Cálculo C2 - 2023.2

Aula 35: EDOs lineares

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2023.2-C2.html

Links

StewPtCap9p37 (p.557) 9.5 Equações Lineares
StewPtCap9p41 (p.561) 9.5 Exercícios

BoyceDip2p5 (p.23) 2.1 Equações lineares; método dos fatores integrantes
BoyceDip2p11 (p.29) Problemas
BoyceDipEng2p4 (p.24) 2.1 Linear Differential Equations; Method of Integrating Factors
BoyceDipEng2p11 (p.31) Problems

ZillCullenCap2p33 (p.68) 2.5 Equações lineares
ZillCullenCap2p42 (p.77) 2.5 Exercícios
ZillCullenEngCap2p26 (p.53) 2.3 Linear equations
ZillCullenEngCap2p33 (p.60) Exercises 2.3

DiffyQsP40 1.4 Linear equations and the integrating factor
DiffyQsP43 1.4.1 Exercises

O método

Aqui a gente tem a explicação do Stewart de como resolver EDOs lineares *com todas as partes em português deletadas*:

$$
\begin{array}{rcll}
\frac{dy}{dx}+P(x)y &=& Q(x) & [1]\\
I(x)(y'+P(x)y) &=& (I(x)y)' & [3]\\
(I(x)y)' &=& I(x)Q(x) & \\
I(x)y &=& \int I(x)Q(x)\,dx+C & \\
y(x) &=& \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)Q(x)\,dx+C\right] & [4]\\
I(x)y'+I(x)P(x)y &=& (I(x)y') \;=\; I'(x)y+I(x)y' & \\
I(x)P(x) &=& I'(x) & \\
\int \frac{1}{I}\,dI &=& \int P(x)\,dx & \\
I(x) &=& Ae^{\int P(x)\,dx} & \\
A &=& \pm e^C & \\
A &=& 1 & \\
I(x) &=& e^{\int P(x)\,dx} & [5]
\end{array}
$$

Repare que sem as partes em português ela vira algo que só gênios conseguem decifrar – e um dos nossos objetivos neste curso é aprender a organizar as contas de modo que elas fiquem fáceis de entender, de justificar e de verificar.

Se a gente deixa só as linhas [1], [4] e [5] e põe elas nesta ordem,

$$
\begin{array}{rcll}
\frac{dy}{dx}+P(x)y &=& Q(x) & [1]\\
I(x) &=& e^{\int P(x)\,dx} & [5]\\
y(x) &=& \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)Q(x)\,dx+C\right] & [4]
\end{array}
$$

o *método* fica bem claro: pra resolver uma EDO da forma [1] a gente define um fator integrante $I(x)$ usando a definição da linha [5], e aí as nossas soluções vão ser as funções $y(x)$ da linha [4], onde C é uma constante qualquer.

Agora se a gente precisar *resolver* EDOs lineares basta aplicar um método que cabe em três linhas. Eu prefiro escrever ele usando outras letras,

$$
\begin{array}{rcl}
y(x) &\Rightarrow& f(x)\\
P(x) &\Rightarrow& g(x)\\
\int P(x)\,dx &\Rightarrow& G(x)\\
Q(x) &\Rightarrow& h(x)\\
I(x) &\Rightarrow& m(x)
\end{array}
$$

o omitindo os '(x)' na maioria dos lugares. A tradução é isto,

$$
\begin{array}{rcl}
f'+gf &=& h\\
m &=& e^G\\
f &=& \frac{1}{m}(\int mh\,dx+C)
\end{array}
$$

mas eu vou preferir escrever ela deste jeito:

$$
[\mathrm{EL}_3] \;=\; \left(\begin{array}{rcl}
f'+fg &=& h\\
G' &=& g\\
f &=& e^{-G}(\int e^G h\,dx+C)
\end{array}\right)
$$

Exercício 0
O Stewart começa por este exemplo, que ele chama de [2]:
StewPtCap9p37 (p.557) $y'+\frac{1}{y}=2$

Seja $[\mathrm{S}_1] = \left[\begin{smallmatrix} g:=1/x\\ h:=2\\ G:=\ln x\end{smallmatrix}\right]$.

a) Use $[\mathrm{EL}_3][\mathrm{S}_1]$ pra obter a solução geral da EDO [2].
b) Chame esta solução geral de $f_1(x)$ – use um "seja"! – e teste-a.
c) Encontre a solução particular que passa pelo ponto $(2,5)$.
d) Chame esta solução particular de $f_2(x)$ – use um "seja"! – e teste-a.

O que realmente importa

Exercício importantíssimo!!!
Entenda isto aqui e reescreva num formato BEM mais fácil de entender:

$$
\begin{array}{rcll}
\frac{dy}{dx} + P(x)y & = & Q(x) & [1] \\
I(x)(y' + P(x)y) & = & (I(x)y)' & [3] \\
(I(x)y)' & = & I(x)Q(x) & \\
I(x)y & = & \int I(x)Q(x)\,dx + C & \\
y(x) & = & \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)Q(x)\,dx + C\right] & [4] \\
I(x)y' + I(x)P(x)y & = & (I(x)y)' \;=\; I'(x)y + I(x)y' & \\
I(x)P(x) & = & I'(x) & \\
\int \frac{1}{I}\,dI & = & \int P(x)\,dx & \\
I(x) & = & Ae^{\int P(x)\,dx} & \\
A & = & \pm e^C & \\
A & = & 1 & \\
I(x) & = & e^{\int P(x)\,dx} & [5]
\end{array}
$$

```
(%i1) e1 : 'diff(y,x) + 1/x * y = 2;
(%o1)
```

$$\frac{d}{d\,x}\,y+\frac{y}{x}=2$$

```
(%i2) e2 : ode2(e1,y,x);
(%o2)
```

$$y=\frac{x^2+\%\mathrm{c}}{x}$$

```
(%i3)      solve(e2, %c);
(%o3)
```

$$\left[\%\mathrm{c}=x\,y-x^2\right]$$

```
(%i4) e3 : solve(e2, %c)[1];
(%o4)
```

$$\%\mathrm{c}=x\,y-x^2$$

```
(%i5) e4 : subst([x=2,y=5], e2);
(%o5)
```

$$5=\frac{\%\mathrm{c}+4}{2}$$

```
(%i6)      solve(e4, %c);
(%o6)
```

$$[\%\mathrm{c}=6]$$

```
(%i7) e4 : solve(e4, %c)[1];
(%o7)
```

$$\%\mathrm{c}=6$$

```
(%i8)                 subst(e4,e2);
(%o8)
```

$$y=\frac{x^2+6}{x}$$

```
(%i9) define(f2(x), rhs(subst(e4,e2)));
(%o9)
```

$$\mathrm{f2}\left(x\right):=\frac{x^2+6}{x}$$

```
(%i10) e5 : subst([y=f2(x)], e1);
(%o10)
```

$$\frac{d}{d\,x}\left(\frac{x^2+6}{x}\right)+\frac{x^2+6}{x^2}=2$$

```
(%i11) ev(e5, diff);
(%o11)
```

$$2=2$$

```
(%i12)
```