]{y - 5}) &= x \end{aligned}$$

Se a gente segue o caminho da esquerda a gente obtém

$$f^{-1}(y) = -3 + \sqrt[4]{y - 5},$$

e se a gente segue o caminho da direita a gente obtém

$$f^{-1}(y) = -(3 + \sqrt[4]{y - 5}).$$

Sabemos que  $\sqrt[4]{\alpha^4} = |\alpha|$ , e portanto:

$$\begin{aligned} \alpha \geq 0 &\Rightarrow \sqrt[4]{\alpha^4} = \alpha \\ \alpha \leq 0 &\Rightarrow \sqrt[4]{\alpha^4} = -\alpha \\ x + 3 \geq 0 &\Rightarrow \sqrt[4]{(x + 3)^4} = x + 3 \\ x + 3 \leq 0 &\Rightarrow \sqrt[4]{(x + 3)^4} = -(x + 3) \end{aligned}$$

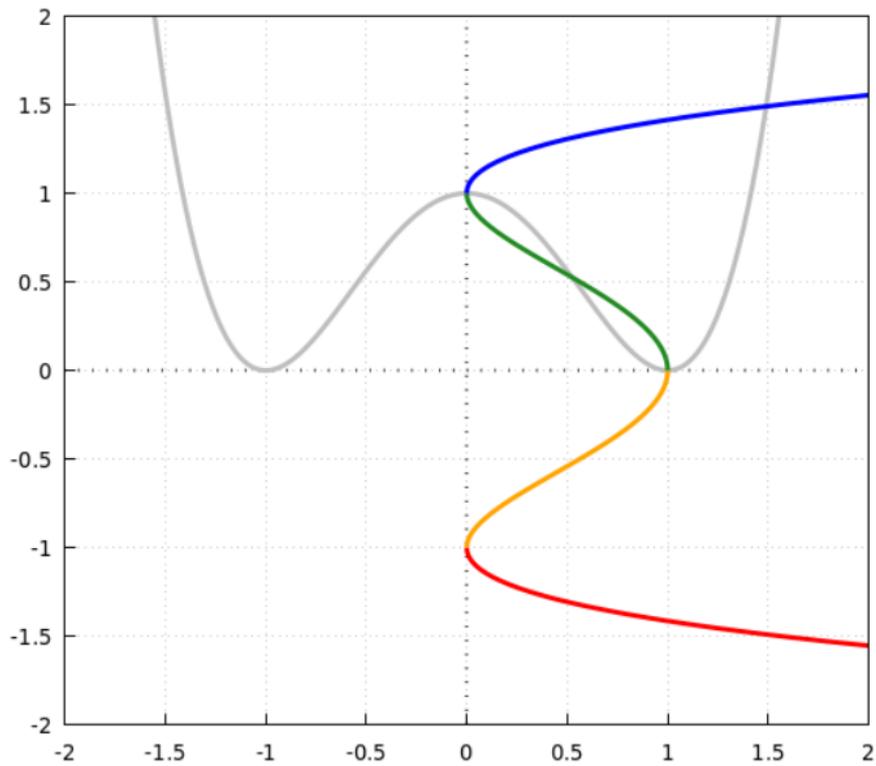
Ou seja, nas contas à esquerda se  $x + 3 \geq 0$  nós temos que seguir o caminho da esquerda, e se  $x + 3 \leq 0$  nós temos que seguir o caminho da direita.

O melhor modo da gente entender essas duas inversas é esse aqui. Considere estes três conjuntos de  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x + 3)^4 + 5 \} \\ A_2 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x + 3)^4 + 5, x + 3 \geq 0 \} \\ A_3 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x + 3)^4 + 5, x + 3 \leq 0 \} \end{aligned}$$

Os conjuntos  $A_2$  e  $A_3$  são gráficos de funções inversíveis e  $A_1$  é o gráfico de uma função não-inversível. Os domínios dessas funções são relativamente fáceis de calcular – eles são  $\mathbb{R}$ ,  $\{x \in \mathbb{R} \mid x + 3 \geq 0\}$  e  $\{x \in \mathbb{R} \mid x + 3 \leq 0\}$  respectivamente – mas as imagens são um pouco mais complicadas...

...mas lembre que em C2 a gente costuma fazer as contas em duas etapas: na primeira etapa a gente finge que as hipóteses vão ser todas obedecidas e a gente nem escreve quais são essas hipóteses, e só na segunda etapa a gente escreve explicitamente quais são essas hipóteses e a gente vê se tudo realmente dá certo quando elas são obedecidas. *Em neste curso a gente raramente vai ter tempo pra segunda etapa.*



```
(%i1) f(x) := (x^2-1)^2;
```

```
(%o1)
```

$$f(x) := (x^2 - 1)^2$$

```
(%i2) sols : solve(y=f(x), x);
```

```
(%o2)
```

$$\left[ x = -\sqrt{\sqrt{y} + 1}, x = \sqrt{\sqrt{y} + 1}, x = -\sqrt{1 - \sqrt{y}}, x = \sqrt{1 - \sqrt{y}} \right]$$

```
(%i3) define(g1(y), rhs(sols[1]));
```

```
(%o3)
```

$$g1(y) := -\sqrt{\sqrt{y} + 1}$$

```
(%i7) f(g1(y));
```

```
(%o7)
```

*y*

```
(%i4) define(g2(y), rhs(sols[3]));
```

```
(%o4)
```

$$g2(y) := -\sqrt{1 - \sqrt{y}}$$

```
(%i8) f(g2(y));
```

```
(%o8)
```

*y*

```
(%i5) define(g3(y), rhs(sols[4]));
```

```
(%o5)
```

$$g3(y) := \sqrt{1 - \sqrt{y}}$$

```
(%i9) f(g3(y));
```

```
(%o9)
```

*y*

```
(%i6) define(g4(y), rhs(sols[2]));
```

```
(%o6)
```

$$g4(y) := \sqrt{\sqrt{y} + 1}$$

```
(%i10) f(g4(y));
```

```
(%o10)
```

*y*

```
(%i7)
```

```
(%i11)
```

```

(%i1) f(x) := (x^2-1)^2;
(%o1)
      f(x) := (x^2 - 1)^2
(%i2) e1 : y = (x^2-1)^2;
(%o2)
      y = (x^2 - 1)^2
(%i3) e2 : sqrt(e1);
(%o3)
      sqrt(y) = |x^2 - 1|
(%i4) assume(x^2-1 >= 0);
(%o4)
      [x^2 >= 1]
(%i5) e2 : sqrt(e1);
(%o5)
      sqrt(y) = x^2 - 1
(%i6) e3 : e2 + 1;
(%o6)
      sqrt(y) + 1 = x^2
(%i7) e4 : sqrt(e3);
(%o7)
      sqrt(sqrt(y) + 1) = |x|
(%i8) assume(x <= 0);
(%o8)
      [x <= 0]
(%i9) e4 : sqrt(e3);
(%o9)
      sqrt(sqrt(y) + 1) = -x
(%i10) e5 : - e4;
(%o10)
      -sqrt(sqrt(y) + 1) = x
(%i11) e6 : rhs(e5) = lhs(e5);
(%o11)
      x = -sqrt(sqrt(y) + 1)
(%i12) define(g1(y), rhs(e6));
(%o12)
      g1(y) := -sqrt(sqrt(y) + 1)
(%i13) g1(u);
(%o13)
      -sqrt(sqrt(u) + 1)
(%i14) simp : false;
(%o14)
      false
(%i15) g1(f(x));
(%o15)
      -1 (1 + ((x^2 - 1)^2)^(1/2))^(1/2)
(%i16) simp : true;
(%o16)
      true
(%i17) g1(f(x));
(%o17)
      x
(%i18)

```

# Cálculo 2 - 2023.2

Aula 30: EDOs lineares  
com coeficientes constantes

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF  
<http://anggtwu.net/2023.2-C2.html>

## Links

StewPtCap17p6 (p.1020) Equações diferenciais de 2ª ordem

StewPtCap17p20 (p.1034) Caso 3: subamortecimento

StewPtApendiceHp5 (p.A51) Apêndice H: Números complexos

Leit3p22 (p.158)  $D_x[c \cdot f(x)] = c \cdot D_x f(x)$

Leit3p22 (p.158)  $D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$

BoyceDip3p5 (p.105) Capítulo 3: Equações lineares de 2ª ordem

BoyceDip3p11 (p.111) Seção 3.2: o operador diferencial  $L$

BoyceDip3p13 (p.113) Teorema 3.2.2: o princípio da superposição

BoyceDip3p21 (p.121) 3.3. Raízes complexas da equação característica

BoyceDip3p23 (p.123) Figura 3.3.1

ZillCullenCap4p33 (p.173) 4.3. Equações lineares homogêneas com coeficientes constantes

ZillCullenCap4p60 (p.196) Exemplo 1: ...pode ser fatorado...  $(D+3)(D+2)$

ZillCullenEngCap4p40 (p.150) Factoring operators ...  $(D+3)(D+2)$

BoyceDipEng3p4 (p.103) Chapter 3: Second-order linear ODEs

BoyceDipEng3p11 (p.110) Section 3.2: the differential operator  $L$

BoyceDipEng3p13 (p.112) Theorem 3.2.2: principle of superposition

BoyceDipEng3p21 (p.120) 3.3 Complex Roots of the Characteristic Equation

BoyceDipEng3p24 (p.123) Figure 3.3.1

Quadros:

