Cálculo C2 - 2023.2

Aula 26: EDOs com variáveis separáveis

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.2-C2.html

Links

Quadros:
2hQ53 Aula 26 de 2023.2: (24/out/2023): Campos de direções
2hQ56 Aula 27 de 2023.2: (25/out/2023): EDOs com variáveis separáveis
2gQ41 Aula 21 de 2023.1: (13/jun/2023)
2gQ43 Aula 22 de 2023.1: (16/jun/2023)

2dT293 Material sobre EDOVSs de 2021.2
2dT306 Slides sobre inversas de 2021.2
2gT120 Slides sobre inversas de 2023.2
Leit7 Funções inversas, logarítmicas e exponenciais

Questões sobre EDOVSs nas provas de 2022.2:
2fT123, 2fT126 P2, gabarito
2fT135, 2fT137 VS, anexo

StewPtCap9p11 (p.531) 9.2 Campos de Direções e Método de Euler
StewPtCap9p18 (p.538) 9.3 Equações Separáveis
StewPtCap14p10 (p.796) Curvas de nível

ZillCullenInicioP13 (p.6) Soluções implícitas e explícitas
ZillCullenInicioP16 (p.9) parâmetros, solução particular
ZillCullenInicioP51 (p.44) 2.2 Variáveis separáveis
ZillCullenInicioP57 (p.50) Exercícios
ZillCullenEngCap2p17 (p.44) 2.2 Separable Variables
ZillCullenEngCap2p23 (p.50) Exercises 2.2

DiffyQsP27 1.2 Slope fields
Thomas11cap9 9.1 Slope Fields and Separable Differential Equations

2eT214 Algumas figuras de campos de direções

Questões sobre EDOVSs nas provas de 2022.2:
2fT123, 2fT126 P2, gabarito
2fT135, 2fT137 VS, anexo

EDOs por chutar-e-testar

Lembre que lá no início do curso eu mostrei – aqui: 2dT13 – que a gente podia resolver equações como esta

$$x + 2 = 5$$

por chutar-e-testar, e a gente podia escrever os chutes-e-testes usando o [:=]... cada "chute" virava uma substituição e cada "teste" virava verificar se o resultado da substituição era uma igualdade verdadeira. Por exemplo:

$$\begin{array}{rcll} (x+2=5)[x:=42] & = & (42+2=5) & =(\\ (x+2=5)[x:=3] & = & (3+2=5) & =) \end{array}$$

Eu costumo usar o '=)' pra indicar "deu certo / chegamos numa igualdade verdadeira" e o '=(' pra indicar "deu errado / chegamos numa igualdade falsa". *Os smileys '=)' e '=(' não tem cara de notações "sérias", e isso é de propósito: é pra lembrar vocês de procurarem nos livros como eles fazem isso – usando português e supondo que o leitor vai ser capaz de fazer muitas contas de cabeça.*

Uma outra notação pra isso – e que também não costuma ser usada em livros básicos, e que eu usei no gabarito da P1, – é esta aqui:

$$(x+2=5)[x:=42] \;=\; \underbrace{(\underbrace{42+2}_{44}=5)}_{\mathbf{F}}$$

Agora seja $(*)$ esta EDO ("equação diferencial ordinária"):

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \qquad (*)$$

Podemos verificar que $f(x) = x^4$ não é uma solução pra $(*)$, e que $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ é uma solução pra $(*)$, calculando os resultado das duas substituições abaixo e vendo que uma dá uma igualdade verdadeira e a outra dá uma igualdade falsa:

$$\begin{array}{lcl} \left(f'(x) = -\dfrac{x}{f(x)}\right)\begin{bmatrix} f(x) := x^4 \\ f'(x) := 4x^3 \end{bmatrix} & = & ? \\ \left(f'(x) = -\dfrac{x}{f(x)}\right)\begin{bmatrix} f(x) := \sqrt{1-x^2} \\ f'(x) := -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{bmatrix} & = & ? \end{array}$$

