Cálculo 2 - 2023.2

Aula 39: Séries de Taylor e MacLaurin

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.2-C2.html

Links

2hQ89 Quadros da aula 39 (22/nov/2023)

Stewart:
StewPtCap7p55 (p.470) 7.8 Integrais Impróprias
StewPtCap11p5 (p.623) 11 Sequências e Séries Infinitas
StewPtCap11p6 (p.624) 11.1 Sequências
StewPtCap11p18 (p.636) 11.2 Séries
StewPtCap11p27 (p.645) 11.3 O Teste da Integral e Estimativas de Somas
StewPtCap11p34 (p.652) 11.4 Os Testes de Comparação
StewPtCap11p39 (p.657) 11.5 Séries Alternadas
StewPtCap11p43 (p.661) 11.6 Convergência Absoluta e os Testes da Razão e da Raiz
StewPtCap11p49 (p.667) 11.7 Estratégia para Testes de Séries
StewPtCap11p51 (p.669) 11.8 Séries de Potência
StewPtCap11p56 (p.674) 11.9 Representações de Funções como Séries de Potências
StewPtCap11p61 (p.679) 11.10 Séries de Taylor e Maclaurin
StewPtCap11p74 (p.692) 11.11 Aplicações dos Polinômios de Taylor
StewPtCap11p83 (p.701) Revisão
StewPtCap11p85 (p.703) Problemas Quentes

Vídeo do Mathologer – assista do 4:00 ao 12:21:
`http://www.youtube.com/watch?v=p-LbzWmm2zk`

Quadros sobre a notação de caixinhas:
2hQ32 Aula 11,sep19: Frações parciais
2hQ70 Aula 31,nov06: Revisão de variáveis complexas
2hQ75 Aula 34,nov13: EDOs exatas
2hQ89 Aula 39,nov22: Séries de Taylor

2hT234 Código em Maxima

Caixinhas

Nestes slides eu vou LaTeXar a notação de caixinhas deste jeito:

$$\begin{array}{rcl}
\begin{bmatrix}4 & 5 & 6 & . & 7\end{bmatrix} & = & 4x^2 + 5x^1 + 6x^0 + 7x^{-1} \\
 & = & 4x^2 + 5x + 6 + 7x^{-1} \\
\begin{bmatrix}a & b & c & d & e & .\end{bmatrix} & = & ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\
\begin{bmatrix}a & 0 & 0 & 0 & 0 & .\end{bmatrix} & = & ax^4
\end{array}$$

Note que se

$$\begin{array}{rrcl}
 & f(x) & = & \begin{bmatrix}4 & 5 & 6 & . & 7 & 8\end{bmatrix} \\
\text{Então:} & f(10) & = & 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} \\
 & & = & 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6 + 7 \cdot 0.1 + 8 \cdot 0.01 \\
 & & = & 456.78
\end{array}$$

Caixinhas (2)

Repare que:

$$\begin{array}{rcr}
\mathsf{derivs}(\begin{bmatrix} e & d & c & b & a & . \end{bmatrix}) = & (& \begin{bmatrix} e & d & c & b & a & . \end{bmatrix}, \\
 & & \begin{bmatrix} 4e & 3d & 2c & b & . \end{bmatrix}, \\
 & & \begin{bmatrix} 12e & 6d & 2c & . \end{bmatrix}, \\
 & & \begin{bmatrix} 24e & 6d & . \end{bmatrix}, \\
 & & \begin{bmatrix} 24e & . \end{bmatrix}, \\
 & & \begin{bmatrix} 0 & . \end{bmatrix}, \\
 & & \ldots \quad)
\end{array}$$

e que:

$$\begin{array}{l}
\mathsf{derivs}_0(\begin{bmatrix} e & d & c & b & a & . \end{bmatrix}) = (a, b, 2c, 6d, 24e, 0, 0, \ldots) \\
\mathsf{derivs}_0^3(\begin{bmatrix} e & d & c & b & a & . \end{bmatrix}) = (a, b, 2c, 6d)
\end{array}$$

a operação derivs_0 extrai todos os coeficientes de um polinômio;
a operação derivs_0^3 extrai todos os coeficientes até o de grau 3;
a operação derivs_0^n extrai todos os coeficientes até o de grau n;
elas multiplicam o coeficiente de cada x^k por $k!$.