2hQ61 Aula 30 de 2023.2 (01/nov/2023)

**Aviso:** falta digitar muita coisa! Veja os quadros!

Quadros antigos:

2gQ46 Aula 23 de 2023.1 (20/junho/2023)

2gQ50 Aula 24 de 2023.1 (23/junho/2023)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

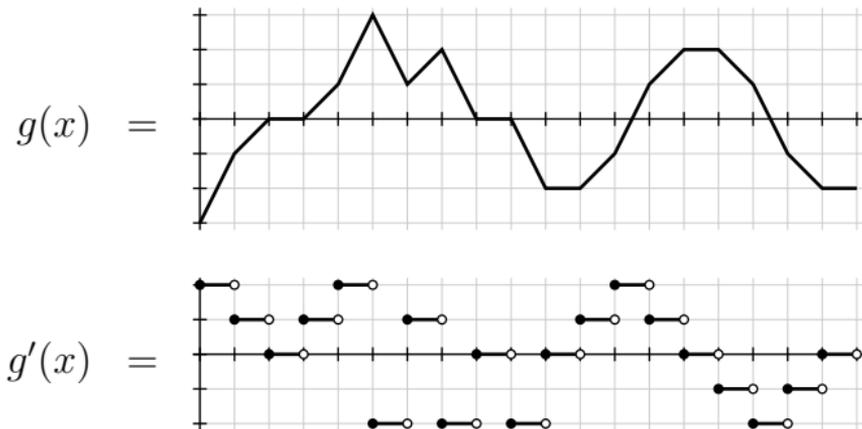
$$(a \ b) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = (ac + bd)$$

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} (a \ b) = \begin{pmatrix} ac & bc \\ ad & bd \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad 1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad S - 1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & -1 & 1 & \\ & & & -1 & 1 \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \end{pmatrix} \quad Sf = \begin{pmatrix} f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (S - 1)f = \begin{pmatrix} f(2) - f(1) \\ f(3) - f(2) \\ f(4) - f(3) \\ f(5) - f(4) \\ 0 - f(5) \end{pmatrix}$$

Obs: não usei isso aqui –  
 não deu tempo de L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>Xar tudo...



```

(%i1) f : exp( 3*x);
(%o1)      e3x

(%i2) f : exp(-3*x);
(%o2)      e-3x

(%i3) f : exp( 2*x);
(%o3)      e2x

(%i4) fp : diff(f,x);
(%o4)      2 e2x

(%i5) fpp : diff(f,x,2);
(%o5)      4 e2x

(%i6) Lf : fpp + fp - 6*f;
(%o6)      0

(%i7)
(%o7)      L(exp( 3*x));
              6 e3x

(%i8) L(exp(-3*x));
(%o8)      0

(%i9) L(exp( 2*x));
(%o9)      0

(%i10)
(%i11) D (f) := diff(f,x);
(%o11)      D (f) := diff (f,x)

(%i12) DD(f) := diff(f,x,2);
(%o12)      DD (f) := diff (f,x,2)

(%i13) L (f) := D(D(f)) + D(f) - 6*f;
(%o13)      L (f) := D (D (f)) + D (f) + (-6) f

(%i14) D(x^2);
(%o14)      2 x

(%i15) D(D(x^2));
(%o15)      2

(%i16) L(x^2);
(%o16)      -(6 x2) + 2 x + 2

(%i17) L(exp( 3*x));
(%o17)      6 e3x

(%i18) L(exp(-3*x));
(%o18)      0

(%i19) L(exp( 2*x));
(%o19)      0

(%i110)

```

## Soluções não-básicas

$$\begin{aligned} M(\alpha v + \beta w) &= M(\alpha v) + M(\beta w) \\ &= \alpha(Mv) + \beta(Mw) \end{aligned}$$

$$\underbrace{(D-2)(D+3)}_M \left( \underbrace{42}_\alpha \underbrace{e^{2x}}_v + \underbrace{99}_\beta \underbrace{e^{-3x}}_w \right)$$

$$\begin{aligned} &(D-2)(D+3)(42e^{2x} + 99e^{-3x}) \\ &= 42(D-2)(D+3)e^{2x} + 99(D-2)(D+3)e^{-3x} \\ &= 42 \underbrace{(D+3)(D-2)}_{\underbrace{De^{2x}-2e^{2x}}_{\underbrace{2e^{2x}-2e^{2x}}_0}} e^{2x} + 99 \underbrace{(D-2)(D+3)}_{\underbrace{De^{-3x}+3e^{-3x}}_{\underbrace{-3e^{-3x}+3e^{-3x}}_0}} e^{-3x} \\ &\quad \underbrace{\quad\quad\quad}_0 \quad \quad \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_0 \\ &\quad \underbrace{\quad\quad\quad}_0 \quad \quad \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_0 \end{aligned}$$

# Cálculo C2 - 2023.2

Aula 31: revisão de números complexos

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2023.2-C2.html>

## Links

StewPtCap17p6 (p.1020) Equações diferenciais de 2ª ordem

StewPtCap17p20 (p.1034) Caso 3: subamortecimento

StewPtApêndiceHp5 (p.A51) Apêndice H: Números complexos

BoyceDip3p5 (p.105) Capítulo 3: Equações lineares de 2ª ordem

BoyceDip3p11 (p.111) Seção 3.2: o operador diferencial  $L$

BoyceDip3p13 (p.113) Teorema 3.2.2: o princípio da superposição

BoyceDip3p21 (p.121) 3.3. Raízes complexas da equação característica

BoyceDip3p23 (p.123) Figura 3.3.1

BoyceDipEng3p4 (p.103) Chapter 3: Second-order linear ODEs

BoyceDipEng3p11 (p.110) Section 3.2: the differential operator  $L$

BoyceDipEng3p13 (p.112) Theorem 3.2.2: principle of superposition

BoyceDipEng3p21 (p.120) 3.3 Complex Roots of the Characteristic Equation

BoyceDipEng3p24 (p.123) Figure 3.3.1

[https://en.wikipedia.org/wiki/Complex\\_number](https://en.wikipedia.org/wiki/Complex_number) (bom)

[https://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmereo\\_complexo](https://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmereo_complexo) (ruim, cheio de erros)

2yT12 (Gabarito da P1 de 2019.2) A questão 3 usa o truque do  $E$

HernandezP57 (p.47) principais identidades trigonométricas

$$\begin{array}{ll}
 a, b, c, d \in \mathbb{R} & \\
 z, w \in \mathbb{C} & \\
 \theta \in \mathbb{R} & (\text{ângulo}) \\
 k \in \mathbb{Z} & \\
 \\
 \operatorname{Re}(a + bi) = a & (\text{parte real}) \\
 \operatorname{Im}(a + bi) = b & (\text{parte imaginária}) \\
 z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)i & (\text{isto sempre vale}) \\
 \bar{z} = \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z)i & (\text{conjugado: definição fácil}) \\
 \overline{a + bi} = a - bi & (\text{conjugado: definição difícil}) \\
 |z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} & (\text{módulo/norma: definição fácil}) \\
 |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} & (\text{módulo/norma: definição difícil}) \\
 \\
 180^\circ = \pi & (\leftarrow \text{lembre}) \\
 1^\circ = \frac{\pi}{180} & (\leftarrow \text{lembre}) \\
 42^\circ = 42 \frac{\pi}{180} & \\
 \circ = \frac{\pi}{180} & (\text{podemos tratar o } \circ \text{ como uma constante}) \\
 \\
 e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta & (\text{vamos entender isto aos poucos}) \\
 E = c + is & (\text{abreviação pra igualdade acima}) \\
 \\
 z = |z| e^{i \operatorname{arg}(z)} & (\text{vamos entender isto aos poucos}) \\
 1 + i = |1 + 1i| e^{i \operatorname{arg}(1+i)} & (\leftarrow \text{exemplo}) \\
 = \sqrt{1^2 + 1^2} e^{i45^\circ} & \\
 = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}} & 
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (a + bi)(c + di) &= a(c + di) + bi(c + di) \\
 &= ac + adi + bic + bidi \\
 &= ac + adi + bci + bd(i^2) \\
 &= ac + adi + bci + bd(-1) \\
 &= ac + adi + bci - bd \\
 &= ac - bd + adi + bci \\
 &= (ac - bd) + (ad + bc)i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (ae^{i\alpha})(be^{i\beta}) &= (ab)(e^{i\alpha} e^{i\beta}) \\
 &= (ab)(e^{i\alpha+i\beta}) \\
 &= (ab)(e^{i(\alpha+\beta)}) \\
 &= (ab)(e^{i(\alpha+\beta)})
 \end{aligned}$$