Campos de direções

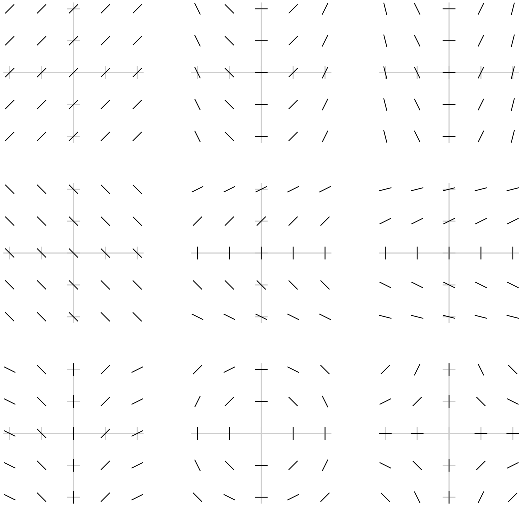
StewPtCap9p11 (p.531) 9.2 Campos de Direções e Método de Euler
Os gráficos que usam tracinhos em certos pontos pra indicar
coeficientes angulares naqueles pontos são gráficos de
campos de direções.

Exercício 1.
Represente graficamente os campos de direções abaixo desenhando tracinhos com os coeficientes angulares adequados nos pontos com $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; ou seja, em cada item você vai ter que desenhar 25 tracinhos. Quando $\frac{dy}{dx} = \infty$ desenhe o tracinho na vertical, e quando $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ desenhe só um pontinho ao invés de um tracinho.

a) $\frac{dy}{dx} = -1$
b) $\frac{dy}{dx} = x$
c) $\frac{dy}{dx} = 2x$
d) $\frac{dy}{dx} = -x/y$
e) $\frac{dy}{dx} = 1/y$
f) $\frac{dy}{dx} = 2/y$
g) $\frac{dy}{dx} = -y/x$

Exercício 2.
Tente imaginar o resto de cada um dos 7 campos de direções que você desenhou no exercício 1. Para cada um dos campos tente imaginar as curvas que você obteria se ligasse todos os tracinhos, e tente interpretar essas curvas como o conjunto de soluções da EDO que representamos graficamente como o campo de direções. Neste exercício você vai tentar encontrar soluções para EDOs no olhômetro a partir dos campos de direções delas.
Para cada uma das funções abaixo diga quais das 7 EDOs do exercício 1 podem ter aquela função como solução.

a) $y = x^2$
b) $y = \sqrt{x}$
c) $y = 1/x$
d) $y = \sqrt{1 - x^2}$



$$\text{[M]} = \left(\begin{array}{rcl}
\dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{g(x)}{h(y)} \\
h(y)\,dy & = & g(x)\,dx \\
\int h(y)\,dy & = & \int g(x)\,dx \\
\| & & \qquad\| \\
H(y)+C_1 & & \quad G(x)+C_2 \\
H(y) & = & G(x)+C_2-C_1 \\
 & = & G(x)+C_3 \\
H^{-1}(H(y)) & = & H^{-1}(G(x)+C_3) \\
\| & & \\
y & &
\end{array}\right)
\qquad
\text{[M][S}_1\text{]} = \left(\begin{array}{rcl}
\dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{-2x}{2y} \\
2y\,dy & = & -2x\,dx \\
\int 2y\,dy & = & \int -2x\,dx \\
\| & & \qquad\| \\
y^2+C_1 & & \quad -x^2+C_2 \\
y^2 & = & -x^2+C_2-C_1 \\
 & = & -x^2+C_3 \\
\sqrt{y^2} & = & \sqrt{-x^2+C_3} \\
\| & & \\
y & &
\end{array}\right)$$

$$\text{[F}_3\text{]} = \left(\begin{array}{rcl}
\dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{g(x)}{h(y)} \\
H^{-1}(H(y)) & = & H^{-1}(G(x)+C_3) \\
\| & & \\
y & &
\end{array}\right)
\qquad
\text{[F}_3\text{][S}_1\text{]} = \left(\begin{array}{rcl}
\dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{-2x}{2y} \\
\sqrt{y^2} & = & \sqrt{-x^2+C_3} \\
\| & & \\
y & &
\end{array}\right)$$

$$\text{[F}_2\text{]} = \left(\begin{array}{rcl}
\dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{g(x)}{h(y)} \\
y & = & H^{-1}(G(x)+C_3)
\end{array}\right)
\qquad
\text{[F}_2\text{][S}_1\text{]} = \left(\begin{array}{rcl}
\dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{-2x}{2y} \\
y & = & \sqrt{-x^2+C_3}
\end{array}\right)$$

$$\text{[S}_1\text{]} = \left[\begin{array}{rcl}
g(x) & := & -2x \\
h(y) & := & 2y \\
G(x) & := & -x^2 \\
H(y) & := & y^2 \\
H^{-1}(u) & := & \sqrt{u}
\end{array}\right]$$

