Cálculo 2 - 2023.2

Aulas 11 e 12: Frações parciais

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.2-C2.html

Links

Quadros:
2hQ31 (2023.2) Aula 11
2hQ37 (2023.2) Aula 12
2gQ30 (2023.1) Aula 14
2xQ26 (2019.1)
2yQ43 (2019.2)
2yQ106 (2019.2, polinômios em duas variáveis).

Seções sobre frações parciais nos livros:

StewPtCap7p23 (p.438) Seção 7.4
Leit9p24 (p.551) Seção 9.5
Miranda240 Seção 8.1: Frações parciais

Eu tentei fazer um programa pra typesettear essas figuras mas o resultado ficou feio – 2bT212 – e eu ainda não tive tempo de melhorá-lo.

Polinômios de Laurent em Maxima:
`http://anggtwu.net/MAXIMA/laurent1.mac.html`

Sobre as questões de prova

A P1 vai ter uma questão em que você vai ter que resolver uma integral como essa aqui:

$$\int \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}\,dx$$

A VR e a VS vão ter questões em que você vai ter que resolver integrais de "funções racionais impróprias", como isto aqui,

$$\int \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{ex^2+fx+g}\,dx$$

em que você vai precisar de divisão de polinômios com resto.

Neste semestre eu vou considerar que frações parciais são principalmente uma desculpa pra gente aprender duas coisas: a) um jeito de lidar com polinômios que vai nos permitir fazer um montão de contas com polinômios ou de cabeça ou escrevendo muito pouco, e b) um caso que a gente precisa usar um pouquinho de Álgebra Linear – "resolver um sistema" – pra transformar uma integral complicada em outra mais simples.

A gente só vai ver os casos em que o polinômio do denominador tem raízes reais e essas raízes são todas diferentes.

A integral do $\frac{1}{x}$

Lembre que:

$$\begin{array}{rcl} [\text{II}] &=& \left(\int f'(x)\,dx \;=\; f(x)\right) \\ [\text{RC}] &=& \left(\frac{d}{dx}f(g(x)) \;=\; f'(g(x))g'(x)\right) \\ [\text{DFI}] &=& \left(\begin{array}{rcl} f(g(x)) &=& x \\ \frac{d}{dx}f(g(x)) &=& \frac{d}{dx}x \\ &=& 1 \\ \frac{d}{dx}f(g(x)) &=& f'(g(x))g'(x) \\ f'(g(x))g'(x) &=& 1 \\ g'(x) &=& \dfrac{1}{f'(g(x))} \end{array}\right) \end{array}$$

e que eu estou usando uma definição pra integral indefinida na qual as duas igualdades abaixo são equivalentes:

$$\begin{array}{rcl} f(x) &=& \frac{d}{dx}\,g(x) \\ \int f(x)\,dx &=& g(x) \end{array}$$

Ou seja, pra mim o '$+C$' é opcional.

Me contaram que o Reginaldo dá errado pra quem não escreve o '$+C$', então se você for fazer C2 com ele no próximo semestre não esqueça o '$+C$'!!!

Exercício 1
Calcule a integral abaixo. Dica: $u = bx + c$.

$$\int \frac{a}{bx+c}\,dx$$

Temos:

$$\begin{array}{rcl} \exp(\ln(x)) &\overset{(1)}{=}& x \\ \ln' x &\overset{(2)}{=}& 1/\exp'(\ln(x)) \\ &\overset{(3)}{=}& 1/\exp(\ln(x)) \\ &\overset{(4)}{=}& 1/x \\ \frac{d}{dx}f(g(x)) &\overset{(5)}{=}& f'(g(x))g'(x) \\ \frac{d}{dx}\ln(-x) &\overset{(6)}{=}& \ln'(-x)\cdot -1 \\ &\overset{(7)}{=}& 1/(-x)\cdot -1 \\ &\overset{(8)}{=}& 1/x \\ \ln|x| &\overset{(9)}{=}& \begin{cases} \ln x & \text{quando } 0 < x, \\ \ln -x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\ \frac{d}{dx}\ln|x| &\overset{(10)}{=}& \frac{d}{dx}\begin{cases} \ln x & \text{quando } 0 < x, \\ \ln -x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\ &\overset{(11)}{=}& \begin{cases} \frac{d}{dx}\ln x & \text{quando } 0 < x, \\ \frac{d}{dx}\ln -x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\ &\overset{(12)}{=}& \begin{cases} 1/x & \text{quando } 0 < x, \\ 1/x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\ &\overset{(13)}{=}& 1/x \\ 1/x &\overset{(14)}{=}& \frac{d}{dx}\ln x \\ 1/x &\overset{(15)}{=}& \frac{d}{dx}\ln(-x) \\ 1/x &\overset{(16)}{=}& \frac{d}{dx}\ln|x| \\ \int \frac{1}{x}\,dx &\overset{(17)}{=}& \ln x \\ \int \frac{1}{x}\,dx &\overset{(18)}{=}& \ln(-x) \\ \int \frac{1}{x}\,dx &\overset{(19)}{=}& \ln|x| \end{array}$$

