Cálculo 2 - 2023.2

Todos os PDFs do semestre
juntados num PDFzão só

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.2-C2.html

Cálculo 2 - 2023.2

Aula 0: Introdução ao curso
e algumas dicas de estudo

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.2-C2.html

Pedaço de semicírculo: seja como o Bob

Imagina que você está numa turma de Cálculo 2 que tem dois "Alex"es – vou chamar eles de Alex 1 e Alex 2 – e um Bob. Numa das provas dessa turma cai uma questão assim, sobre uma fórmula que calcula a área de um pedaço de um semicírculo:

> Calcule:
>
> $$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Tanto o Alex 1 quanto o Alex 2 respondem essa questão dizendo só isso aqui,

$$\frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen}(x) + x\sqrt{1-x^2}\right)$$

e o Bob entrega uma resposta que tem uma página inteira de contas. Aí na vista de prova o Bob está feliz porque ganhou todos os pontos dessa questão e tanto o Alex 1 quanto o Alex 2 estão putíssimos porque ganharam 0, e porque não conseguiram me convencer a aumentar as notas deles.

O argumento do Alex 1 foi "pô, professor, a resposta tá certa, eu vi num livro e eu lembrava a fórmula, e eu até conferi ela no computador depois", o argumento do Alex 2 foi "pô, professor, a resposta tá certa, eu fiz as contas de cabeça e pensei tudo direito, eu só não escrevi"...

$\boxed{\text{Seja como o Bob!}}$

Porque é que os Alexes tiraram 0?
Que critério de correção eu usei aí?
Que critério de correção eu vou usar no curso?
Que nível de detalhe eu espero nas respostas?

Eu vou precisar de várias páginas pra responder tudo isso.

“Releia a Dica 7”

http://anggtwu.net/2021-1-C2-somas-1-dicas.html
http://anggtwu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=5

1) Aprenda a testar tudo: contas, possíveis soluções de equações, representações gráficas de conjuntos...
2) Cada “seja” ou “sejam” que aparece nestas folhas é uma definição, e você pode usá-los como exemplos de definições bem-escritas (ééé!!!!) pra aprender jeitos de escrever as suas definições.
3) Em “matematiquês” a gente quase não usa termos como “ele”, “ela”, “isso”, “aquilo” e ”lá” — ao invés disso a gente dá nomes curtos pros objetos ou usa expressões matemáticas pra eles cujo resultado é o objeto que a gente quer... mas *quando a gente está discutindo problemas no papel ou no quadro* a gente pode ser referir a determinados objetos *apontando pra eles com o dedo* e dizendo “esse aqui”.
4) Se você estiver em dúvida sobre o que um problema quer dizer tente escrever as suas várias hipóteses — a prática de escrever as suas idéias é o que vai te permitir aos poucos conseguir resolver coisas de cabeça.
5) Muitas coisas aparecem nestas folhas escritas primeiro de um jeito detalhado, e depois aos poucos de jeitos cada vez mais curtos. Você vai ter que aprender a completar os detalhes.
6) Alguns exercícios destas folhas têm muitos subcasos. Nos primeiros subcasos você provavelmente vai precisar fazer as contas com todos os detalhes e verificá-las várias vezes pra não errar, depois você vai aprender a fazê-las cada vez mais rápido, depois vai poder fazê-las de cabeça, e depois você vai começar a visualizar o que as contas “querem dizer” e vai conseguir chegar ao resultado graficamente, sem contas; e se você estiver em dúvida se o seu “método gráfico” está certo você vai poder conferir se o “método gráfico” e o “método contas” dão aos mesmos resultados.
7) Uma solução bem escrita pode incluir, além do resultado final, contas, definições, representações gráficas, explicações em português, testes, etc. Uma solução bem escrita é fácil de ler e fácil de verificar. Você pode testar se uma solução sua está bem escrita submetendo-a às seguinte pessoas: a) você mesmo logo depois de você escrevê-la — releia-a e veja se ela está clara; b) você mesmo, horas depois ou no dia seguinte, quando você não lembrar mais do que você pensava quando você a escreveu; c) um colega que seja seu amigo; d) um colega que seja menos seu amigo que o outro; e) o monitor ou o professor. Se as outras pessoas acharem que ler a sua solução é um sofrimento, isso é mau sinal; se as outras pessoas acharem que a sua solução está claríssima e que elas devem estudar com você, isso é bom sinal. *GA é um curso de escrita matemática:* se você estiver estudando e descobrir que uma solução sua pode ser reescrita de um jeito bem melhor, não hesite — reescrever é um ótimo exercício.