## “Partes de cima”

Fórmulas e definições:

$$\begin{aligned}
 e^{i\theta} &= \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta & E &= c + is \\
 e^{ik\theta} &= \cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta & e^{ik\theta} &= \cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta \\
 e^{-i\theta} &= \cos -\theta + i \operatorname{sen} -\theta & E^{-1} &= \cos -\theta + i \operatorname{sen} -\theta \\
 &= \cos \theta + i(-\operatorname{sen} \theta) & &= c + i(-s) \\
 &= \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta & &= c - i(s) \\
 e^{i\theta} + e^{-i\theta} &= \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta & E + E^{-1} &= c + is \\
 &+ \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta & &+ c - is \\
 &= 2 \cos \theta & &= 2c \\
 e^{i\theta} - e^{-i\theta} &= \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta & E - E^{-1} &= c + is \\
 &- (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) & &- (c - is) \\
 &= 2i \operatorname{sen} \theta & &= 2is \\
 \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} &= \cos \theta & \frac{E + E^{-1}}{2} &= c \\
 \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} &= \operatorname{sen} \theta & \frac{E - E^{-1}}{2i} &= s \\
 \frac{e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}}{2} &= \cos k\theta & \frac{E^k + E^{-k}}{2} &= \cos k\theta \\
 \frac{e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}}{2i} &= \operatorname{sen} k\theta & \frac{E^k - E^{-k}}{2i} &= \operatorname{sen} k\theta \\
 \operatorname{ccos} \theta &= e^{i\theta} + e^{-i\theta} & \operatorname{ccos} \theta &= E + E^{-1} \\
 \operatorname{csen} \theta &= e^{i\theta} - e^{-i\theta} & \operatorname{csen} \theta &= E - E^{-1} \\
 \operatorname{ccos} k\theta &= e^{ik\theta} + e^{-ik\theta} & \operatorname{ccos} k\theta &= E^k + E^{-k} \\
 \operatorname{csen} k\theta &= e^{ik\theta} - e^{-ik\theta} & \operatorname{csen} k\theta &= E^k - E^{-k}
 \end{aligned}$$

O seno e o cosseno “são” frações.

O **C**sen é a “parte de cima” do seno.

O **C**cos é a “parte de cima” do cosseno.

Um exemplo do método:

$$\begin{aligned}
 (\cos \theta)^3 &= \left(\frac{1}{2} \operatorname{ccos} \theta\right)^3 \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 (\operatorname{ccos} \theta)^3 \\
 (\operatorname{ccos} \theta)^3 &= (E + E^{-1})^3 \\
 &= E^3 + 3E + 3E^{-1} + E^{-3} \\
 &= (E^3 + E^{-3}) + (3E + 3E^{-1}) \\
 &= \operatorname{ccos} 3\theta + 3 \operatorname{ccos} \theta \\
 (\cos \theta)^3 &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 (\operatorname{ccos} \theta)^3 \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 (\operatorname{ccos} 3\theta + 3 \operatorname{ccos} \theta) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \operatorname{ccos} 3\theta + 3 \frac{1}{2} \operatorname{ccos} \theta\right) \\
 &= \frac{1}{4} (\operatorname{ccos} 3\theta + 3 \operatorname{ccos} \theta)
 \end{aligned}$$

Pra mim a parte do meio é a parte legal das contas, e as partes de cima e de baixo são as partes chatas (por causa das frações).

Compare com o gabarito da questão 3 daqui:

2yT12 (Gabarito da P1 de 2019.2)

### Exercício

Use a técnica acima pra integrar:

- $\int (\cos \theta)^2 d\theta$
- $\int (\operatorname{sen} \theta)^2 d\theta$
- $\int (\operatorname{sen} \theta)(\cos \theta) d\theta$
- $\int (\operatorname{sen} 2\theta)(\cos 3\theta) d\theta$

(%i1) p : 4\*x^2 + 5\*x^1 + 6\*x^0 + 7\*x^-1 + 8\*x^-2;

(%o1) 
$$4x^2 + 5x + \frac{7}{x} + \frac{8}{x^2} + 6$$

(%i2) q : 4\*E^2 + 5\*E^1 + 6\*E^0 + 7\*E^-1;

(%o2) 
$$4E^2 + 5E + \frac{7}{E} + 6$$

(%i3) lpdot(p, x);

(%o3) 
$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & . & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

(%i4) lpdot(q, E);

(%o4) 
$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & . & 7 \end{pmatrix}$$

(%i5) f : cos(th)^3;

(%o5) 
$$(\cos \theta)^3$$

(%i6) g : ccos(th)^3;

(%o6) 
$$8 (\cos \theta)^3$$

(%i7) lpe(f);

(%o7) 
$$\frac{\cos(3\theta)}{4} + \frac{3 \cos \theta}{4}$$

(%i8) lpe(g);

(%o8) 
$$2 \cos(3\theta) + 6 \cos \theta$$

(%i9)

(%i9) exponentialize(f);

(%o9) 
$$\frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3}{8}$$

(%i10) expand(exponentialize(f));

(%o10) 
$$\frac{e^{3i\theta}}{8} + \frac{3e^{i\theta}}{8} + \frac{3e^{-i\theta}}{8} + \frac{e^{-3i\theta}}{8}$$

(%i11) demoiivre(expand(exponentialize(f)));

(%o11) 
$$\frac{i \sin(3\theta) + \cos(3\theta)}{8} + \frac{\cos(3\theta) - i \sin(3\theta)}{8} + \frac{3(i \sin \theta + \cos \theta)}{8} + \frac{3(\cos \theta - i \sin \theta)}{8}$$

(%i12) expand(demoiivre(expand(exponentialize(f))));

(%o12) 
$$\frac{\cos(3\theta)}{4} + \frac{3 \cos \theta}{4}$$

(%i13) subst(th\_E, expand(exponentialize(f)));

(%o13) 
$$\frac{E^3}{8} + \frac{3E}{8} + \frac{3}{8E} + \frac{1}{8E^3}$$

(%i14) subst(th\_E, expand(exponentialize(g)));

(%o14) 
$$E^3 + 3E + \frac{3}{E} + \frac{1}{E^3}$$

(%i15) lpe(f);

(%o15) 
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & . & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

(%i16) lpe(g);

(%o16) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & . & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```

(%i17) lpE( ccos(th)^3);
(%o17)          (1 0 3 0 . 3 0 1)

(%i18) lpE( ccos(th));
(%o18)          (1 0 . 1)

(%i19) lpE(3*ccos(th));
(%o19)          (3 0 . 3)

(%i20) lpE(ccos(3*th));
(%o20)          (1 0 0 0 . 0 0 1)

(%i21) lpE(ccos(3*th)+3*ccos(th));
(%o21)          (1 0 3 0 . 3 0 1)

(%i22) lpE( ccos(th) );
(%o22)          (1 0 . 1)

(%i23) lpE( ccos(th)^2 );
(%o23)          (1 0 2 . 0 1)

(%i24) lpE( ccos(th)^3 );
(%o24)          (1 0 3 0 . 3 0 1)

(%i25) lpE( csin(th) );
(%o25)          (1 0 . -1)

(%i26) lpE( csin(th)^2 );
(%o26)          (1 0 -2 . 0 1)

(%i27) lpE( csin(th)^3 );
(%o27)          (1 0 -3 0 . 3 0 -1)

(%i28) lpE( csin(2*th) );
(%o28)          (1 0 0 . 0 -1)

(%i29) lpE( csin(2*th)^2 );
(%o29)          (1 0 0 0 -2 . 0 0 0 1)