Contas sem "vai um" e polinômios

Compare esta conta com números,

$$
\begin{array}{l|l}
2773 & 12 \\ \cline{2-2}
-\underline{24} & 231 \\
37 & \\
-\underline{36} & \\
13 & \\
-\underline{12} & \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{aligned}
2400 &= 200 \cdot 12 \\
360 &= 30 \cdot 12 \\
12 &= 1 \cdot 12 \\
2772 &= 231 \cdot 12 \\
2773 &= 231 \cdot 12 + 1
\end{aligned}
$$

Com esta conta com polinômios:

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3+7x^2+7x+3 & x+2 \\ \cline{2-2}
-\underline{(2x^3+4x^2)} & 2x^2+3x+1 \\
\qquad 3x^2+7x & \\
\quad -\underline{(3x^2+6x)} & \\
\qquad\qquad 1x+3 & \\
\qquad\quad -\underline{(1x+2)} & \\
\qquad\qquad\quad 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
2x^3+4x^2+0x+0 &= (2x^2+0x+0)\cdot(x+2) \\
3x^2+6x+0 &= (3x+0)\cdot(x+2) \\
1x+2 &= 1\cdot(x+2) \\
2x^3+7x^2+7x+1 &= (2x^2+3x+1)\cdot(x+2) \\
2x^3+7x^2+7x+3 &= (2x^2+3x+1)\cdot(x+2)+1
\end{aligned}
$$

Exercício 2

Traduza a conta com polinômios da esquerda pra notação de caixinhas daqui: 2xQ26, 2yQ43.

Exercício 3

Traduza a conta abaixo pra notação de caixinhas:

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{x+3}+\frac{4}{x-5} \\
&= \frac{2(x-5)}{(x+3)(x-5)}+\frac{(x+3)4}{(x+3)(x-5)} \\
&= \frac{2(x-5)+(x+3)4}{(x+3)(x-5)}
\end{aligned}
$$

Funções racionais

Exercício 4
Entenda a definição de "função racional própria" daqui – Miranda240 – e acrescente mais linhas nas contas do exercício 3 pra "simplificar" o resultado até ele virar uma "função racional própria". Faça isso tanto na notação usual quanto na notação de caixinhas.

Exercício 5
Entenda as contas do Exemplo 8.1 daqui – Miranda241 – e transforme a expressão abaixo numa função racional imprópria:

$$1000x^2 + 100x + 10 + \frac{2}{x+3} + \frac{4}{x-5}$$

Exercício 6
Isto aqui é verdade:

$$\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5} = \frac{(A+B)x + (-5A+3B)}{x^2-2x-15}$$

mostre porquê "aumentando o nível de detalhe" – transforme a igualdade acima numa série de igualdades na qual cada passo seja bem fácil de verificar.

Exercício 7
Resolva:

a) $(A+B)x + (-5A+3B) = 9x + 11$

b) $\dfrac{(A+B)x + (-5A+3B)}{x^2-2x-15} = \dfrac{9x+11}{x^2-2x-15}$

c) $\dfrac{(A+B)x + (-5A+3B)}{x^2-2x-15} = \dfrac{2x+7}{x^2-2x-15}$

d) $\dfrac{A}{x+3} + \dfrac{B}{x-5} = \dfrac{2x+7}{x^2-2x-15}$

e) $\displaystyle\int \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{2x+7}{x^2-2x-15}\,dx$

Exercício 8
(Bem trabalhoso, pra casa!)
Mostre como organizar a solução do (7f) em várias séries de igualdades fáceis de justificar, como no slide 3. Você pode precisar de algumas coisinhas em português, como na última página do PDF de 2022.2: 2fT137.