Linguagem formal, gramática, sintaxe

Veja se você consegue entender a figura da próxima página...
Eu peguei ela daqui, com pequenas adaptações:
https://en.wikipedia.org/wiki/Context-free_grammar

A parte à esquerda dela é a "gramática" de uma certa linguagem formal, e a parte à direita dela mostra como uma certa expressão é "parseada" nessa linguagem formal.

Todas as linguagens de programação têm gramáticas bem definidas. Quando a gente está trabalhando numa linguagem com uma gramática bem definida é fácil definir quais expressões são válidas nela – uma expressão é válida quando ela é "parseável" – e quais expressões têm erros de sintaxe – as que não são "parseáveis".

Em Prog 1 você aprendeu C, e você viu que o compilador podia rejeitar os seus programas por vários motivos... por exemplo:
1. erros de sintaxe,
2. erros de tipo,
3. símbolos não declarados.

Se você quiser entender direito como compiladores detectam erros dos tipos 2 e 3, dê uma olhada na página 99 do livro do Thain:
https://www3.nd.edu/~dthain/compilerbook/compilerbook.pdf#page=113

$$
\begin{array}{rcl}
\langle \mathsf{Stmt} \rangle & \rightarrow & \langle \mathsf{Id} \rangle \ = \langle \mathsf{Expr} \rangle \ ; \\
\langle \mathsf{Stmt} \rangle & \rightarrow & \{ \ \langle \mathsf{StmtList} \rangle \ \} \\
\langle \mathsf{Stmt} \rangle & \rightarrow & \texttt{if} \ (\ \langle \mathsf{Expr} \rangle \ ) \ \langle \mathsf{Stmt} \rangle \\
\langle \mathsf{StmtList} \rangle & \rightarrow & \langle \mathsf{Stmt} \rangle \\
\langle \mathsf{StmtList} \rangle & \rightarrow & \langle \mathsf{StmtList} \rangle \langle \mathsf{Stmt} \rangle \\
\langle \mathsf{Expr} \rangle & \rightarrow & \langle \mathsf{Id} \rangle \\
\langle \mathsf{Expr} \rangle & \rightarrow & \langle \mathsf{Num} \rangle \\
\langle \mathsf{Expr} \rangle & \rightarrow & \langle \mathsf{Expr} \rangle \ \langle \mathsf{Optr} \rangle \ \langle \mathsf{Expr} \rangle \\
\langle \mathsf{Id} \rangle & \rightarrow & \texttt{x} \\
\langle \mathsf{Id} \rangle & \rightarrow & \texttt{y} \\
\langle \mathsf{Num} \rangle & \rightarrow & \texttt{0} \\
\langle \mathsf{Num} \rangle & \rightarrow & \texttt{1} \\
\langle \mathsf{Num} \rangle & \rightarrow & \texttt{9} \\
\langle \mathsf{Optr} \rangle & \rightarrow & > \\
\langle \mathsf{Optr} \rangle & \rightarrow & +
\end{array}
$$

$$
\underbrace{\texttt{if} \ (\ \underbrace{\underbrace{\underbrace{\texttt{x}}_{\langle \mathsf{Id} \rangle}}_{\langle \mathsf{Expr} \rangle} \ \underbrace{>}_{\langle \mathsf{Optr} \rangle} \ \underbrace{\underbrace{\texttt{9}}_{\langle \mathsf{Num} \rangle}}_{\langle \mathsf{Expr} \rangle}}_{\langle \mathsf{Expr} \rangle} \ ) \ \underbrace{\underbrace{\{ \ \underbrace{\underbrace{\underbrace{\texttt{x}}_{\langle \mathsf{Id} \rangle} = \underbrace{\underbrace{\texttt{0}}_{\langle \mathsf{Num} \rangle}}_{\langle \mathsf{Expr} \rangle} \ ;}_{\langle \mathsf{Stmt} \rangle}}_{\langle \mathsf{StmtList} \rangle} \ \underbrace{\underbrace{\texttt{y}}_{\langle \mathsf{Id} \rangle} = \underbrace{\underbrace{\texttt{y}}_{\langle \mathsf{Expr} \rangle} \ \underbrace{+}_{\langle \mathsf{Optr} \rangle} \ \underbrace{\texttt{1}}_{\langle \mathsf{Expr} \rangle}}_{\langle \mathsf{Expr} \rangle} \ ;}_{\langle \mathsf{Stmt} \rangle} \ \}}_{\langle \mathsf{StmtList} \rangle}}_{\langle \mathsf{Stmt} \rangle}}_{\langle \mathsf{Stmt} \rangle}
$$