Funções inversas por chutar e testar

Digamos que

$$\begin{array}{rcl} y &=& 3+\sqrt{x+4}, \quad \text{isto é,} \\ f(x) &=& 3+\sqrt{x+4}, \end{array}$$

e sejam:

$$\begin{array}{rcl} g(y) &=& (y-3)^2+4, \\ h(y) &=& (y-4)^2+3. \end{array}$$

Eu acho difícil ver só fazendo contas de cabeça se $f^{-1}(y)=g(y)$ ou se $f^{-1}(y)=h(y)$... então é bom a gente saber testar se as inversas que a gente obteve de cabeça estão certas. O teste é:

$$\begin{array}{rcl} (f^{-1}(f(x))=x)\left[\begin{smallmatrix} f(x):=3+\sqrt{x+4} \\ f^{-1}(y):=(y-3)^2+4 \end{smallmatrix}\right] &=& \color{red}{?} \\ (f^{-1}(f(x))=x)\left[\begin{smallmatrix} f(x):=3+\sqrt{x+4} \\ f^{-1}(y):=(y-4)^2+3 \end{smallmatrix}\right] &=& \color{red}{?} \end{array}$$

Funções inversas por chutar e testar (2)

O modo tradicional de obter inversas é por uma série de passos, como:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 3+\sqrt{x+4} \\ y & = & 3+\sqrt{x+4} \\ y-3 & = & \sqrt{x+4} \\ (y-3)^2 & = & x+4 \\ (y-3)^2-4 & = & x \\ (y-3)^2-4 & = & f^{-1}(y) \end{array}$$

...mas é importante a gente saber testar se chegou na inversa certa.

Exercício 4.
Obtenha inversas para as seguintes funções:

$$\begin{array}{rcl}
f_1(x) & = & 2+3\sqrt{5x+6} \\
f_2(x) & = & 2+3\sqrt[4]{5x+6} \\
f_3(x) & = & 2+3(4x+5)^6 \\
f_4(x) & = & 2+3\ln(4x+5) \\
f_5(x) & = & 2+3e^{4x+5} \\
f_6(x) & = & \sqrt{2+3e^{4x+5}} \\
\\
f_7(x) & = & \ln x \\
f_8(x) & = & \ln -x \\
f_9(x) & = & |x| \\
f_{10}(x) & = & \ln |x|
\end{array}$$

Porque é que $f_9^{-1}(x)$ e $f_{10}^{-1}(x)$ não existem?

Inversas: introdução

Dê uma olhada nestes links:
ZillCullenInicioP13 (p.6) Soluções implícitas e explícitas
ZillCullenInicioP16 (p.9) parâmetros, solução particular
ZillCullenInicioP51 (p.44) 2.2: Variáveis separáveis

O método pra resolver EDOs com variáveis separáveis nos dá primeiro "soluções implícitas", como $x^2 + y^2 = C$ or $x^2 + y^2 = 42$, e aí depois disso a gente tem que transformar essas soluções implícitas em "soluções explícitas", em que y é uma função de x... por exemplo:

$$\begin{array}{rcl}
x = \sqrt{C - x^2} & \Rightarrow & f_1(x) = \sqrt{C - x^2} \\
x = -\sqrt{C - x^2} & \Rightarrow & f_2(x) = -\sqrt{C - x^2} \\
x = \sqrt{42 - x^2} & \Rightarrow & f_3(x) = \sqrt{42 - x^2} \\
x = -\sqrt{42 - x^2} & \Rightarrow & f_4(x) = -\sqrt{42 - x^2}
\end{array}$$

Praticamente todo mundo se enrola na hora de passar das "soluções implícitas" pras "soluções implícitas", principalmente nos casos em que a gente tem "várias inversas"...