Exercício

Entenda a definição do Stewart para $T_n(x)$ – aqui:
StewPtCap11p63 (p.681) "Observe que T_n..."
e calcule T_3 no caso em que $a = 0$ e:

$$f(x) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \delta & \gamma & \beta & \alpha & . \end{bmatrix} .$$

Aviso: o resto deste PDF tem um material antigo sobre Séries de Taylor que eu fiz pra Cálculo 3, e que eu só usei um pouquinho nas aulas... e que eu quero reescrever!

A idéia básica

Digamos que $f(x)$ é um polinômio.
Digamos que o grau dele é 4, pra simplificar.
Digamos que $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$.
Então:

$$\begin{array}{rcccccc}
f(x) &=& a &+ bx &+ cx^2 &+ dx^3 &+ ex^4 \\
f'(x) &=& b &+ 2cx &+ 3dx^2 &+ 4ex^3 & \\
f''(x) &=& 2c &+ 6dx &+12ex^2 && \\
f'''(x) &=& 6d &+ 24ex &&& \\
f''''(x) &=& 24e &&&&
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
f(0) &=& a \\
f'(0) &=& b \\
f''(0) &=& 2c \\
f'''(0) &=& 6d \\
f''''(0) &=& 24e
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
a &=& f(0) \\
b &=& f'(0) \\
c &=& f''(0)/2 \\
d &=& f'''(0)/6 \\
e &=& f''''(0)/24
\end{array}$$

E portanto:

$$f(x) \;=\; f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f''''(0)}{24}x^4$$

A idéia básica (2)

Agora vamos tentar generalizar isso.
Digamos que $f(x)$ é um polinômio.
Digamos que o grau dele é k, e que por enquanto $k = 4$.
Digamos que $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$.
A notação $f^{(k)}$, como o (k) entre parênteses, quer dizer "f derivada k vezes". Por exemplo, $f^{(4)} = f''''$, e $f^{(0)} = f$.
Então:

$$\begin{array}{rcccccccc}
f^{(0)}(x) &=& a_0 &+& a_1 x &+& a_2 x^2 &+& a_3 x^3 &+& a_4 x^4 \\
f^{(1)}(x) &=& a_1 &+& 2a_2 x &+& 3a_3 x^2 &+& 4a_4 x^3 \\
f^{(2)}(x) &=& 2a_2 &+& 6a_3 x &+& 12a_4 x^2 \\
f^{(3)}(x) &=& 6a_3 &+& 24a_4 x \\
f^{(4)}(x) &=& 24a_4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
f^{(0)}(0) &=& 0!\,a_0 \\
f^{(1)}(0) &=& 1!\,a_1 \\
f^{(2)}(0) &=& 2!\,a_2 \\
f^{(3)}(0) &=& 3!\,a_3 \\
f^{(4)}(0) &=& 4!\,a_4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
a_0 &=& f^{(0)}(0)/0! \\
a_1 &=& f^{(1)}(0)/1! \\
a_2 &=& f^{(2)}(0)/2! \\
a_3 &=& f^{(3)}(0)/3! \\
a_4 &=& f^{(4)}(0)/4!
\end{array}$$

E portanto:

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(0)}{0!}x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

Exercício 1.
A fórmula do slide anterior também funciona pra polinômios com grau menor que 4. Verifique o que ela faz quando

$$f(x) = 42x^2 + 99x + 200.$$

Lembre que no ensino médio você era obrigado a "simplificar" $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 999$ para 119880, mas em Cálculo 2 você tem que encontrar jeitos de escrever que sejam mais simples de ler e de verificar... pra gente em certos contextos $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 999$ é mais "simples" que 119880.

Exercício 2.