$\boxed{\text{Aviso:}}$ Todos os slides a partir daqui são antigos!
Assim que der eu vou fazer uma faxina neles
e deixar só o que ainda serve!!!

Exercício 1
Algumas consequências da regra da cadeia...

$$[\mathrm{RC}] \;=\; \left(\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\right)$$

Obtenha os seguintes casos particulares da [RC]:

a) $g(x) = 2x$
b) $g(x) = 2x + 3$
c) $g(x) = x + 3$
d) $g(x) = x + 3,\ f(x) = \ln x$
e) $g(x) = -x$
f) $g(x) = -x,\ f(x) = \ln x$
g) $g(x) = -x + 200,\ f(x) = \ln x$

Exercício 2.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{3x}\,dx = ?$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{3x+4}\,dx = ?$

c) $\displaystyle\int \frac{2}{3x+4}\,dx = ?$

d) $\displaystyle\int \frac{a}{bx+c}\,dx = ?$

Derivadas formais (de novo)

Todas estas igualdades são verdadeiras, mas se tentarmos formalizar elas com todos os detalhes vamos ver que várias delas falam de funções com domínios diferentes...

$$\begin{array}{rcl}
\frac{d}{dx}\ln x &=& \frac{1}{x} \\
\frac{d}{dx}\ln(-x) &=& \frac{1}{x} \\
\frac{d}{dx}\ln|x| &=& \frac{1}{x}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(x) \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(x) + C \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(-x) \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(-x) + C \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(|x|) \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(|x|) + C \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \begin{cases} \ln(-x) + C_1 & \text{quando } x < 0, \\ \ln(x) + C_2 & \text{quando } x > 0 \end{cases}
\end{array}$$

REPARE QUE:

$$\frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+5} = \frac{2(x+5)}{(x+3)(x+5)} + \frac{4(x+3)}{(x+3)(x+5)}$$

$$= \frac{2(x+5)+4(x+3)}{(x+3)(x+5)}$$

$$= \frac{2x+10 \ + \ 4x+12}{x^2+8x+15}$$

$$= \frac{6x+22}{x^2+8x+15}$$

A MAIORIA DOS PROGRAMAS DE "COMPUTER ALGEBRA" TEM FUNÇÕES QUE FAZEM A OPERAÇÃO ACIMA E A INVERSA DELA:

$$\left(\frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+5}\right) \underset{\substack{\text{"apart"} \\ \text{(DIFÍCIL)}}}{\overset{\substack{\text{"together"} \\ \text{(FÁCIL)}}}{\rightleftarrows}} \left(\frac{6x+22}{x^2+8x+15}\right)$$

Exercício 3.

a) together $\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)={\color{red}?}$

b) together $\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}\right)={\color{red}?}$

c) together $\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right)={\color{red}?}$

Exercício 4.

EXERCÍCIO:

a) ENCONTRE EXPRESSÕES PARA c, d, e, f QUE FAÇAM ESTA FÓRMULA SER VERDADE:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{cx+d}{x^2+ex+f}$$

AS SUAS FÓRMULAS PARA c, d, e, f NÃO PODEM CONTER "x".

b) USE A FÓRMULA QUE VOCÊ ACABOU DE OBTER PARA ENCONTRAR OS A, a, B, b TAIS QUE:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{2x+3}{x^2-7+10}$$

Exercício 4: uma solução pro item (a)

a) $$\begin{aligned} \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} &= \frac{cx+d}{x^2+ex+f} \\ \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} &= \frac{A(x-b)}{(x-a)(x-b)} + \frac{B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \\ &= \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \\ &= \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= A+B \\ d &= -Ab-Ba \\ e &= -a-b \\ f &= ab \end{aligned}$$

Exercício 4: uma solução pro item (a), cont...