A linguagem formal de Cálculo 2

Péssima notícia 1:
Nenhum livro define precisamente a gramática da "linguagem" de Cálculo 2. Você vai ter que deduzir quais expressões são válidas lendo os livros do curso – principalmente o Leithold e o Miranda – e os meus slides com muita atenção, escrevendo a beça, checando se as suas expressões seguem as mesmas regras que as deles, e discutindo com os seus colegas, comigo, e com o monitor.

Péssima notícia 2:
Cálculo 2 não tem uma linguagem só, tem várias! Por exemplo, em alguns momentos do curso a gente vai permitir a "notação de Leibniz", na qual expressões como $\frac{dy}{dx}dy = dx$ fazem sentido... mas a gente só vai conseguir entender a notação de Leibniz direito se a gente considerar que "Cálculo 2 sem notação de Leibniz" e "Cálculo 2 com notação de Leibniz" são duas linguages diferentes, como, sei lá, C e C++, e se a gente entender como *traduzir* expressões em "Cálculo 2 com notação de Leibniz" para "Cálculo 2 sem notação de Leibniz".

$2+3=5$	sempre
$2+3 \to 5$	**NUNCA**
$\underbrace{2+3}_{5}$	sempre
$\frac{dy}{dx}dx = dy$	às vezes
$\int \operatorname{sen} x\, dx$	sempre
$\int \operatorname{sen} x$	**NUNCA**
$\int f\, dx = \int f(x)\, dx$	às vezes
$y = y(x)$	às vezes
$(a\cdot 10)[a:=4] = 4\cdot 10$	sempre
$(a\cdot 10)[a:=4] = 40$	**NUNCA**
Quando $x=3$ temos f(x)=42	sempre
Quando $x=3$ temos f=42	**NUNCA**

Sintaxe

Em Prog 1 você aprendeu a usar uma linguagem – o C – com uma sintaxe que era totalmente nova pra você, e a cada aula você aprendia mais algumas construções sintáticas – ou, pra encurtar, "sintaxes" – que o compilador entendia. E você deve ter dado uma olhada de relance, durante poucos segundos, na sintaxe completa do C em BNF, que é o apêndice A do Kernighan & Ritchie... na versão do K&R que eu tenho esse apêndice A tem 9 páginas. É algo parecido com isso aqui:

`http://www.csci-snc.com/ExamplesX/C-Syntax.pdf`
`https://www2.cs.arizona.edu/~debray/Teaching/CSc453/DOCS/cminusminusspec.html`

O pessoal de computação tem duas matérias sobre isso. Em Linguagens Formais eles aprendem a definir matematicamente as linguagens que um computador possa entender, e em Compiladores ele aprendem a fazer programas que entendem certas "linguagens formais" e "compilam" "programas" escritos nessas linguagens.

Quase tudo nessas duas matérias é bem difícil de entender, mas algumas poucas idéias são fáceis e a gente vai usar elas pra entender algumas sintaxes que vão ser usadas em C2 e que devem ser novas pra quase todo mundo... por exemplo estas,

$$\sum_{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle}^{\langle\mathsf{expr}\rangle} \langle\mathsf{expr}\rangle$$

$$\int_{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle}^{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle} \langle\mathsf{expr}\rangle \, d\langle\mathsf{var}\rangle$$

$$\langle\mathsf{expr}\rangle\Big|_{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle}^{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle}$$

$$\forall\langle\mathsf{var}\rangle\in\langle\mathsf{expr}\rangle.\ \langle\mathsf{expr}\rangle$$

$$\exists\langle\mathsf{var}\rangle\in\langle\mathsf{expr}\rangle.\ \langle\mathsf{expr}\rangle$$

e as notações de "set comprehensions" daqui: Mpg8

Justificativas

A linguagem de Cálculo 2 não tem uma gramática totalmente definida, como o C. Cada livro usa convenções um pouco diferentes, e TODOS ELES supõem que o leitor vai aprender a sintaxe certa só lendo o livro e estudando – não há um compilador no qual a gente possa digitar expressões de Cálculo 2 e que vá dizer "Syntax error" onde a gente errar. O máximo que a gente tem são alguns programas que entendem *algumas* expressões de Cálculo 2 escritas em ascii e que sabem converter essas expressões pra formatos mais bonitos. Por exemplo:

`https://docs.sympy.org/latest/tutorial/printing.html`

Existem programas que entendem demonstrações e que são capazes de checar cada passo de uma demonstração pra ver se ele está correto. Eles geralmente precisam de um monte de dicas sobre qual é a justificativa de cada passo – essas dicas são *mais ou menos* como a parte à direita dessa demonstração aqui, que aparece na página 370 do livro do Thomas:

Using Substitution

$$\begin{aligned}
\int \cos(7\theta + 5)\, d\theta &= \int \cos u \cdot \frac{1}{7}\, du && \text{Let } u = 7\theta + 5,\ du = 7\, d\theta,\ (1/7)\, du = d\theta. \\
&= \frac{1}{7}\int \cos u\, du && \text{With the (1/7) out front, the integral is now in standard form.} \\
&= \frac{1}{7}\sin u + C && \text{Integrate with respect to } u, \text{ Table 4.2.} \\
&= \frac{1}{7}\sin(7\theta + 5) + C && \text{Replace } u \text{ by } 7\theta + 5.
\end{aligned}$$

Eu comecei a aprender um desses "programas que entendem demonstrações" em 2021 – o Lean:

`https://www.ma.imperial.ac.uk/~buzzard/xena/`

Ele é considerado muito mais fácil de usar que os "proof assistants" anteriores a ele mas ele ainda é bem difícil. Existem tutoriais pra ele nos quais os usuários têm que demonstrar na linguagem do Lean montes de exercícios de Matemática Discreta e Cálculo 1, mas acho que ainda falta bastante pra alunos de primeiro período conseguirem resolver os seus exercícios na linguagem do Lean.

Eu vou fazer algumas referências ao Lean no curso, meio como curiosidade e meio por conta de uma coisa cuja explicação é meio longa. Lá vai.

Uma das coisas que me dá mais ódio é ter que lidar com alunos que escrevem um monte de contas totalmente sem pé nem cabeça nas provas e depois juram que "tava tudo certo, caramba" e que eu só dei nota baixa pra eles porque eu tava de marcação com eles. E tem uma coisa que me dá tipo 1/100 desse ódio, que é lidar com alunos que fazem demonstrações nos quais eles pulam montes de passos e juram que tudo que eles fizeram "é óbvio".

Neste curso nós vamos ver as definições precisas de *alguns tipos* de "passos óbvios" que aparecem em demonstrações e contas que são comuns de Cálculo 2. A maioria das demonstrações que nós vamos ver são por sequências de igualdades, e vão ter este formato:

$$\begin{aligned}
\langle \text{expr} \rangle &= \langle \text{expr} \rangle && \langle \text{justificativa} \rangle \\
&= \langle \text{expr} \rangle && \langle \text{justificativa} \rangle \\
&= \langle \text{expr} \rangle && \langle \text{justificativa} \rangle \\
&= \langle \text{expr} \rangle && \langle \text{justificativa} \rangle
\end{aligned}$$

A operação de substituição que eu vou explicar nos próximos slides vai servir pra ZILHÕES de coisas durante o curso – entre elas pra gente entender quais passos da forma abaixo são "óbvios":

$$\langle \text{expr} \rangle = \langle \text{expr} \rangle \qquad \langle \text{justificativa} \rangle$$

Obs: eu copiei o texto acima daqui: 2dT8
Falta revisá-lo!

Atirei o Pau no Gato: seja como o Bob

Imagina que você está fazendo aula de flauta doce junto com o Alex e o Bob, e na prova vocês vão ter que tocar Atirei o Pau no Gato.
O Alex demora um tempão pra encontrar cada nota, e ele leva meia hora pra tocar a música toda.
O Bob toca a música toda certinha em menos de 30 segundos.
Quando saem as notas o Alex tirou uma nota baixa e o Bob tirou 10.
Aí o Alex vai chorar pontos e diz "*pôxa, profe, eu me esforcei muito!*"

Quando o Bob tocou Atirei o Pau no Gato ele fez a música *parecer fácil*. O esforço dele *ficou invisível*.

Seja como o Bob!

O curso vai ter uma parte em que você vai ter que aprender a desenhar figuras com dezenas de retângulos e trapézios *em poucos segundos* – como o Bob tocando Atirei o pau no gato.

Se você for como o Alex, e levar mais de meia hora pra desenhar cada figura dessas, eu vou considerar que você não aprendeu os padrões que essas figuras seguem – e você não aprendeu a coisa mais importante.