Tente aplicar a fórmula $(*)$ abaixo

$$f(x) \quad = \quad \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad\qquad (*)$$

a esta f aqui: $f(x) = 200x^5$.

a) O que acontece?

b) Tente escrever em detalhes o que dá errado.
Você vai precisar de notação matemática E português.
Tente aprender as convenções que eu usei nos PDFs
e as convenções que os livros usam, e lembre que se
você começar escrevendo uma igualdade qualquer leitor
que não seja muito seu amigo vai interpretá-la
como uma afirmação.

As operações derivs e derivs_0

Sejam derivs e derivs_0 as seguintes operações – que vão nos ajudar muito nas contas:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{derivs}(f) & = & (f, f', f'', f''', \ldots) \\ \mathsf{derivs}_0(f) & = & (f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), \ldots) \end{array}$$

Repare que $\mathsf{derivs}(f)$ retorna uma sequência infinita de funções e $\mathsf{derivs}_0(f)$ retorna uma sequência infinita de números.

Um exemplo: se $f(x) = ax^2 + bx + c$, então:

$$\begin{array}{rclcrcl} f(x) & = & ax^2 + bx + c, & \qquad & f(0) & = & c, \\ f'(x) & = & 2ax + b, & & f'(0) & = & b, \\ f''(x) & = & 2a, & & f''(0) & = & 2a, \\ f'''(x) & = & 0, & & f'''(0) & = & 0, \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{derivs}(f) & = & (ax^2 + bx + c,\ 2ax + b,\ 2a,\ 0, 0, 0, \ldots) \\ \mathsf{derivs}_0(f) & = & (c, b, 2a, 0, 0, 0, \ldots) \end{array}$$

Algumas definições

Isto aqui

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

é a *série de Taylor da função f no ponto 0 truncada até grau n*, e isto aqui

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

ou:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

é a *série de Taylor da função f no ponto 0*.

Exercício 3.
Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$.

a) Calcule as 8 primeiras componentes de $\mathsf{derivs}(f)$.

b) Calcule as 8 primeiras componentes de $\mathsf{derivs}_0(f)$.

c) Calcule a série de Taylor de $\operatorname{sen} x$ truncada até grau 7.

d) Seja $g(x)$ a série de Taylor de $\operatorname{sen} x$ truncada até grau 7; Calcule $g(0.1)$ na mão e compare o seu resultado com o resultado de calcular $\operatorname{sen} 0.1$ na calculadora ou no computador.

Exercício 4.
Calcule $\mathsf{derivs}(f)$ e $\mathsf{derivs}_0(f)$ para cada uma das 'f's abaixo, até o grau pedido.

a) $f(x) = e^x$, até grau 4
b) $f(x) = e^{2x}$, até grau 4
c) $f(x) = e^{ix}$, até grau 8
d) $f(x) = \cos x$, até grau 8
e) $f(x) = \operatorname{sen} x$, até grau 8
f) $f(x) = i \operatorname{sen} x$, até grau 8
g) $f(x) = \cos x + i \operatorname{sen} x$, até grau 8

A notação com '$\approx$'

O sinal '$\approx$' que dizer "é aproximadamente igual a",
mas ele não diz quão boa é a aproximação...
Estas duas afirmações são ambas verdadeiras:

$$\begin{array}{rcl}
f(0.42) & \approx & f(0) + f'(0) \cdot 0.42 + \frac{f''(0)}{2}(0.42)^2 \\
f(0.42) & \approx & f(0) + f'(0) \cdot 0.42 + \frac{f''(0)}{2}(0.42)^2 + \frac{f'''(0)}{6}(0.42)^3
\end{array}$$

Até dé pra formalizar essa igualdade aqui embaixo
usando um limite - veja a página 4 deste PDF:
https://people.math.sc.edu/girardi/m142/handouts/10sTaylorPolySeries.pdf

$$f(x) \;=\; f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

Mas eu não sei como formalizar precisamente
a versão com 0.42 no lugar do x... =(

As versões truncadas de derivs, derivs_0 e derivs_p

Vamos definir derivs^n e derivs_0^n como as versões "truncadas até grau n" de derivs e derivs_0...