Eu vou usar uma terminologia que é meio errada, e vou dizer que $g_1(y) = \sqrt{y}$ e $g_2(y) = -\sqrt{y}$ são duas inversas diferentes para $f(x) = x^2$. Um bom lugar pra aprender a terminologia correta – que precisa que a gente especifique os domínios! – é o capítulo 7 do Leithold: Leit7.

Inversas: um exemplo complicado

Digamos que queremos inverter esta função:

$$f(x) = (x+3)^4 + 5$$

O método é este aqui, mas repare que ele tem uma bifurcação...

$$\begin{array}{rcl} y &=& (x+3)^4+5 \\ y-5 &=& (x+3)^4 \\ \sqrt[4]{y-5} &=& \sqrt[4]{(x+3)^4} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \sqrt[4]{y-5} &=& x+3 \\ -3+\sqrt[4]{y-5} &=& x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \sqrt[4]{y-5} &=& -(x+3) \\ \sqrt[4]{y-5} &=& -x-3 \\ \sqrt[4]{y-5} &=& -x-3 \\ 3+\sqrt[4]{y-5} &=& -x \\ -(3+\sqrt[4]{y-5}) &=& x \end{array}$$

Se a gente segue o caminho da esquerda a gente obtém

$$f^{-1}(y) = -3 + \sqrt[4]{y-5},$$

e se a gente segue o caminho da direita a gente obtém

$$f^-1(y) = -(3 + \sqrt[4]{y-5}).$$

Sabemos que $\sqrt[4]{\alpha^4} = |\alpha|$, e portanto:

$$\begin{array}{rcl} \alpha \geq 0 & \Rightarrow & \sqrt[4]{\alpha^4} = \alpha \\ \alpha \leq 0 & \Rightarrow & \sqrt[4]{\alpha^4} = -\alpha \\ x+3 \geq 0 & \Rightarrow & \sqrt[4]{(x+3)^4} = x+3 \\ x+3 \leq 0 & \Rightarrow & \sqrt[4]{(x+3)^4} = -(x+3) \end{array}$$

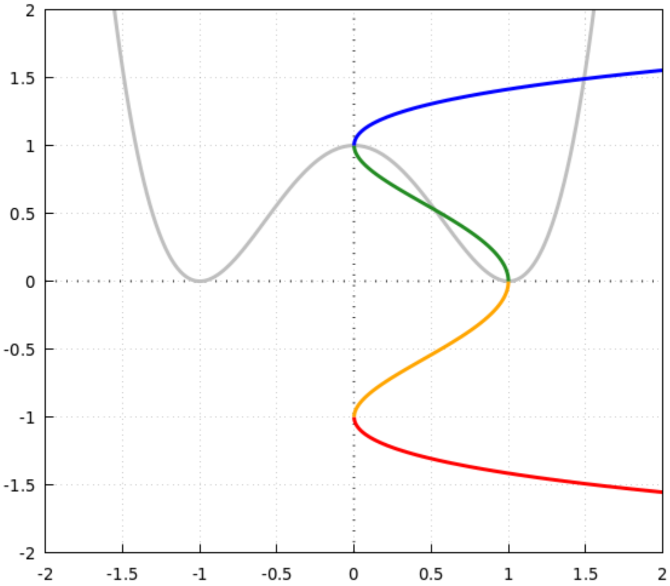
Ou seja, nas contas à esquerda se $x+3 \geq 0$ nós temos que seguir o caminho da esquerda, e se $x+3 \leq 0$ nós temos que seguir o caminho da direita.

O melhor modo da gente entender essas duas inversas é esse aqui. Considere estes três conjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rcl} A_1 &=& \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x+3)^4+5\,\} \\ A_2 &=& \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x+3)^4+5,\ x+3 \geq 0\,\} \\ A_3 &=& \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x+3)^4+5,\ x+3 \leq 0\,\} \end{array}$$

Os conjuntos A_2 e A_3 são gráficos de funções inversíveis e A_1 é o gráfico de uma função não-inversível. Os domínios dessas funções são relativamente fáceis de calcular – eles são $\mathbb{R}$, $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x+3 \geq 0\,\}$ e $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x+3 \leq 0\,\}$ respectivamente – mas as imagens são um pouco mais complicadas...