(%i30)

```

# Cálculo C2 - 2023.2

Aula 34: EDOs exatas

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2023.2-C2.html>

## Links

StewPtCap14p25 (p.811) 14.3 Derivadas Parciais

StewPtCap14p45 (p.831) 14.5 A Regra da Cadeia

StewPtCap14p47 (p.833) A Regra da Cadeia (versão geral)

BoyceDip2p54 (p.72) 2.6 Equações Exatas e Fatores Integrantes

BoyceDip2p58 (p.76) Problemas

BoyceDipEng2p50 (p.70) 2.6 Exact Differential Equations and Integrating Factors

BoyceDipEng2p55 (p.75) Problems

ZillCullenCap2p25 (p.60) 2.4 Equações exatas

ZillCullenCap2p32 (p.67) Exercícios

ZillCullenEngCap2p35 (p.62) 2.4 Exact equations

ZillCullenEngCap2p41 (p.68) Exercises 2.4

DiffyQsP63 1.8 Exact Equations

DiffyQsP70 1.8.3 Exercises

2yT14 (2019.2) P2

<http://angq.twu.net/LATEX/2019-2-C2-P2.pdf>

2hQ73 (2023.2) Quadros das aulas sobre EDOs exatas

2yQ106 (2019.2) Quadros das aulas sobre EDOs exatas

## Método e exemplo

$$[E_5] = \begin{pmatrix} dz = z_x dx + z_y dy = 0 \\ \frac{d}{dx} z = z_x + z_y \frac{dy}{dx} = 0 \\ z = C \end{pmatrix}$$

$$[E_5][S_1] = \begin{pmatrix} d(x^2 y^3) = (2xy^3)dx + (3x^2 y^2)dy = 0 \\ \frac{d}{dx}(x^2 y^3) = (2xy^3) + (3x^2 y^2) \frac{dy}{dx} = 0 \\ (x^2 y^3) = C \end{pmatrix}$$

$$[E_3] = \begin{pmatrix} z_x dx + z_y dy = 0 \\ z_x + z_y \frac{dy}{dx} = 0 \\ z = C \end{pmatrix}$$

$$[E_3][S_1] = \begin{pmatrix} (2xy^3)dx + (3x^2 y^2)dy = 0 \\ (2xy^3) + (3x^2 y^2) \frac{dy}{dx} = 0 \\ (x^2 y^3) = C \end{pmatrix}$$

$$[E_2] = \begin{pmatrix} z_x + z_y \frac{dy}{dx} = 0 \\ z = C \end{pmatrix}$$

$$[E_2][S_1] = \begin{pmatrix} (2xy^3) + (3x^2 y^2) \frac{dy}{dx} = 0 \\ (x^2 y^3) = C \end{pmatrix}$$

$$[S_1] = \begin{bmatrix} z := (x^2 y^3) \\ z_x := (2xy^3) \\ z_y := (3x^2 y^2) \end{bmatrix}$$

## Uma questão da P2 de 2019.2

4) Sejam (\*\*\*) e (\*\*\*\*) estas EDOs:

$$2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy = 0 \quad (***)$$

$$2x^2y^3 dx + 3x^3y^2 dy = 0 \quad (****)$$

- a) **(0.5 pts)** Mostre que (\*\*\*) é exata.  
 b) **(0.5 pts)** Encontre a solução geral de (\*\*\*)  
 c) **(1.0 pts)** Teste a sua solução geral da (\*\*\*)  
 d) **(0.5 pts)** Mostre que a solução geral da EDO (\*\*\*) também é solução da (\*\*\*\*).  
 e) **(0.5 pts)** Mostre que (\*\*\*\*) não é exata.  
 f) **(0.5 pts)** Mostre que o fator integrante obtido por

$$p(x) = (M_y - N_x)/N,$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$$

transforma (\*\*\*\*) em (\*\*\*)

Versão original:

<http://angg.twu.net/LATEX/2019-2-C2-P2.pdf>

# Cálculo C2 - 2023.2

Aula 35: EDOs lineares

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2023.2-C2.html>

## Links

[StewPtCap9p37](#) (p.557) 9.5 Equações Lineares

[StewPtCap9p41](#) (p.561) 9.5 Exercícios

[BoyceDip2p5](#) (p.23) 2.1 Equações lineares; método dos fatores integrantes

[BoyceDip2p11](#) (p.29) Problemas

[BoyceDipEng2p4](#) (p.24) 2.1 Linear Differential Equations; Method of Integrating Factors

[BoyceDipEng2p11](#) (p.31) Problems

[ZillCullenCap2p33](#) (p.68) 2.5 Equações lineares

[ZillCullenCap2p42](#) (p.77) 2.5 Exercícios

[ZillCullenEngCap2p26](#) (p.53) 2.3 Linear equations

[ZillCullenEngCap2p33](#) (p.60) Exercises 2.3

[DiffyQsP40](#) 1.4 Linear equations and the integrating factor

[DiffyQsP43](#) 1.4.1 Exercises

## O método

Aqui a gente tem a explicação do Stewart de como resolver EDOs lineares com todas as partes em português deletadas:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad [1]$$

$$I(x)(y' + P(x)y) = (I(x)y)' \quad [3]$$

$$(I(x)y)' = I(x)Q(x) \quad [4]$$

$$I(x)y = \int I(x)Q(x) dx + C$$

$$y(x) = \frac{1}{I(x)} \left[ \int I(x)Q(x) dx + C \right] \quad [4]$$

$$I(x)y' + I(x)P(x)y = (I(x)y)' = I'(x)y + I(x)y'$$

$$I(x)P(x) = I'(x)$$

$$\int \frac{1}{I} dI = \int P(x) dx$$

$$I(x) = Ae^{\int P(x) dx}$$

$$A = \pm e^C$$

$$A = 1$$

$$I(x) = e^{\int P(x) dx} \quad [5]$$

Repare que sem as partes em português ela vira algo que só gênios conseguem decifrar – e um dos nossos objetivos neste curso é aprender a organizar as contas de modo que elas fiquem fáceis de entender, de justificar e de verificar.

Se a gente deixa só as linhas [1], [4] e [5] e põe elas nesta ordem,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad [1]$$

$$I(x) = e^{\int P(x) dx} \quad [5]$$

$$y(x) = \frac{1}{I(x)} \left[ \int I(x)Q(x) dx + C \right] \quad [4]$$

o método fica bem claro: pra resolver uma EDO da forma [1] a gente define um fator integrante  $I(x)$  usando a definição da linha [5], e aí as nossas soluções vão ser as funções  $y(x)$  da linha [4], onde  $C$  é uma constante qualquer.

Agora se a gente precisar resolver EDOs lineares basta aplicar um método que cabe em três linhas. Eu prefiro escrever ele usando outras letras,

$$y(x) \Rightarrow f(x)$$

$$P(x) \Rightarrow g(x)$$

$$\int P(x) dx \Rightarrow G(x)$$

$$Q(x) \Rightarrow h(x)$$

$$I(x) \Rightarrow m(x)$$

o omitindo os ' $(x)$ ' na maioria dos lugares. A tradução é isto,

$$f' + gf = h$$

$$m = e^G$$

$$f = \frac{1}{m} \left( \int mh dx + C \right)$$

mas eu vou preferir escrever ela deste jeito:

$$[EL_3] = \begin{pmatrix} f' + fg = h \\ G' = g \\ f = e^{-G} \left( \int e^G h dx + C \right) \end{pmatrix}$$

### Exercício 0

O Stewart começa por este exemplo, que ele chama de [2]:

StewPtCap9p37 (p.557)  $y' + \frac{1}{x}y = 2$

Seja  $[S_1] = \begin{bmatrix} g := 1/x \\ h := 2 \\ G := \ln x \end{bmatrix}$ .

- Use  $[EL_3][S_1]$  pra obter a solução geral da EDO [2].
- Chame esta solução geral de  $f_1(x)$  – use um “seja”! – e teste-a.
- Encontre a solução particular que passa pelo ponto  $(2, 5)$ .
- Chame esta solução particular de  $f_2(x)$  – use um “seja”! – e teste-a.

## O que realmente importa

### Exercício importantíssimo!!!

Entenda isto aqui e reescreva num formato BEM mais fácil de entender:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad [1]$$

$$I(x)(y' + P(x)y) = (I(x)y)' \quad [3]$$

$$(I(x)y)' = I(x)Q(x)$$

$$I(x)y = \int I(x)Q(x) dx + C$$

$$y(x) = \frac{1}{I(x)} \left[ \int I(x)Q(x) dx + C \right] \quad [4]$$

$$I(x)y' + I(x)P(x)y = (I(x)y)' = I'(x)y + I(x)y'$$

$$I(x)P(x) = I'(x)$$

$$\int \frac{1}{I} dI = \int P(x) dx$$

$$I(x) = Ae^{\int P(x) dx}$$

$$A = \pm e^C$$

$$A = 1$$

$$I(x) = e^{\int P(x) dx} \quad [5]$$

(%i1) e1 : 'diff(y,x) + 1/x \* y = 2;

(%o1)

$$\frac{d}{dx}y + \frac{y}{x} = 2$$

(%i2) e2 : ode2(e1,y,x);

(%o2)

$$y = \frac{x^2 + \%c}{x}$$

(%i3) solve(e2, \%c);

(%o3)

$$[\%c = xy - x^2]$$

(%i4) e3 : solve(e2, \%c)[1];

(%o4)

$$\%c = xy - x^2$$

(%i5) e4 : subst([x=2,y=5], e2);

(%o5)

$$5 = \frac{\%c + 4}{2}$$

(%i6) solve(e4, \%c);

(%o6)

$$[\%c = 6]$$

(%i7) e4 : solve(e4, \%c)[1];

(%o7)

$$\%c = 6$$

(%i8)

subst(e4,e2);

(%o8)

$$y = \frac{x^2 + 6}{x}$$

(%i9) define(f2(x), rhs(subst(e4,e2)));

(%o9)

$$f2(x) := \frac{x^2 + 6}{x}$$

(%i10) e5 : subst([y=f2(x)], e1);

(%o10)

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x^2 + 6}{x} \right) + \frac{x^2 + 6}{x^2} = 2$$

(%i11) ev(e5, diff);

(%o11)

$$2 = 2$$

(%i12)

# Cálculo 2 - 2023.2

Aula 38: o método dos  
coeficientes a determinar

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF  
<http://anggtwu.net/2023.2-C2.html>

## Links

- [BoyceDip3p33](#) (p.134) 3.5. Equações não-homogêneas; método dos coeficientes indeterminados
- [BoyceDip4p9](#) (p.176) 4.2. Equações homogêneas com coeficientes constantes
- [BoyceDip4p16](#) (p.183) 4.3. O método dos coeficientes indeterminados
- [BoyceDipEng3p34](#) (p.133) "3.5 Nonhomogeneous Equations; Method of Undetermined Coefficients
- [BoyceDipEng4p9](#) (p.174) 4.2 Homogeneous Differential Equations with Constant Coefficients
- [BoyceDipEng4p16](#) (p.181) 4.3 The Method of Undetermined Coefficients
- [ZillCullenCap4p46](#) (p.182) 4.4. Coeficientes indeterminados - abordagem por superposição