$\mathsf{derivs}^n(f)$ vai ser a lista com as primeiras $n+1$ entradas de $\mathsf{derivs}^n(f)$, e $\mathsf{derivs}_0^n(f)$ vai ser a lista com as primeiras $n+1$ entradas de $\mathsf{derivs}_0^n(f)$.

Além disso $\mathsf{derivs}_p(f)$ vai ser a lista infinita $(f(p), f'(p), f''(p), \ldots)$, e $\mathsf{derivs}_p^n(f)$ vai ser a lista com as primeiras $n+1$ entradas de $\mathsf{derivs}_p^n(f)$.

Exemplo:

$$\mathsf{derivs}_{42}^2(f) \quad = \quad (f(42), f'(42), f''(42)).$$

Vamos nos referir a $\mathsf{derivs}_p^n(f)$ como "as derivadas de f até grau n no ponto p". Repare que $f(42)$ é a "derivada de f de grau 0 no ponto 42", $f'(42)$ é a "derivada de f de grau 1 no ponto 42", etc...

Antes o termo "grau" não servia pra falar de número de vezes que uma função foi derivada, mas agora passou a servir. =)

Notação de físicos: introdução

Links:

https://people.math.sc.edu/girardi/m142/handouts/10sTaylorPolySeries.pdf
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-5.pdf (páginas 171–173)
https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf "Calculus Made Easy" (1914)
http://angg.twu.net/mathologer-calculus-easy.html
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C3-notacao-de-fisicos.pdf (p.5: linearizações)
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-notacao-de-fisicos.pdf
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=117

Na aula de 2022sep23 a gente usou os links acima
e eu escrevi um montão de coisas no quadro –
que eu vou digitar assim que der!!!

Exercício 5.

Leia a seção 4.7 do livro do Daniel Miranda:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=117

Os livros mais modernos:
i) distinguem dx e Δx,
ii) escrevem $y = f(x)$ ao invés de $y = y(x)$,
iii) evitam a convenção $x_1 = x_0 + \Delta x$.

a) Traduza o início da seção 4.7 do Miranda - até o fim da página 118 - pra notação do Thompson. Dicas:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \approx & f(p) + f'(p)(x-p) \\ L(x) & = & f(p) + f'(p)(x-p) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} f(x_1) & \approx & f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \\ L(x_1) & = & f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \end{array}$$

e a função L é exatamente a série de Taylor da função f truncada até grau 1... lembre que nós quase só vimos séries de Taylor no caso em que x_0 era 0, mas ficamos de ver depois o caso em que o "ponto base" não precisava mais ser 0...

Alguns truques de tradução

Truque 1: quando a gente escreve fórmulas "com o mesmo formato" perto uma da outra o leitor tende a ler a segunda ou como uma tradução da primeira pra outra notação ou como um caso particular da primeira...

Isto aqui é uma tradução de duas das fórmulas da p.117 do D. Miranda pra "notação de físicos":

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \approx & f(p)+f'(p)(x-p) \\ L(x) & = & f(p)+f'(p)(x-p) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} f(x_1) & \approx & f(x_0)+f'(x_0)\Delta x \\ L(x_1) & = & f(x_0)+f'(x_0)\Delta x \end{array}$$

E isto aqui é um caso particular da primeira fórmula:

$$f(4.02) \approx f(4) + f'(4)(4.02-4) \qquad (*)$$

Repare que a fórmula $(*)$ fica mais clara se escrevermos isto explicitamente:

$$x_1 = 4.02 \qquad x_0 = 4$$

...e repare que se a gente tentar escrever isto aqui direto

$$\sqrt{4.02} \approx \sqrt{4} + \sqrt{4}'(4.02-4)$$

fica confuso e péssimo — não existe uma notação padrão pra derivada de $\sqrt{x}$ em $x=4$!!! Aqui a gente TEM que usar um truque novo — a gente tem que dar um nome pra função $\sqrt{x}$. Por exemplo...