Logo depois dessa parte do curso vai vir uma parte em que você vai ter que visualizar mentalmente (limites de) figuras feitas de infinitos retângulos e trapézios, e desenhar essas figuras. Se você for como o Alex você vai levar tempo infinito pra desenhar cada uma dessas figuras; se você for como o Bob você vai levar segundos.

Seja como o Bob!

Imagens de intervalos

Veja as páginas 5 e 7 daqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-somas-3.pdf#page=5

Digamos que na sua turma de Cálculo 2 tem dois Alexes diferentes, um Bob, um Carlos e um Daniel, e todo mundo tá tentando resolver um exercício que é o seguinte: "seja f a função da página 5 do link acima. Calcule $f([1,3])$".
Todo mundo reconhece que o intervalo $[1,3]$ é um conjunto com infinitos pontos, e cada pessoa tenta resolver esse exercício de um jeito diferente.

O Alex 1 decide começar listando todos os pontos do intervalo $[1,3]$. Ele vai primeiro obter uma lista de pontos que ele vai escrever nesse formato aqui,

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}$$

e depois ele vai simplificar esse conjunto daqui,

$$\{f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \ldots\}$$

transformando ele numa lista de números, pondo os números dessa lista em ordem e deletando as repetições... só que como o conjunto $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}$ é infinito ele nunca consegue terminar o primeiro passo.

O Alex 2 decide que ele vai pegar uma sequência de conjuntos finitos cada vez maiores, e "cada vez mais parecidos" com o conjunto $[1,3]$. Ele escolhe essa sequência aqui...

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{1,3\}, \\
A_2 &= \{1,2,3\}, \\
A_3 &= \{1,1.5,2,2.5,3\}, \\
A_4 &= \{1,1.25,1.5,1.75,2,2.25,2.5,2.75,3\}, \ldots
\end{aligned}$$

Ele calcula $f(A_1)$, $f(A_2)$, $f(A_3)$, $f(A_4)$ pelo gráfico usando o "jeito esperto" – como nas figuras da página 5 do link – e ele deduz, por um argumento informal e olhométrico, que $f([1,3])$ deve ser o intervalo $[3,4]$.

O Bob faz algo parecido como o Alex 2, mas ele encontra um modo de "levantar" todo o intervalo $[1,3]$ pro gráfico da função $y = f(x)$ de uma vez só, e de depois "projetar" pro eixo y esse "intervalo levantado". Ele obtém uma figura bem parecida com a última figura da página 5 do link, e ele descobre – também meio no olhômetro – que $f([1,3]) = [3,4]$.

O Carlos vê que é óbvio que $f([1,3]) = [f(1), f(3)] = \{3,3\} = \{3\}$, e portanto a imagem do intervalo $[1,3]$ pela função f é um conjunto com um ponto só. =(

O Daniel resolve que tudo isso é informal demais pra ele, e que ele precisa aprender um modo 100% preciso e formal de calcular $f([1,3])$ sem o gráfico. Ele descobre que vai ter que estudar uma coisa chamada "Análise Matemática", baixa o "*Elementary Analysis: The Theory of Calculus*" do Kenneth Ross, começa a estudar por ele e aprende coisa incríveis – mas ele leva um ano nisso.

Seja como o Bob!

Sobre Português

Muita gente aprende no Ensino Médio e nas matérias de primeiro período que "entender uma fórmula" quer dizer 1) traduzí-la pra português e 2) generalizá-la. Então é BEM comum uma pessoa ficar em dúvida se pode fazer um passo como este aqui numa conta,

$$\sqrt{42^2 + 99^2} = 42 + 99$$

e aí a pessoa me perguntar isso aqui:

> Professor, a raiz quadrada de um número ao quadrado mais outro número ao quadrado é o número mais o outro número?

É bem mais fácil discutir essa dúvida se a pessoa me fizer essa pergunta em notação matemática, ou me mostrando a igualdade acima e perguntando "isso aqui é verdade?", ou me mostrando isso aqui,

$$\sqrt{42^2 + 99^2} \stackrel{?}{=} 42 + 99$$

que é bem mais bacana porque o '$\stackrel{?}{=}$' deixa super claro que isso é uma igualdade que a pessoa não sabe se é verdade...