- [ZillCullenCap4p59](#) (p.195) 4.5. Operadores diferenciais
- [ZillCullenCap4p60](#) (p.196) Exemplo 1: ...pode ser fatorado...
- [ZillCullenCap4p65](#) (p.201) 4.6. Coeficientes indeterminados - abordagem por anuladores
- [ZillCullenEngCap4p30](#) (p.140) 4.4 Undetermined Coefficients - Superposition Approach
- [ZillCullenEngCap4p40](#) (p.150) 4.5 Undetermined Coefficients - Annihilator Approach
- [ZillCullenEngCap4p40](#) (p.150) Factoring operators
- [2hQ85](#) Aula 38 de 2023.2, sobre coeficientes a determinar (21/nov/2023)

## Questão 2

**(Total: 4.0 pts)**

Lembre que nós vimos dois tipos de EDOs lineares com coeficientes constantes — “EDOLCCs” — no curso: o primeiro tipo tinha soluções básicas da forma  $e^{ax}$  e  $e^{bx}$ , onde  $a$  e  $b$  são reais, e o segundo tipo tinha “soluções básicas complexas” da forma  $e^{(a+ib)x}$  e  $e^{(a-ib)x}$  e “soluções básicas reais” da forma  $e^{\alpha x} \cos \beta x$  e  $e^{\alpha x} \sin \beta x$ ; as soluções básicas reais eram combinações lineares das soluções básicas complexas e vice-versa.

Sejam (\*\*) e (\*\*\*) as EDOs abaixo:

$$\begin{aligned} y'' + y' - 20y &= 0 & (**) \\ y'' + 4y' + 29y &= 0 & (***) \end{aligned}$$

A EDO (\*\*) é do primeiro tipo e a EDO (\*\*\*) é do segundo tipo.

Original aqui:

2gT135 (2023.1) P2, questão 2

a) **(0.5 pts)** Encontre as soluções básicas e a solução geral da EDO (\*\*). Dê um nome para cada uma delas.

b) **(1.5 pts)** Encontre uma solução da EDO (\*\*) – vou chamá-la de  $g(x)$  – que obedece  $g(0) = 4$  e  $g'(0) = 5$ , e teste-a. Dica: você vai ter que resolver um sistema pra descobrir a quantidade certa de cada “vetor” na combinação linear!

c) **(0.5 pts)** Diga quais são as “soluções básicas complexas” e as “soluções básicas reais” para a EDO (\*\*\*)

d) **(1.5 pts)** Escolha uma das suas “soluções básicas reais” do item anterior e verifique que ela realmente é uma solução da EDO (\*\*\*)

## Três exemplos

Na aula 38 – fotos do quadros: [2hQ85](#) – nós resolvemos três exemplos:

$$\text{(Ex1): } y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}$$

$$\text{(Ex2): } y'' - 3y' - 4y = 2 \operatorname{sen} x$$

$$\text{(Ex2.5): } y'' - 3y' - 4y = 4x^2 - 1$$

Eu peguei esses exemplos daqui:

[BoyceDip3p33](#) 3.5 (...) coeficientes indeterminados

[BoyceDip3p35](#) Exemplo 1

[BoyceDipEng3p34](#) 3.5 (...) Undetermined Coefficients

[BoyceDipEng3p36](#) Example 1

# Cálculo 2 - 2023.2

Aula 39: Séries de Taylor e MacLaurin

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2023.2-C2.html>

## Links

2hQ89 Quadros da aula 39 (22/nov/2023)

Stewart:

StewPtCap7p55 (p.470) 7.8 Integrais Impróprias  
 StewPtCap11p5 (p.623) 11 Sequências e Séries Infinitas  
 StewPtCap11p6 (p.624) 11.1 Sequências  
 StewPtCap11p18 (p.636) 11.2 Séries  
 StewPtCap11p27 (p.645) 11.3 O Teste da Integral e Estimativas de Somas  
 StewPtCap11p34 (p.652) 11.4 Os Testes de Comparação  
 StewPtCap11p39 (p.657) 11.5 Séries Alternadas  
 StewPtCap11p43 (p.661) 11.6 Convergência Absoluta e os Testes da Razão e da Raiz  
 StewPtCap11p49 (p.667) 11.7 Estratégia para Testes de Séries  
 StewPtCap11p51 (p.669) 11.8 Séries de Potência  
 StewPtCap11p53 (p.671) ...raio de convergência  
 StewPtCap11p56 (p.674) 11.9 Representações de Funções como Séries de Potências  
 StewPtCap11p61 (p.679) 11.10 Séries de Taylor e Maclaurin  
 StewPtCap11p67 (p.685) ...em colunas  
 StewPtCap11p74 (p.692) 11.11 Aplicações dos Polinômios de Taylor  
 StewPtCap11p83 (p.701) Revisão  
 StewPtCap11p85 (p.703) Problemas Quentes

Vídeo do Mathologer – assista do 4:00 ao 12:21:

<http://www.youtube.com/watch?v=p-LbzWmm2zk>

Quadros sobre a notação de caixinhas:

2hQ32 Aula 11,sep19: Frações parciais  
 2hQ70 Aula 31,nov06: Revisão de variáveis complexas  
 2hQ75 Aula 34,nov13: EDOs exatas  
 2hQ89 Aula 39,nov22: Séries de Taylor  
 2hT234 Código em Maxima

## Caixinhas

Nestes slides eu vou  $\LaTeX$ ar a notação de caixinhas deste jeito:

$$\begin{aligned} [4 \ 5 \ 6 \ . \ 7] &= 4x^2 + 5x^1 + 6x^0 + 7x^{-1} \\ &= 4x^2 + 5x + 6 + 7x^{-1} \\ \begin{bmatrix} a & b & c & d & e & . \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & . \end{bmatrix} &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & . \end{bmatrix} &= ax^4 \end{aligned}$$

Note que se

$$f(x) = [4 \ 5 \ 6 \ . \ 7 \ 8]$$

$$\begin{aligned} \text{Então: } f(10) &= 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} \\ &= 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6 + 7 \cdot 0.1 + 8 \cdot 0.01 \\ &= 456.78 \end{aligned}$$

## Caixinhas (2)

Repare que:

$$\text{deriv}([e \ d \ c \ b \ a \ .]) = \left( \begin{array}{l} [e \ d \ c \ b \ a \ .], \\ [4e \ 3d \ 2c \ b \ .], \\ [12e \ 6d \ 2c \ .], \\ [24e \ 6d \ .], \\ [24e \ .], \\ [0 \ .], \\ \dots \end{array} \right)$$

e que:

$$\begin{aligned} \text{deriv}_0([e \ d \ c \ b \ a \ .]) &= (a, b, 2c, 6d, 24e, 0, 0, \dots) \\ \text{deriv}_0^3([e \ d \ c \ b \ a \ .]) &= (a, b, 2c, 6d) \end{aligned}$$

a operação  $\text{deriv}_0$  extrai todos os coeficientes de um polinômio;  
a operação  $\text{deriv}_0^3$  extrai todos os coeficientes até o de grau 3;  
a operação  $\text{deriv}_0^n$  extrai todos os coeficientes até o de grau  $n$ ;  
elas multiplicam o coeficiente de cada  $x^k$  por  $k!$ .

### Exercício

Entenda a definição do Stewart para  $T_n(x)$  – aqui:

**StewPtCap11p63** (p.681) “Observe que  $T_n \dots$ ”

e calcule  $T_3$  no caso em que  $a = 0$  e:

$$f(x) = [\varepsilon \ \delta \ \gamma \ \beta \ \alpha \ .] .$$

**Aviso:** o resto deste PDF tem um material antigo sobre Séries de Taylor que eu fiz pra Cálculo 3, e que eu só usei um pouquinho nas aulas... e que eu quero reescrever!

## A idéia básica

Digamos que  $f(x)$  é um polinômio.

Digamos que o grau dele é 4, pra simplificar.

Digamos que  $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ .

Então:

$$\begin{array}{lll}
 f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 & f(0) = a & a = f(0) \\
 f'(x) = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 & f'(0) = b & b = f'(0) \\
 f''(x) = 2c + 6dx + 12ex^2 & f''(0) = 2c & c = f''(0)/2 \\
 f'''(x) = 6d + 24ex & f'''(0) = 6d & d = f'''(0)/6 \\
 f''''(x) = 24e & f''''(0) = 24e & e = f''''(0)/24
 \end{array}$$

E portanto:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f''''(0)}{24}x^4$$

## A idéia básica (2)

Agora vamos tentar generalizar isso.

Digamos que  $f(x)$  é um polinômio.

Digamos que o grau dele é  $k$ , e que **por enquanto**  $k = 4$ .

Digamos que  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ .

A notação  $f^{(k)}$ , como o  $(k)$  entre parênteses, quer dizer “ $f$  derivada  $k$  vezes”. Por exemplo,  $f^{(4)} = f''''$ , e  $f^{(0)} = f$ .

Então:

$$\begin{array}{llll}
 f^{(0)}(x) = & a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 & f^{(0)}(0) = & 0! a_0 & a_0 = & f^{(0)}(0)/0! \\
 f^{(1)}(x) = & a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 & f^{(1)}(0) = & 1! a_1 & a_1 = & f^{(1)}(0)/1! \\
 f^{(2)}(x) = & 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 & f^{(2)}(0) = & 2! a_2 & a_2 = & f^{(2)}(0)/2! \\
 f^{(3)}(x) = & 6a_3 + 24a_4x & f^{(3)}(0) = & 3! a_3 & a_3 = & f^{(3)}(0)/3! \\
 f^{(4)}(x) = & 24a_4 & f^{(4)}(0) = & 4! a_4 & a_4 = & f^{(4)}(0)/4!
 \end{array}$$

E portanto:

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(0)}{0!}x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 = \sum_{k=0}^4 \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

### Exercício 1.

A fórmula do slide anterior também funciona pra polinômios com grau menor que 4.

Verifique o que ela faz quando

$$f(x) = 42x^2 + 99x + 200.$$