Alguns truques de tradução (2)

Seja $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$.
Então $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, e

$$\begin{array}{rrcl}
& f(4.02) & \approx & f(4) + f'(4)(4.02-4) \\
\Rightarrow & \sqrt{4.02} & \approx & \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4.02-4)
\end{array}$$

Repare que acima eu só fiz as subtituições $f(x) := \sqrt{x}$ e $f'(x) := \frac{1}{2\sqrt{x}}$ — eu acho que as contas mais mais fáceis de entender se a gente fizer as substituições e as simplificações em passos separados:

$$\begin{array}{rrcl}
& f(4.02) & \approx & f(4) + f'(4)(4.02-4) \\
\Rightarrow & \sqrt{4.02} & \approx & \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4.02-4) \\
& & = & 2 + \frac{1}{4}(0.02) \\
& & = & 2 + 0.005 \\
& & = & 2.005 \\
& \sqrt{4.02} & = & 2.004993765576342\ldots
\end{array}$$

A última linha acima tem um '$=$' ao invés de um '$\approx$', e eu calculei o resultado dela com a calculadora.

A tradução pra notação de físicos

Temos:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \tfrac{f''(0)}{2}x^2$$

Acho que vocês devem conseguir acreditar nisso aqui...
(a gente pode checar os detalhes depois!)

$$\begin{aligned} g(x_0 + \Delta x) &\approx g(x_0) + g'(x_0)\Delta x + \tfrac{g''(x_0)}{2}(\Delta x)^2 \\ h(x + \Delta x) &\approx h(x) + h'(x)\Delta x + \tfrac{h''(x)}{2}(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

E se $y = y(x)$ então:

$$\begin{aligned} y(x + \Delta x) &\approx y + y_x \Delta x + \tfrac{y_{xx}}{2}(\Delta x)^2 \\ y(x + \Delta x) &\approx y + y_x \Delta x + \tfrac{y_{xx}}{2}(\Delta x)^2 + \tfrac{y_{xxx}}{6}(\Delta x)^3 \end{aligned}$$

Exercício 5.

Digamos que $x_0 = 10$, $f(x) = x^3$, $y_0 = f(x_0)$, $g(y) = \operatorname{sen} y$.

a) Calcule $\mathsf{derivs}^1_{x_0}(f(x))$.

b) Calcule $\mathsf{derivs}^1_{y_0}(g(y))$.

c) Calcule $\mathsf{derivs}^1_{x_0}(g(f(x)))$.

Seja $h(x) = g(f(x))$ — ou seja, $h = g \circ f$.

d) Calcule $\mathsf{derivs}^2_{x_0}(h(x))$.

Exercício 5: gabarito em código

Exercício 6.
Este exercício é uma versão mais geral do exercício 4.
Digamos que f e g são funções suaves de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.
(Uma função é "suave" quando ela pode ser derivada infinitas vezes. A função $|x|$ não é suave).
Digamos que $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = f(x_0)$, e $h = g \circ f$.

a) Calcule $\mathsf{derivs}^2_{x_0}(h(x))$.

Repare que neste caso "calcule" quer dizer algo como "expanda e simplifique a expressão que você obtiver"... Existem vários tipos de expansão e simplificação, e os programas de computação simbólica dão um nome pra cada tipo e permitem que você escolha quais vão ser aplicadas.

Exercício 5 (cont.)

Agora sejam $y = y(x) = f(x)$ e $z = z(y) = g(y)$.

b) Traduza o seu $\mathsf{derivs}^2_{x_0}(h(x))$ do item (a)
pra notação de físicos.

Dica (pequena): $\frac{d}{dx}g(f(x_0)) = z_y y_x$.

c) Calcule $\mathsf{derivs}^3_{x_0}(z)$ usando notação de físicos.

Nas próximas páginas eu pus um "gabarito em código" do item (b). O modo mais fácil de usar a "notação de físicos" no Maxima é traduzir entre ela e a "notação de matemáticos" sempre que necessário. No item (c) as contas em "notação de matemáticos" ficam gigantescas, mas se você conseguir fazer elas todas em "notação de físicos" elas ficam pequenas.