Se a pessoa me pergunta se isso aqui é verdade,

$$\sqrt{42^2 + 99^2} = 42 + 99 \qquad (*)$$

eu posso mostrar pra ela essa outra igualdade aqui – note que eu estou dando nomes como $(*)$ e $(**)$ pras igualdades –

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + y \qquad (**)$$

e aí eu pergunto "você quer saber se a $(**)$ é algo que vale sempre, né?", e aí a pessoa responde "É! É isso!", e aí eu consigo responder: se a $(**)$ valer sempre ela também vai valer no caso em que $x = 3$ e $y = 4$. Quando $x = 3$ e $y = 4$ a $(**)$ vira isso aqui:

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 3 + 4 \qquad (***)$$

e aí temos:

$$\underbrace{\underbrace{\sqrt{\underbrace{\underbrace{\underbrace{x}_{3}{}^2}_{9} + \underbrace{\underbrace{y}_{4}{}^2}_{16}}_{25}}}_{5} = \underbrace{3+4}_{7}}_{\mathbf{F}}$$

Ou seja, a igualdade $(***)$ é falsa, e portanto a $(**)$ não vale sempre.

Sobre Português (e generalizar)

Repara que eu não descobri se a igualdade $(*)$ era verdade ou não... eu convenci a pessoa a discutir a igualdade $(**)$ ao invés disso, porque eu "adivinhei" que na verdade o que a pessoa queria saber era se a $(**)$ era verdade ou não. Além disso eu desmontei a pergunta original da pessoa – aliás, a pergunta sobre a $(**)$ – em várias perguntas menores.

Até alguns semestres atrás eu achava que todo chegava na universidade sabendo "generalizar" e "particularizar" (ou: "especializar") bastante bem... eu achava que as pessoas aprendiam isso assim que aprendiam a fazer "contas com letras" no Ensino Médio.

Vocês provavelmente vão ouvir histórias sobre como os meus cursos de Cálculo em 2022.1 – logo depois do fim da quarentena – foram os piores cursos *do universo*. Uma boa parte da razão pra isso foi que eu fiquei tentando encontrar modos de ensinar as pessoas a generalizarem e particularizarem, e fui descobrindo que essas coisas são muito mais difíceis de aprender e de ensinar do que eu pensava.

A pessoa do slide anterior achava que só podia fazer uma pergunta se ela 1) generalizasse a pergunta dela, e 2) traduzisse a pergunta dela pra Português. Acho que ela achava que tinha que tratar essas duas coisas como se fossem fáceis e óbvias – *mas não são*, e eu recomendo que a gente trate particularização/especialização como algo difícil em que é muito comum as pessoas terem dúvidas muito importantes que vale a pena discutir, "encontrar a generalização certa" como algo BEM difícil e BEM importante que a gente vai treinar explicitamente em vários exercícios difíceis e importantes do curso, e a gente vai ver que "traduzir pra português" é uma ferramenta bem menos útil do que parece. Quase todas as expressões matemáticas que a gente vai ver têm uma pronúncia padrão, mas vai ser bem comum a "tradução pra português" não nos ajudar nada, ou até nos atrapalhar, porque a gente vai ter que entender algumas palavras e expressões "como matemáticos" e não no sentido usual delas...

(Veja o próximo slide!)

Banana

Considere as quatro perguntas abaixo:

1. Qual é o resultado de substituir na palavra "banana" todas as letras 'a' por 'w'?
2. Qual é o resultado de substituir na palavra "banana" todas as letras 'o' por 'u'?
3. Qual é o resultado de substituir na palavra "banana" todas as letras 'A' por 'W'?
4. Qual é o resultado de substituir na palavra "blitiri" todas as letras '2' por '3'?

O resultado da 1 é bem fácil: "bwnwnw", mas a maioria das pessoas fica em dúvida nos outros itens... muitas pessoas respondem coisas como "não dá pra fazer o 2 porque "banana" não tem 'o' ", "não sei se o 3 tem que dar "bWnWnW" ou "bwnwnw" ", ou "não dá pra fazer o 4 porque "blitiri" não é uma palavra e '2' e '3' " não são letras"...

Neste curso, e em todos os cursos de matemática que vão vir depois dele, você vai ter que aprender a interpretar certas definições "como matemático": você vai ter que descobrir a interpretação mais simples possível que faça sentido, e essa idéia de "mais simples possível" vai ser bem parecida com *fazer o programa mais simples possível que obedeça uma certa especificação...*

Por exemplo:

o programa que responde "banana" no item 2 é bem mais simples do que o programa que primeiro testa se a palavra original tem alguma letra 'o', e dá erro se não tem;

o programa que responde "banana" no item 3 – porque ele considera que 'a' e 'A' são letras completamente diferentes, e "banana" não tem 'A' – é muito mais simples do que os programas que consideram que 'a' e 'A' são "letras parecidas";

o programa que responde "blitiri" no item 4 é muito mais simples do que os programas que testam se a palavra original é uma palavra válida e se as duas letras dadas são caracteres considerados como "letras".

