Cálculo C2 - 2023.2

Aula 25: comprimento de arco

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2023.2-C2.html

Links

StewPtCap4p14 (p.257) 4.2 O Teorema do Valor Médio
StewPtCap4p15 (p.258) teorema da existência
StewPtCap5p16 (p.337) pontos amostrais arbitrários
StewPtCap6p33 (p.410) O Teorema do Valor Médio para Integrais
StewPtCap8p5 (p.488) 8.1 Comprimento de arco
StewPtCap10p16 (p.586) Comprimento de arco
StewPtCap13p18 (p.768) 13.3 Comprimento de Arco e Curvatura

MirandaP213 marcas
MirandaP224 Teorema do valor médio para integrais
MirandaP301 9.5 Comprimento de arco

Leit4p18 (p.232) 4.3.2. Teorema do Valor Médio
Leit5p41 (p.324) ponto escolhido
Leit5p57 (p.340) 5.7 O teorema do valor médio para integrais
Leit6p17 (p.388) 6.3 Comprimento de arco do gráfico de uma função

Introdução

Cada um dos três livros que nós estamos usando – Stewart, Miranda, Leithold – tem pelo menos um capítulo com várias "aplicações da integral". Em cada uma dessas "aplicações" a gente aprende como pegar um certo conceito de Geometria ou Física, como volumes, comprimento de arco, áreas de superfícies de revolução, ou centro de massa e aí expressar a quantidade que a gente quer calcular como um somatório, e depois a gente transforma esse somatório numa integral. O método é sempre o mesmo, e ele tem dois passos: "expressar como somatório" e "transformar o somatório numa integral". O passo de "expressar como somatório" é sempre trabalhoso e exige um olhômetro afiado pra gente entender os argumentos geométricos e as contas correspondentes a eles, e o passo de "transformar o somatório numa integral" exige um truque no qual a gente usa "partições pontilhadas" ao invés de "partições", e se a gente escolhe os 'm_i's das partições pontilhadas exatamente do jeito certo – se a gente escolhe os pontos m ágicos usando o Teorema do Valor M édio para Integrais – aí o limite dos somatórios vira algo bem simples...

Normalmente em Cálculo 2 a gente apresenta a demonstração da "fórmula" de cada uma das "aplicações" super rápido, e quase ninguém entende as demonstrações – mas as pessoas decoram as fórmulas e *às vezes* conseguem aplicar elas na prova... e depois elas esquecem tudo.

Neste semestre eu vou tentar apresentar os passos mais importantes de uma dessas "aplicações" – a fórmula pro comprimento de arco – com exemplos simples, figuras e exercícios... se tudo der certo depois vai ficar fácil entender as outras aplicações. Tomara que funcione! =)

Pontos "mágicos"

Eu vou dizer que os "pontos mágicos" pra uma função $f(x)$ no intervalo $[a,b]$ – ou: os pontos mágicos pra integral $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ – são os pontos $m \in [a,b]$ que obedecem isto aqui:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \;=\; f(m)(b-a)$$

Os pontos mágicos vão fazer os nossos somatórios virarem integrais de um modo magicamente simples. Por exemplo:

$$\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{2} f(m_i)(b_i-a_i) \\ = \; f(m_1)(b_1-a_1) + f(m_2)(b_2-a_2) \\ = \; \int_{x=a_1}^{x=b_1} f(x)\,dx + \int_{x=a_2}^{x=b_2} f(x)\,dx \\ = \; \int_{x=a_1}^{x=b_2} f(x)\,dx \end{array}$$

A figura da próxima página mostra os dois pontos mágicos para a minha parábola preferida, $f(x) = 4-(x-2)^2$, no intervalo $[0,4]$. As figuras das páginas 6 a 9 mostram os pontos mágicos pra $f(x)$ nos subintervalos de várias partições do intervalo $[2,4]$.