Dá pra gente reescrever isso usando o '[:=]':

$$\begin{array}{rl} & \left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b} \;=\; \frac{cx+d}{x^2+ex+f}\right)\begin{bmatrix} c:=A+B \\ d:=-Ab-Ba \\ e:=-a-b \\ f:=ab \end{bmatrix} \\ = & \left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b} \;=\; \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab}\right), \end{array}$$

e sabemos que esta igualdade é verdade:

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b} \;=\; \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab}$$

então isto aqui

$$\begin{array}{rcl} c &=& A+B \\ d &=& -Ab-Ba \\ e &=& -a-b \\ f &=& ab \end{array}$$

é uma solução para a equação

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b} \;=\; \frac{cx+d}{x^2+ex+f} \quad \ldots$$

mas não sabemos se é a única solução!

Sempre dá pra escrever soluções de equações usando o '[:=]'. Por exemplo, as duas soluções da equação

$$(x-2)(x-5)=0:$$

São:

$$\begin{array}{l} ((x-2)(x-5)=0)\,[x:=2] \;= \\ ((2-2)(2-5)=0) \\ ((x-2)(x-5)=0)\,[x:=5] \;= \\ ((5-2)(5-5)=0) \end{array}$$

Nenhum livro "básico" define "solução de uma equação" desse jeito — como "a substituição que transforma a equação numa igualdade verdadeira" — mas eu acho isso um bom modo de entender o que são "equações" e "soluções"...

Ah, note que eu não fiquei repetindo a condição "as suas fórmulas para c, d, e, f não podem conter 'x'" o tempo todo... eu deixei isso implícito. =)

Exercício 4: uma solução pro item (b)

Temos duas soluções para

$$(x-a)(x-b) = x^2 - 7x + 10:$$

uma é $a=2$ e $b=5$, e a outra é $a=5$ e $b=2$. Lembre que Cálculo 2 é sobre chutar e testar. A gente pode chutar que $a=5$, $b=2$, e que c,d,e,f são os que a gente obtém pelo item (a), e aí ver se isso nos leva a uma solução...

(Obs: isso funciona!!!)

Exercício 4: item (c)
Seja [PFP] esta igualdade aqui – o "princípio por trás das frações parciais":

$$[\mathrm{PFP}] \quad = \quad \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \quad = \quad \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \right)$$

c) Resolva o exercício 8.7.2 do livro do Miranda –
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=251
e depois mostre qual é a substituição da forma

$$[\mathrm{PFP}] \begin{bmatrix} a{:=}? \\ b{:=}? \\ A{:=}? \\ B{:=}? \end{bmatrix}$$

que "está por trás" da sua solução.

Exercício 5.

Use estas idéias para integrar:

$$\int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 3}{x + 2}\,dx \quad = \quad ?$$

Exercício 6.

O que acontece nos casos em que "teria vai um"?

a) Tente fazer a divisão com resto de x^3 por $x+2$.
Mais precisamente, encontre um polinômios $R(x)$ e $Q(x)$ tais que $(x^3) = Q(x) \cdot (x+2) + R(x)$ e $R(x)$ é no máximo de grau 1.
Teste a sua resposta!

b) Calcule $\int \frac{x^3}{x+2}\,dx$ pelo método acima.
Teste a sua resposta derivando a sua antiderivada para $\frac{x^3}{x+2}$.

c) Calcule $\int \frac{x^3}{x+2}\,dx$ fazendo a substituição $u = x+2$.
Você deve obter o mesmo resultado que na (b).

d) Calcule $\int \frac{x^2}{(x+1)(x-1)}\,dx$ por frações parciais.

Dica importante

Lembre que uns dos meus slogans é
"eu só vou corrigir os sinais de igual"...
No slide ?? a igualdade mais importante é a da última linha.
Nós vamos usá-la assim, pra transformar a integral original
em algo fácil de integrar:

$$\int \frac{2x^3+7x^2+7x+3}{x+2}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x^2+3x+1)\cdot(x+2)+1}{x+2}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x^2+3x+1)\cdot\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} + \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \int 2x^2+3x+1 + \frac{1}{x+2}\,dx$$

Uma questão da P1 de 2020.1

A questão 3 da P1 de 2020.1,

http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C2-P1.pdf

era de frações parciais, e eu pus nesse PDF um gabarito parcial dela, que não inclui nem as contas da divisão de polinômios nem a verificação de que a nossa integral está certa. Faça a questão, incluindo a parte que não está no gabarito.