Links:
Sobre áreas negativas e retângulos degenerados:
2cT185, 2cT185
2fT63, 2fT64

2gT20 Contexto / Sabemos que $2 = 3$. Então...
2gT38 O macaco substituidor: banana

Unexpected end of input

Uma coisa que me desesperava bastante era quando um aluno me mostrava algo como isso aqui,

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x)\cdot\beta(x)) = \alpha'(x)\cdot$$

e me perguntava "isso aqui tá certo?", ou: "é isso?"...
Aqui a pergunta mais precisa seria "esse início tá certo?", ou "como é que eu continuo?"... eu aqui eu poderia responder ou "não!" ou isto,

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x)\cdot\beta(x)) = \alpha'(x)\cdot\beta(x)+\alpha(x)\cdot\beta'(x)$$

só que a resposta que funciona melhor *didaticamente* é a seguinte:

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x)\cdot\beta(x)) = \alpha'(x)\ \cdot \qquad (*)$$

não é nem mesmo uma expressão válida, e um compilador que for analisar essa expressão vai abortar no meio do parsing e dizer "Unexpected end of input", que é um tipo específico de erro de sintaxe...

O melhor modo de discutir a dúvida da pessoa que perguntou o "isso aqui tá certo?" é ir consertando com ela a expressão dela passo a passo, e – **JURO** – o melhor modo de fazer isso é primeiro transformar a expressão dela em uma expressão que compile, como essa aqui:

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x)\cdot\beta(x)) = \alpha'(x)\cdot 42 \qquad (**)$$

que é uma igualdade – no sentido de que tem uma representação em árvore com o '=' no topo – é aí a gente pode começar a discutir coisas como:

- a igualdade $(**)$ é verdadeira para todas as funções $\alpha(x)$ e $\beta(x)$?
- a igualdade $(**)$ é um caso particular da regra do produto?

“Faz um vídeo explicando o PDF”

Em 2021 em fiz um vídeo – que ficou bem bom – pra responder os alunos que estavam dizendo “professor, faz um vídeo explicando o PDF”, e em 2023 eu legendei esse vídeo. Dá pra acessar as legendas e o vídeo nos links abaixo,

http://anggtwu.net/2021-1-C2-somas-1-dicas.html

e o trecho mais importante das legendas é esse aqui:

Então, cada PDF tem vários exercícios e muitas dezenas de idéias. Se vocês disserem só “faz um vídeo explicando o PDF” eu vou fazer um vídeo de 5 minutos explicando tudo de um PDF por alto porque eu não sei direito onde estão as dúvidas de vocês... mas vocês fizerem perguntas mais específicas aí eu consigo fazer vídeos bem mais detalhado sobre aquelas perguntas ou sobre aqueles exercícios... gente, vocês não estão discutindo para descobrir como resolver os problemas? O próximo passo, já que vocês estão empacados, é vocês passarem a discutir pra encontrar a boas perguntas pra fazer... aqui tem um outro trecho que eu não copiei, e deixa eu só ler isso aqui em voz alta também... gente, a matéria de matemática fica cada vez mais difícil à medida que as matérias ficam mais avançadas, e passa a ser comum ter trechos uma linha ou de um parágrafo nos livros-texto que vocês vão passar muitas horas tentando decifrar aquilo. Isso vai acontecer O TEMPO TODO... praticamente toda aula, toda página, todo vídeo vai acontecer isso, até o a última matéria de matemática na vida de vocês, então a questão é: como é que vocês podem fazer para não ficarem perdidos com isso, para não ficarem paralisados... voltando pro que eu escrevi aqui, o meu objetivo aqui é fazer vocês aprenderem se virar com isso, e a técnica para isso e vocês aprenderem a escrever as hipóteses de vocês e aprenderem a fazer perguntas. A maioria das perguntas vocês vão conseguir responder sozinhos, algumas vocês vão conseguir descobrir a resposta conversando com amigos – faltou um “s” aqui... – que também não sabiam a resposta, que vão descobrir junto com vocês, e umas poucas vocês vão empacar mesmo e não vão conseguir resolver sozinhos. Me mandem as dúvidas de vocês!