Lembre que no ensino médio você era obrigado a “simplificar”  $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 999$  para 119880, mas em Cálculo 2 você tem que encontrar jeitos de escrever que sejam mais simples de ler e de verificar... pra gente **em certos contextos**  $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 999$  é mais “simples” que 119880.

## Exercício 2.

Tente aplicar a fórmula (\*) abaixo

$$f(x) = \sum_{k=0}^4 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad (*)$$

a esta  $f$  aqui:  $f(x) = 200x^5$ .

a) O que acontece?

b) Tente escrever em detalhes o que dá errado.

Você vai precisar de notação matemática **E** português.

Tente aprender as convenções que eu usei nos PDFs

e as convenções que os livros usam, e lembre que se

você começar escrevendo uma igualdade qualquer leitor

que não seja muito seu amigo vai interpretá-la

como uma **afirmação**.

## As operações $\text{derivs}$ e $\text{derivs}_0$

Sejam  $\text{derivs}$  e  $\text{derivs}_0$  as seguintes operações – que vão nos ajudar muito nas contas:

$$\begin{aligned}\text{derivs}(f) &= (f, f', f'', f''', \dots) \\ \text{derivs}_0(f) &= (f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), \dots)\end{aligned}$$

Repare que  $\text{derivs}(f)$  retorna uma sequência infinita de **funções** e  $\text{derivs}_0(f)$  retorna uma sequência infinita de **números**.

Um exemplo: se  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , então:

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^2 + bx + c, & f(0) &= c, \\ f'(x) &= 2ax + b, & f'(0) &= b, \\ f''(x) &= 2a, & f''(0) &= 2a, \\ f'''(x) &= 0, & f'''(0) &= 0,\end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}\text{derivs}(f) &= (ax^2 + bx + c, 2ax + b, 2a, 0, 0, 0, \dots) \\ \text{derivs}_0(f) &= (c, b, 2a, 0, 0, 0, \dots)\end{aligned}$$

## Algumas definições

Isto aqui

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

é a *série de Taylor da função  $f$  no ponto  $0$  truncada até grau  $n$* , e isto aqui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

ou:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

é a *série de Taylor da função  $f$  no ponto  $0$* .

### Exercício 3.

Seja  $f(x) = \text{sen } x$ .

- Calcule as 8 primeiras componentes de  $\text{derivs}(f)$ .
- Calcule as 8 primeiras componentes de  $\text{derivs}_0(f)$ .
- Calcule a série de Taylor de  $\text{sen } x$  truncada até grau 7.
- Seja  $g(x)$  a série de Taylor de  $\text{sen } x$  truncada até grau 7; Calcule  $g(0.1)$  **na mão** e compare o seu resultado com o resultado de calcular  $\text{sen } 0.1$  na calculadora ou no computador.

**Exercício 4.**

Calcule  $\text{derivs}(f)$  e  $\text{derivs}_0(f)$  para cada uma das 'f's abaixo, até o grau pedido.

a)  $f(x) = e^x$ , até grau 4

b)  $f(x) = e^{2x}$ , até grau 4

c)  $f(x) = e^{ix}$ , até grau 8

d)  $f(x) = \cos x$ , até grau 8

e)  $f(x) = \text{sen } x$ , até grau 8

f)  $f(x) = i \text{sen } x$ , até grau 8

g)  $f(x) = \cos x + i \text{sen } x$ , até grau 8

## A notação com ‘ $\approx$ ’

O sinal ‘ $\approx$ ’ que dizer “é aproximadamente igual a”, mas ele não diz quão boa é a aproximação...

Estas duas afirmações são ambas verdadeiras:

$$f(0.42) \approx f(0) + f'(0) \cdot 0.42 + \frac{f''(0)}{2}(0.42)^2$$

$$f(0.42) \approx f(0) + f'(0) \cdot 0.42 + \frac{f''(0)}{2}(0.42)^2 + \frac{f'''(0)}{6}(0.42)^3$$

Até dá pra formalizar essa igualdade aqui embaixo usando um limite - veja a página 4 deste PDF:

<https://people.math.sc.edu/girardi/m142/handouts/10sTaylorPolySeries.pdf>

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

Mas eu não sei como formalizar precisamente a versão com 0.42 no lugar do  $x$ ... =(

## As versões truncadas de $\text{derivs}$ , $\text{derivs}_0$ e $\text{derivs}_p$

Vamos definir  $\text{derivs}^n$  e  $\text{derivs}_0^n$  como as versões “truncadas até grau  $n$ ” de  $\text{derivs}$  e  $\text{derivs}_0$ ...

$\text{derivs}^n(f)$  vai ser a lista com as primeiras  $n + 1$  entradas de  $\text{derivs}(f)$ , e  $\text{derivs}_0^n(f)$  vai ser a lista com as primeiras  $n + 1$  entradas de  $\text{derivs}_0(f)$ .

Além disso  $\text{derivs}_p(f)$  vai ser a lista infinita  $(f(p), f'(p), f''(p), \dots)$ , e  $\text{derivs}_p^n(f)$  vai ser a lista com as primeiras  $n + 1$  entradas de  $\text{derivs}_p(f)$ .

Exemplo:

$$\text{derivs}_{42}^2(f) = (f(42), f'(42), f''(42)).$$

Vamos nos referir a  $\text{derivs}_p^n(f)$  como “as derivadas de  $f$  até grau  $n$  no ponto  $p$ ”. Repare que  $f(42)$  é a “derivada de  $f$  de grau 0 no ponto 42”,  $f'(42)$  é a “derivada de  $f$  de grau 1 no ponto 42”, etc...

Antes o termo “grau” não servia pra falar de número de vezes que uma função foi derivada, mas agora passou a servir.  $\Rightarrow$

## Notação de físicos: introdução

Links:

<https://people.math.sc.edu/girardi/m142/handouts/10sTaylorPolySeries.pdf>  
<http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-5.pdf> (páginas 171–173)  
<https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf> “Calculus Made Easy” (1914)  
<http://angg.twu.net/mathologer-calculus-easy.html>  
<http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C3-notacao-de-fisicos.pdf> (p.5: linearizações)  
<http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-notacao-de-fisicos.pdf>  
<http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=117>

Na aula de 2022sep23 a gente usou os links acima  
e eu escrevi um montão de coisas no quadro –  
que eu vou digitar assim que der!!!

## Exercício 5.

Leia a seção 4.7 do livro do Daniel Miranda:

<http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=117>

Os livros mais modernos:

- i) distinguem  $dx$  e  $\Delta x$ ,
- ii) escrevem  $y = f(x)$  ao invés de  $y = y(x)$ ,
- iii) evitam a convenção  $x_1 = x_0 + \Delta x$ .

a) Traduza o início da seção 4.7 do Miranda - até o fim da página 118 - pra notação do Thompson. Dicas:

$$\begin{array}{l} f(x) \approx f(p) + f'(p)(x - p) \\ L(x) = f(p) + f'(p)(x - p) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \\ L(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \end{array}$$

e a função  $L$  é exatamente a série de Taylor da função  $f$  truncada até grau 1... lembre que nós quase só vimos séries de Taylor no caso em que  $x_0$  era 0, mas ficamos de ver depois o caso em que o “ponto base” não precisava mais ser 0...

## Alguns truques de tradução

Truque 1: quando a gente escreve fórmulas “com o mesmo formato” perto uma da outra o leitor tende a ler a segunda ou como uma **tradução** da primeira pra outra notação ou como um **caso particular** da primeira...

Isto aqui é uma tradução de duas das fórmulas da p.117 do D. Miranda pra “notação de físicos”:

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(p) + f'(p)(x - p) & \Rightarrow & & f(x_1) &\approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \\ L(x) &= f(p) + f'(p)(x - p) & & & L(x_1) &= f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \end{aligned}$$

E isto aqui é um caso particular da primeira fórmula:

$$f(4.02) \approx f(4) + f'(4)(4.02 - 4) \quad (*)$$

Repare que a fórmula (\*) fica mais clara se escrevermos isto explicitamente:

$$x_1 = 4.02 \quad x_0 = 4$$

...e repare que se a gente tentar escrever isto aqui direto

$$\sqrt{4.02} \approx \sqrt{4} + \sqrt{4}'(4.02 - 4)$$

fica confuso e péssimo — não existe uma notação padrão pra derivada de  $\sqrt{x}$  em  $x = 4$ !!! Aqui a gente TEM que usar um truque novo — a gente tem que dar um nome pra função  $\sqrt{x}$ . Por exemplo...

## Alguns truques de tradução (2)

Seja  $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ .

Então  $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , e

$$\begin{aligned} f(4.02) &\approx f(4) + f'(4)(4.02 - 4) \\ \Rightarrow \sqrt{4.02} &\approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4.02 - 4) \end{aligned}$$