...mas lembre que em C2 a gente costuma fazer as contas em duas etapas: na primeira etapa a gente finge que as hipóteses vão ser todas obedecidas e a gente nem escreve quais são essas hipóteses, e só na segunda etapa a gente escreve explicitamente quais são essas hipóteses e a gente vê se tudo realmente dá certo quando elas são obedecidas. *E neste curso a gente raramente vai ter tempo pra segunda etapa.*


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

```
(%i1) f(x) := (x^2-1)^2;
(%o1)
```

$$f\left(x\right):=\left(x^2-1\right)^2$$

```
(%i2) sols : solve(y=f(x), x);
(%o2)
```

$$\left[x=-\sqrt{\sqrt{y}+1},x=\sqrt{\sqrt{y}+1},x=-\sqrt{1-\sqrt{y}},x=\sqrt{1-\sqrt{y}}\right]$$

```
(%i3) define(g1(y), rhs(sols[1]));
(%o3)
```

$$\mathrm{g1}\left(y\right):=-\sqrt{\sqrt{y}+1}$$

```
(%i4) define(g2(y), rhs(sols[3]));
(%o4)
```

$$\mathrm{g2}\left(y\right):=-\sqrt{1-\sqrt{y}}$$

```
(%i5) define(g3(y), rhs(sols[4]));
(%o5)
```

$$\mathrm{g3}\left(y\right):=\sqrt{1-\sqrt{y}}$$

```
(%i6) define(g4(y), rhs(sols[2]));
(%o6)
```

$$\mathrm{g4}\left(y\right):=\sqrt{\sqrt{y}+1}$$

```
(%i7)
```

```
(%i7) f(g1(y));
(%o7)
```

$$y$$

```
(%i8) f(g2(y));
(%o8)
```

$$y$$

```
(%i9) f(g3(y));
(%o9)
```

$$y$$

```
(%i10) f(g4(y));
(%o10)
```

$$y$$

```
(%i11)
```

```
(%i1) f(x)  := (x^2-1)^2;
```
(%o1)
$$f(x) := \left(x^2-1\right)^2$$

```
(%i2) e1 : y = (x^2-1)^2;
```
(%o2)
$$y = \left(x^2-1\right)^2$$

```
(%i3) e2 : sqrt(e1);
```
(%o3)
$$\sqrt{y} = \left|x^2-1\right|$$

```
(%i4)      assume(x^2-1 >= 0);
```
(%o4)
$$\left[x^2 \geq 1\right]$$

```
(%i5) e2 : sqrt(e1);
```
(%o5)
$$\sqrt{y} = x^2-1$$

```
(%i6) e3 : e2 + 1;
```
(%o6)
$$\sqrt{y}+1 = x^2$$

```
(%i7) e4 : sqrt(e3);
```
(%o7)
$$\sqrt{\sqrt{y}+1} = |x|$$

```
(%i8)      assume(x <= 0);
```
(%o8)
$$[x \leq 0]$$

```
(%i9) e4 : sqrt(e3);
```
(%o9)
$$\sqrt{\sqrt{y}+1} = -x$$

```
(%i10) e5 : - e4;
```
(%o10)
$$-\sqrt{\sqrt{y}+1} = x$$

```
(%i11) e6 : rhs(e5) = lhs(e5);
```
(%o11)
$$x = -\sqrt{\sqrt{y}+1}$$

```
(%i12) define(g1(y), rhs(e6));
```
(%o12)
$$\mathrm{g1}(y) := -\sqrt{\sqrt{y}+1}$$

```
(%i13) g1(u);
```
(%o13)
$$-\sqrt{\sqrt{u}+1}$$

```
(%i14) simp : false;
```
(%o14)
$$\mathbf{false}$$

```
(%i15) g1(f(x));
```
(%o15)
$$-1\left(1+\left(\left(x^2-1\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

```
(%i16) simp : true;
```
(%o16)
$$\mathbf{true}$$

```
(%i17) g1(f(x));
```
(%o17)
$$x$$

```
(%i18)
```