Os pontos mágicos geralmente são bem difíceis de calcular na mão; usando o Maxima eu consegui descobrir que os pontos mágicos da próxima página são:

$$x = \frac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad x = \frac{2\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}.$$

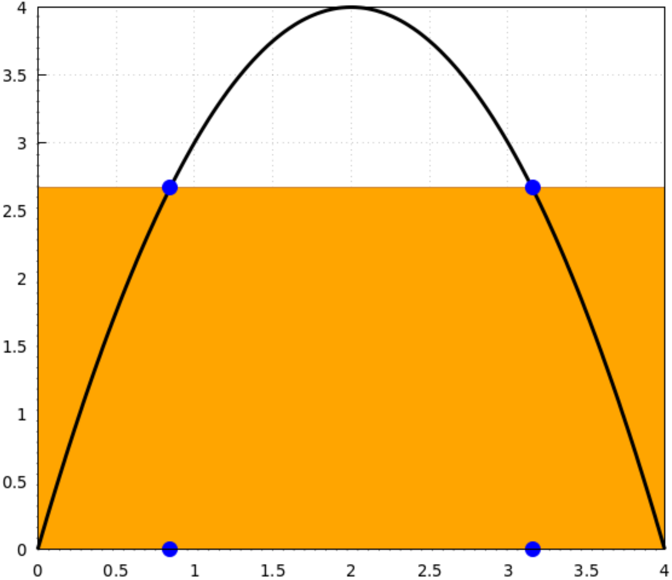
Os pontos mágicos das outras páginas têm fórmulas horríveis – eu usei o Maxima pra calculá-los e pra fazer os desenhos.

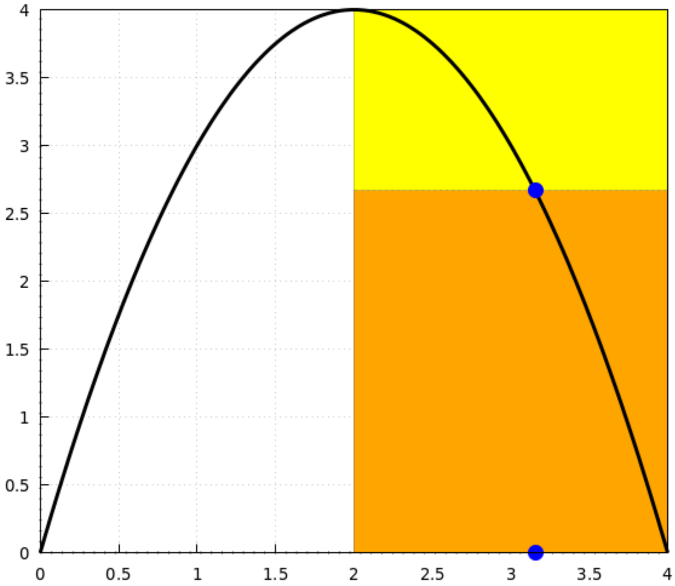
Os livros usam argumentos que mostram que os pontos mágicos existem, mas não calculam eles explicitamente.

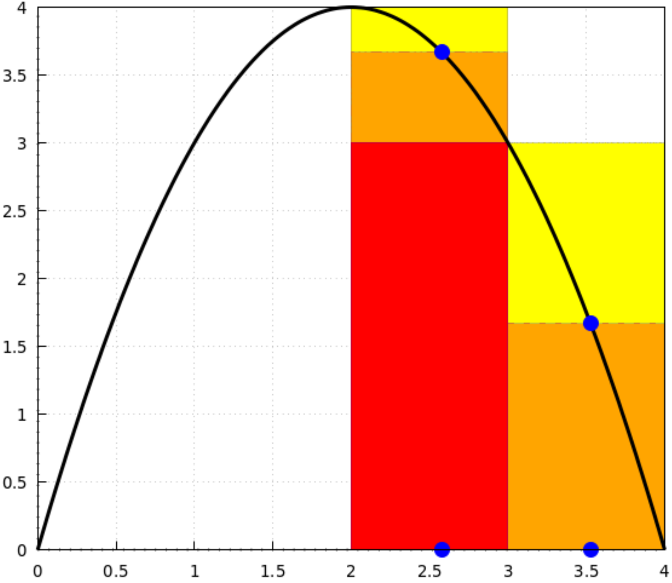
O Stewart e o Miranda chamam os pontos mágicos de 'x_i^*'s ao invés de 'm_i's, e o Leithold chama eles de 'ξ_i's. *Essas notações não deixam claro o quão mágicos esses pontos são.* =(