Repare que acima eu só fiz as substituições  $f(x) := \sqrt{x}$  e  $f'(x) := \frac{1}{2\sqrt{x}}$  — eu acho que as contas mais mais fáceis de entender se a gente fizer as substituições e as simplificações em passos separados:

$$\begin{aligned} f(4.02) &\approx f(4) + f'(4)(4.02 - 4) \\ \Rightarrow \sqrt{4.02} &\approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4.02 - 4) \\ &= 2 + \frac{1}{4}(0.02) \\ &= 2 + 0.005 \\ &= 2.005 \\ \sqrt{4.02} &= 2.004993765576342... \end{aligned}$$

A última linha acima tem um '=' ao invés de um '≈', e eu calculei o resultado dela com a calculadora.

## A tradução pra notação de físicos

Temos:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

Acho que vocês devem conseguir acreditar nisso aqui...  
(a gente pode checar os detalhes depois!)

$$\begin{aligned}g(x_0 + \Delta x) &\approx g(x_0) + g'(x_0)\Delta x + \frac{g''(x_0)}{2}(\Delta x)^2 \\h(x + \Delta x) &\approx h(x) + h'(x)\Delta x + \frac{h''(x)}{2}(\Delta x)^2\end{aligned}$$

E se  $y = y(x)$  então:

$$\begin{aligned}y(x + \Delta x) &\approx y + y_x \Delta x + \frac{y_{xx}}{2}(\Delta x)^2 \\y(x + \Delta x) &\approx y + y_x \Delta x + \frac{y_{xx}}{2}(\Delta x)^2 + \frac{y_{xxx}}{6}(\Delta x)^3\end{aligned}$$

**Exercício 5.**

Digamos que  $x_0 = 10$ ,  $f(x) = x^3$ ,  $y_0 = f(x_0)$ ,  $g(y) = \sin y$ .

- a) Calcule  $\text{deriv}_{x_0}^1(f(x))$ .
- b) Calcule  $\text{deriv}_{y_0}^1(g(y))$ .
- c) Calcule  $\text{deriv}_{x_0}^1(g(f(x)))$ .

Seja  $h(x) = g(f(x))$  — ou seja,  $h = g \circ f$ .

- d) Calcule  $\text{deriv}_{x_0}^2(h(x))$ .

## Exercício 5: gabarito em código

**Exercício 6.**

Este exercício é uma versão mais geral do exercício 4.

Digamos que  $f$  e  $g$  são funções suaves de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ .

(Uma função é “suave” quando ela pode ser derivada infinitas vezes. A função  $|x|$  não é suave).

Digamos que  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $y_0 = f(x_0)$ , e  $h = g \circ f$ .

a) Calcule  $\text{deriv}_{x_0}^2(h(x))$ .

Repare que neste caso “calcule” quer dizer algo como “expanda e simplifique a expressão que você obtiver”...

Existem vários tipos de expansão e simplificação, e os programas de computação simbólica dão um nome pra cada tipo e permitem que você escolha quais vão ser aplicadas.

### Exercício 5 (cont.)

Agora sejam  $y = y(x) = f(x)$  e  $z = z(y) = g(y)$ .

b) Traduza o seu  $\text{deriv}_{x_0}^2(h(x))$  do item (a) pra notação de físicos.

Dica (pequena):  $\frac{d}{dx}g(f(x_0)) = z_y y_x$ .

c) Calcule  $\text{deriv}_{x_0}^3(z)$  usando notação de físicos.

Nas próximas páginas eu pus um “gabarito em código” do item (b). O modo mais fácil de usar a “notação de físicos” no Maxima é traduzir entre ela e a “notação de matemáticos” sempre que necessário. No item (c) as contas em “notação de matemáticos” ficam gigantescas, mas se você conseguir fazer elas todas em “notação de físicos” elas ficam pequenas.

# Cálculo 2 - 2023.2

Dicas pra P2

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2023.2-C2.html>

A P2 vai ter uma questão de EDOLCCs que vai valer muitos pontos e que ter alguns itens no final que você vai ter que resolver com o método dos coeficientes a determinar. O início dela vai ser parecido com a questão de EDOLCCs da P2 do semestre passado, *mas só com a parte que tem uma EDO cujo polinômio característico tem raízes reais!* Não vou cobrar nada de números complexos nem na P2, nem na VR, e nem na VS.

O melhor modo de entender o que é o polinômio característico e o que acontece quando as raízes dele são reais ou complexas é ir pro PDFzinho sobre EDOLCCs e seguir os links pras seções de livros que explicam isso.

Na aula sobre coeficientes a determinar eu consegui apresentar a técnica bem rápido e muitas das pessoas que vieram naquela aula conseguiram fazer todos os exercícios. Eu ainda não ~~BTX~~ei o quadro daquela aula – estude pelas fotos do quadro e pela seções de livros na página de links!

A prova vai ter cópias de todas as “fórmulas” e “métodos” que nós vimos em sala – você não vai precisar decorá-los.

A prova vai ter uma questão de EDOVSs que vai ter itens que pra resolvê-los você vai ter que testar várias das inversas possíveis e procurar qual é a que funciona.

A prova vai ter uma questão de EDOs lineares que vai valer muito poucos pontos – porque se você usar esta “fórmula” aqui pra resolvê-la

$$[\text{EL}_3] = \begin{pmatrix} f' + fg = h \\ G' = g \\ f = e^{-G}(\int e^G h dx + C) \end{pmatrix}$$

ela vai ser facilíma.

## A prova vai ter uma questão estranha

Era pra P2 ter uma questão sobre raio de convergência, mas como ninguém conseguiu fazer os exercícios de raio de convergência que eu tentei passar em sala então a P2 vai ter uma questão sobre um assunto que eu **acho** que é o que vocês precisam treinar pra conseguirem fazer as contas de raio de convergência – e pra vocês fazerem as questões de raio de convergência que vão cair na VR e na VS.

Eu vários momentos em Cálculo 2 a gente tem que olhar pra polinômios e ver só os coeficientes deles. Por exemplo:

$$2x^4 + 0x^3 + -5x^2 + 6x + 7$$

A gente viu várias notações pra escrever só os coeficientes de um polinômio, e nas dicas pra P1 eu disse isso aqui:

(...) *Tratar essas abreviações informais como erros graves é um truque pra forçar as pessoas a aprenderem os jeitos certos de definir abreviações.*

Por enquanto vocês estão começando a aprender a definir funções e conjuntos, e muitas pessoas já estão tendo uma dificuldade enorme pra escrever os “sejas” e pra nomear as funções e conjuntos; *o jeito certo de definir abreviações envolve dificuldades conceituais ainda maiores, que a gente vai ver depois.*

A questão estranha vai pedir pra vocês fazerem algumas contas com séries formais usando a notação abreviada que nós vimos aqui:

2hQ96 Quadros da aula 42 (sobre séries formais)

<http://anggtwu.net/LATEX/2023-2-C2-series-formais.pdf>

Essa questão vai testar se vocês treinaram bastante as notações para polinômios que mostram só os coeficientes.

(Vou explicar isso melhor depois!)

# Cálculo C2 - 2023.2

Aula 42: séries formais

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2023.2-C2.html>

## Links

[2hQ96](#) Quadros da aula 42 (2023nov29)

[BoyceDip5p4](#) (p.191) 5. Soluções em série para equações lineares de segunda ordem

[BoyceDip5p4](#) (p.191) 5.1. Revisão de séries de potências

[BoyceDipEng5p4](#) (p.189) 5 Series Solutions of Second-Order Linear Equations

[BoyceDipEng5p4](#) (p.189) 5.1 Review of Power Series

[BoyceDipEng5p10](#) (p.195) 5.2 Series Solutions Near an Ordinary Point, Part I

[BoyceDipEng5p20](#) (p.205) 5.3 Series Solutions Near an Ordinary Point, Part II

[BoyceDipEng5p26](#) (p.211) 5.4 Euler Equations; Regular Singular Points

[BoyceDipEng5p34](#) (p.219) 5.5 Series Solutions Near a Regular Singular Point, Part I

[BoyceDipEng5p39](#) (p.224) 5.6 Series Solutions Near a Regular Singular Point, Part II

[BoyceDipEng5p45](#) (p.230) 5.7 Bessel's Equation

(%i1) a : taylor (exp(x), x, 0, 4);

(%o1)

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

(%i2) b : taylor (20\*x^2 + 1, x, 0, 4);

(%o2)

$$1 + 20x^2 + \dots$$

(%i3) c : taylor (20\*x^2 + 1, x, 0, 2);

(%o3)

$$1 + 20x^2 + \dots$$

(%i4) d : taylor (10\*x, x, 0, 4);

(%o4)

$$10x + \dots$$

(%i5) a + b;

(%o5)

$$2 + x + \frac{41x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

(%i6) a + c;

(%o6)

$$2 + x + \frac{41x^2}{2} + \dots$$

(%i7) a \* d;

(%o7)

$$10x + 10x^2 + 5x^3 + \frac{5x^4}{3} + \dots$$

(%i8)

# Cálculo 2 - 2023.2

P2 (Segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2023.2-C2.html>

# Questão 1

(Total: 4.0 pts)

Lembre que no curso eu mostrei que o meu modo preferido de escrever o “método” para resolver EDOs com variáveis separáveis — “EDOVs” — é o “método” [M] abaixo... eu pus o termo “método” entre aspas porque alguns dos passos da [M] são gambiarras nas quais a gente não pode confiar totalmente, e aí a gente precisa sempre testar as nossas soluções. O abaixo — a “fórmula” — é uma versão resumida do [M].

$$\begin{aligned}
 [M] &= \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ h(y) dy = g(x) dx \\ \int h(y) dy = \int g(x) dx \\ \parallel \\ H(y) + C_1 \qquad G(x) + C_2 \\ H(y) = G(x) + C_2 - C_1 \\ \qquad = G(x) + C_3 \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right) \\
 [F_3] &= \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Seja (\*) esta EDOVS:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-2(y-1)}$$

- a) (1.0 pts) Desenhe os tracinhos do campo de direções da EDO (\*) nos pontos com  $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ . Aqui você vai ter que desenhar 25 tracinhos e vai ter que caprichar – um tracinho com coeficiente angular  $\frac{1}{2}$  tem que ser visualmente bem diferente de um com coeficiente angular 1 e de um com coeficiente angular 2.
- b) (1.5 pts) Encontre as duas soluções gerais da EDO (\*) – a solução “positiva” e a “negativa” e dê nomes para elas.
- c) (0.5 pts) Teste a sua solução “negativa”.
- d) (0.5 pts) Encontre a solução particular que passa pelo ponto (3, 2).
- e) (0.5 pts) Encontre a solução particular que passa pelo ponto (2, 0).

**Muito importante:** em todas as questões desta prova eu vou corrigir as respostas de vocês como se eu fosse o “colega menos seu amigo e sem paciência pra adivinhar nada” da Dica 7 e do slide sobre contextos... por exemplo, se você escrever só “ $a = 42$ ” eu vou interpretar isso como “aqui essa pessoa tá dizendo que é óbvio que ‘ $a = 42$ ’ é sempre verdade – e isso é falso!!!”, e aí babau. Ou seja, a parte em português das questões de vocês vai ser MUUUUITO importante!

**Questão 2****(Total: 4.0 pts)**

Sejam (\*\*) e (\*\*\*) as EDOs abaixo:

$$y'' + 3y' - 10y = 0 \quad (**)$$

$$y'' + 3y' - 10y = \sin 2x \quad (***)$$

- a) **(0.5 pts)** Encontre as soluções básicas e a solução geral da EDO (\*\*). Dê um nome para cada uma delas.
- b) **(1.0 pts)** Encontre uma solução  $g(x)$  da EDO (\*\*) que obedeça isto aqui:  $g(0) = 3$ ,  $g'(0) = -1$ .
- c) **(2.0 pts)** Encontre uma solução da EDO (\*\*\*)
- d) **(0.5 pts)** Teste a solução que você encontrou no item anterior.

**Questão 3****(Total: 1.5 pts)**

Seja (\*\*\*\*) esta EDO:

$$y' - \frac{2y}{x} = 3x$$

- a) **(0.5 pts)** Encontre a solução geral dela.
- b) **(1.0 pts)** Teste a sua solução.

Lembre que você pode usar este método:

$$[\text{EL}_3] = \left( \begin{array}{l} f' + fg = h \\ G' = g \\ f = e^{-G} \left( \int e^G h \, dx + C \right) \end{array} \right)$$

**Questão 4****(Total: 1.0 pts)**

Lembre que nas últimas aulas nós usamos esta abreviação aqui

$$\text{mac}(a, b, c, d, \dots)$$

para

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots,$$

onde o  $\dots$  indica que estamos “pensando como um computador” e não sabemos os coeficientes de  $x^4, x^5, x^6, \dots$ . Digamos que:

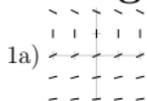
$$\text{mac}_1 = \text{mac}(1, 2, -3, 4, 5, \dots),$$

$$\text{mac}_2 = \text{mac}(a, b, c, d, e, \dots),$$

$$\text{mac}_1 \cdot \text{mac}_2 = \text{mac}(1, 0, 0, 0, 0, \dots).$$

- a) **(0.5 pts)** Descubra os coeficientes  $a, b, c, d, e$  de  $\text{mac}_2$ .
- b) **(0.5 pts)** Teste o seu resultado – verifique se  $\text{mac}_1 \cdot \text{mac}_2$  realmente dá  $\text{mac}(1, 0, 0, 0, 0, \dots)$ .

## Mini-gabarito



1b)  $f_{\text{pos}}(x) = 1 + \sqrt{C - x}$ ,  
 $f_{\text{neg}}(x) = 1 - \sqrt{C - x}$

1c) (teste)

1d)  $f_{(3,2)}(x) = 1 + \sqrt{4 - x}$

1e)  $f_{(2,0)}(x) = 1 - \sqrt{3 - x}$

2a)  $f_1(x) = e^{2x}$

$$f_2(x) = e^{-5x}$$

$$f_3(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$$

2b)  $f_4(x) = 2e^{2x} + e^{-5x}$

2c)  $f_5(x) = -\frac{7}{116} \sin 2x - \frac{3}{116} \cos 2x$

2d) (teste)

3a)  $f(x) = x^2(3 \log x + C)$

3b) (teste)

4a)  $\text{mac}_2 = \text{mac}(1, -2, 7, -24, 72, \dots)$

4b) (teste)

## Critérios de correção

Eu estou avisando desde o início do semestre que Cálculo 2 é sobre fazer contas grandes demais que quase ninguém consegue fazer sem errar, e que a gente ia aprender várias técnicas pra lidar com contas desse tipo...

A questão 1 tinha um passo difícil. Nela temos  $h(y) = -2(y - 1)$ ; se nós fizermos  $H(y) = \int -2(y - 1) dy = -(y - 1)^2$  nós chegamos a uma  $H(y)$  fácil de inverter, mas se integramos  $H(y)$  deste outro jeito,

$$\begin{aligned} H(y) &= \int -2(y - 1) dy \\ &= \int -2y + 1 dy \\ &= -y^2 + y \end{aligned}$$

nós chegamos a uma  $H(y)$  que só da pra inverter ou completando quadrados ou por Bháskara. Pouquíssimas pessoas conseguiram inverter a  $H(y)$  direito, e deu pra ver que muitas pessoas não sabiam escrever  $y$  em função de  $x$  – e não saber o que é isolar o  $y$  e escrever  $y$  em função de  $x$  é um erro grave.

A questão 2 tinha um sistema fácil de resolver,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \alpha - 5\beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 1$$

e um bem difícil:

$$\begin{cases} -6A + 14B = 1 \\ -14A + 6B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{-3}{116}, B = \frac{-7}{116}$$

no primeiro era tão fácil verificar os resultados no olho que eu considerei que se uma pessoa tinha chegado em valores errados para  $\alpha$  e  $\beta$  e não tinha visto que os resultados estavam errados isso era um erro grave. No segundo sistema eu considerei principalmente se a pessoa tinha organizado as contas de um jeito que deixasse elas fáceis de verificar; nos casos em que eu levei 15 minutos pra entender cada passo da conta da pessoa eu não fui nada benevolente na correção – as pessoas já deviam ter treinado isso bastante! Releia a dica 7!!! –, nos casos em que os passos estavam bem mais fáceis de entender eu fui mais benevolente, e nos casos em que as pessoas usaram as abreviações  $s = \sin 2x$  e  $c = \cos 2x$  eu fui super benevolente...

...exceto nos casos das pessoas que acharam que  $(\sin 2x)' = \cos 2x$  ou que  $(\sin 2x)' = \cos x$  – isso era errar em casos básicos da regra da cadeia, e eu considerei que esses erros eram graves.

Nessa questão 2 a gente tinha duas EDOs diferentes e um monte de funções diferentes. Eu tirei pontos das pessoas que escreveram coisas ambíguas como “a função resolve a EDO”.

A questão 3 era um outro caso de questão com contas grandes que quase ninguém consegue acertar da primeira vez, e eu usei ela pra avaliar se as pessoas conseguiam escrever cada passo dela de um jeito claro e fácil de verificar. O item sobre testar o resultado era o mais trabalhoso e mais importante, e várias pessoas chegaram num resultado errado no item 3a e depois no item 3b elas faziam umas contas malucas pra fingir que o resultado do item 3a delas estava certo. Eu considerei isso muito grave – e eu dei muitos pontos no item 3b pras pessoas que fizeram um teste honesto e bem escrito e descobriram que tinha algo errado ou nas contas do 3a delas ou no teste mas não tiveram tempo de descobrir exatamente onde estava o erro.

A questão 4 era pra ver quem já tinha treinado o suficiente as técnicas de fazer contas com polinômios “olhando só pros coeficientes deles”. Muitas pessoas mostraram que tinham treinado o suficiente e resolveram essa questão em poucas linhas; nesses casos eu perdoei os erros de contas que eu considerei pequenos. Outras pessoas tiveram que passar pra notação de polinômios, fizeram contas enormes e cometeram montes de erros; eu não fui nada benevolente com os erros delas.