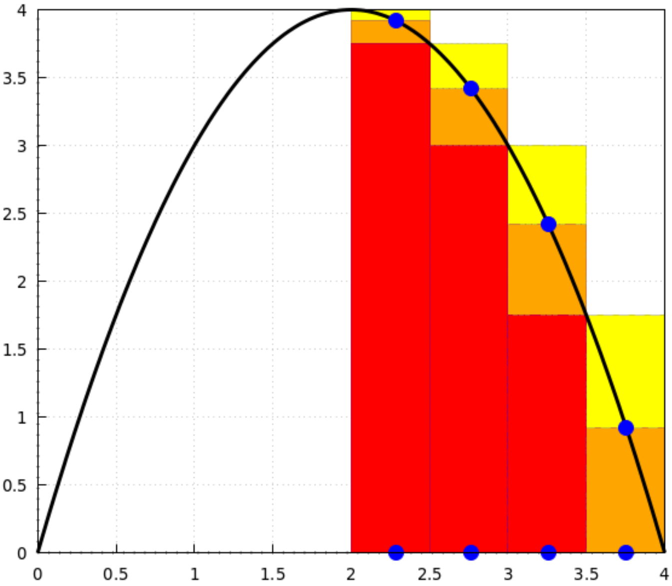
Dê uma olhada aqui: StewPtCap4p15. Ele diz:

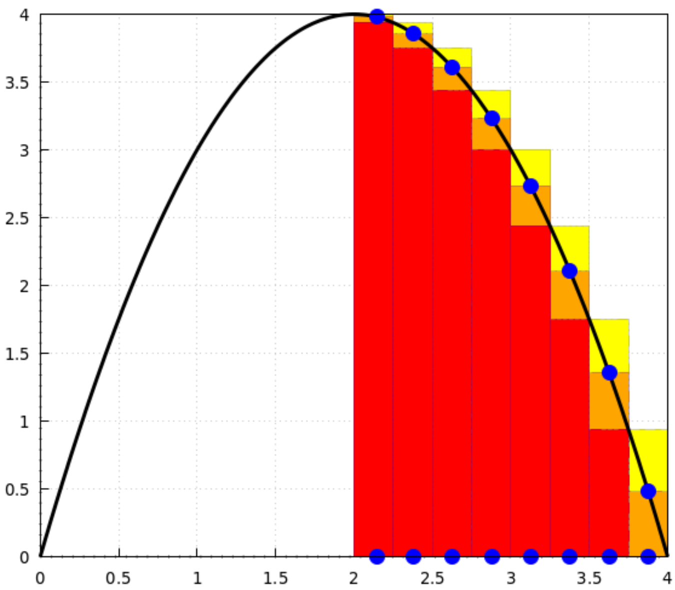
> O Teorema do Valor Médio é um exemplo do que é chamado *teorema de existência*. Da mesma forma que o Teorema do Valor Intermediário, o Teorema dos Valores Extremos e o Teorema de Rolle, ele garante que existe um número com certa propriedade, mas não nos diz como achá-lo.


4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4


4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4


4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4


4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4


4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

Algumas contas

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2} & = & \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} \\
& = & \sqrt{\frac{a^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}} \\
& = & \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} \\
& = & \sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{\frac{1}{a^2}} \\
& = & \sqrt{a^2+b^2}\,\frac{1}{a}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}\;a & = & \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\;a \\
& = & \sqrt{\frac{a^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}}\;a \\
& = & \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}\;a \\
& = & \sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{\frac{1}{a^2}}\;a \\
& = & \sqrt{a^2+b^2}\,\frac{1}{a}\;a \\
& = & \sqrt{a^2+b^2}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{1+\left(\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\right)^2}\;(x_1-x_0) & = & \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2} \\
\sqrt{1+f'(m_1)^2}\;(x_1-x_0) & = & \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}
\end{array}$$

Compare com:
StewPtCap8p6 (p.489)
MirandaP302
Leit6p19 (p.390)

Somas de Riemann com pontos escolhidos

Uma *partição pontilhada*, ou uma *partição com pontos escolhidos*, é um par (P, Q) onde: P é uma partição de um intervalo $[a, b]$ com N subintervalos e $Q = (m_1, \ldots, m_N)$, $\forall i \in \{1, \ldots, N\}. m_i \in [a_i, b_i]$.

Se (P, Q) é uma partição pontilhada, então:

$$\int_{P,Q} f(x)\, dx \;=\; \sum_{i=1}^{N} f(m_i)(b_i - a_i)$$

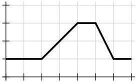
Cada um dos livros que estamos usando define isso de um jeito ligeiramente diferente. Se você tiver tempo e curiosidade dê uma olhada nestas páginas:

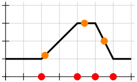
StewPtCap5p16 (p.337) pontos amostrais
Leit5p41 (p.324) ponto escolhido
MirandaP213 marcas

Exercício
As figuras da direita definem uma função $f(x)$ e duas partições pontilhadas do intervalo $[2, 6]$; vou chamá-las de "partição pontilhada da esquerda" ("p.p.esq.") e "partição pontilhada da direita" ("p.p.dir."). Na p.p.esq. nós temos:

$$\begin{array}{rcl} \int_{P,Q} f(x)\, dx &=& 1.2 \cdot (4-2) \\ &+& 3.0 \cdot (5-4) \\ &+& 2.0 \cdot (6-5) \end{array}$$

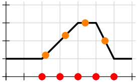
Seja $g(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$.
a) Quanto é $\int_{P,Q} f(x)\, dx$ na p.p.dir.?
b) Faça o gráfico de $f'(x)$.
c) Faça o gráfico de $g(x)$.

$f(x) =$ 



$P = \{2, 4, 5, 6\}$
$Q = (2.2, 4.4, 5.5)$

i	a_i	b_i	I_i	m_i
1	2	4	$[2, 4]$	2.2
2	4	5	$[4, 5]$	4.4
3	5	6	$[5, 6]$	5.5



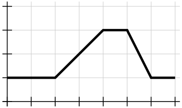
$P = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
$Q = (2.2, 3.3, 4.4, 5.5)$

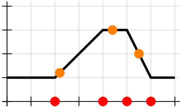
i	a_i	b_i	I_i	m_i
1	2	3	$[2, 3]$	2.2
2	3	4	$[3, 4]$	3.3
3	4	5	$[4, 5]$	4.4
4	5	6	$[5, 6]$	5.5

Exercício (cont.)
d) Quanto é $\int_{P,Q} g(x)\, dx$ na p.p.esq.?
e) Quanto é $\int_{P,Q} g(x)\, dx$ na p.p.dir.?
f) Quanto é $\int_{x=2}^{x=6} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$?
g) Quanto é $\sum_{i=1}^{N} \sqrt{(b_i - a_i)^2 + (f(b_i) - f(a_i))^2}$ na p.p.esq.?
h) Quanto é $\sum_{i=1}^{N} \sqrt{(b_i - a_i)^2 + (f(b_i) - f(a_i))^2}$ na p.p.dir.?

Revisão de pontos mágicos

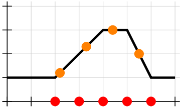
Lembre que:

$f(x) =$ 



$P = \{2, 4, 5, 6\}$
$Q = (2.2, 4.4, 5.5)$

i	a_i	b_i	I_i	m_i
1	2	4	$[2, 4]$	2.2
2	4	5	$[4, 5]$	4.4
3	5	6	$[5, 6]$	5.5



$P = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
$Q = (2.2, 3.3, 4.4, 5.5)$

i	a_i	b_i	I_i	m_i
1	2	3	$[2, 3]$	2.2
2	3	4	$[3, 4]$	3.3
3	4	5	$[4, 5]$	4.4
4	5	6	$[5, 6]$	5.5

Exercício
Vou definir $M(a, b)$ desta forma:

$$M(a, b) = \{ x \in [a, b] \mid f'(x) = \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \}$$

Considere que a igualdade $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ retorna "falso" nos pontos em que $f(x)$ não é derivável.

Diga quem são os conjuntos abaixo.
a) $M(0, 2)$
b) $M(2, 4)$
c) $M(0, 4)$
d) $M(2, 6)$
e) $M(2, 7)$

Obs: compare:
StewPtCap4p14 (p.257) 4.2 O TVM
StewPtCap6p33 (p.410) O TVM para Integrais

Três tipos de pontos mágicos