Um post da Ana Leticia de Fiori

Em 19/fev/2023 a Ana Letícia de Fiori
postou isso aqui no Facebook:

AL: Um fenômeno curioso que tenho observado entre estudantes que declaram ter "travas de escrita", ficarem "empacados" ao desenvolver trabalhos de conclusão de disciplinas ou de curso. Frequentemente, a alegação é de que o "perfeccionismo" faz com que travem.
Eu tenho provocado, perguntado sobre quais são os gatilhos, quais os momentos em que eles sentem que o bloqueio vem. Uma resposta é o confronto com o material coletado, sejam os dados sejam as referências levantadas. Materiais com os quais eles não conseguem lidar, no sentido radical da palavra lida. Não sabem trabalhar com as referências e com os dados. Porque não estão acostumados a ler.
Um dos efeitos disso são trabalhos bastante declaratórios, que clamam ter feito "revisões bibliográficas", "levantamentos", "análises de discurso", etc. que, na verdade, jamais ocorreram. Ao finalmente escrever, despreza-se o que consta na literatura e se escreve de cabeça, com alguma citação aqui ou acolá utilizada como argumento de autoridade. Claro que o texto sai confuso, raso, impreciso.
Passa longe de um problema de perfeccionismo. Mas é assim que se mascara a falta de perícia no ofício acadêmico.
E, recentemente, numa reunião entre pares, ouvi dizerem que para evitar os eternos problemas de plágio e os novos problemas dos softwares de IA, vão só realizar atividades orais e de escrita em sala de aula. Isso me apavora, porque o tempo de maturação de um trabalho acadêmico não é o tempo da sala de aula. E vai ser mais uma instância a sumir da experiência desses estudantes.

E: Nossa, eu tou exatamente tentando escrever sobre um outro tipo de "perfeccionismo" que alguns dos meus estudantes têm e que eu ainda não tenho um modo muito bom de lidar com isso... São estudantes que assim que vêem que algo que eles escreveram está errado eles ou apagam ou jogam foram. Eu até tenho um monte de material - e slogans - sobre como o modo mais rápido de aprender assuntos difíceis de matemática é você escrever "hipótese" ou "rascunho" antes das partes que você não tem certeza e NÃO APAGAR NADA, NUNCA -
...mas não adianta, eles entram em pânico quando vêem que algo que eles escreveram não está perfeito - e aí eles não conseguem estudar...

AL: Mas aí é que está, a que parâmetros de perfeição eles se referem?
Esse comportamento de escrever e apagar tem a ver em parte com a fantasia de que o texto se compõe de uma vez só. Tendem a pular as etapas de estruturação de um roteiro, de rascunhos e revisões.
Quase como se o texto fosse psicografado. Eu costumo brincar com meus alunos que ninguém é Chico Xavier da antropologia, eles riem, mas teimam.
De novo, falta a dimensão do trabalho com o texto.
Perfeição, na fantasia dos alunos, é escrever sem esforço.

Retas reversas

O Alex, o Bob e o Carlos fizeram GA juntos. Um dos últimos assuntos do curso era uma fórmula pra calcular a distância entre "retas reversas" – é uma fórmula bem complicada, que tem um determinante e um produto cruzado – e cada um deles estudou esse assunto de um modo diferente.

O Alex e o Carlos "sabem" que o objetivo de cada matéria de Matemática é fazer as pessoas aprenderem certos teoremas. Os dois decoraram a fórmula da distância entre retas reversas e tentaram aplicar ela na prova. O Alex conseguiu, mas a questão da prova tinha vários itens e em todos eles ela usava letras diferentes das da fórmula que ele tinha decorado, e aí ele levou MUITO tempo pra resolver um item, e não conseguiu fazer os outros... e o Carlos tinha decorado a fórmula errado, e aí num determinado ponto da questão ele precisava dividir um número negativo por um vetor, e ele não sabia como fazer isso.

Tanto o Alex quanto o Carlos esqueceram a fórmula logo depois da prova.

O Bob estudou essa parte da matéria de um outro jeito. Ao invés de pensar "toda vez que eu precisar calcular a distância entre duas retas é só usar a fórmula" ele considerou que tem muitos casos simples em que ele sabe calcular a distância entre as retas no olhômetro – por exemplo, o caso em que uma das retas é paralela ao eixo x e a outra é paralela ao eixo y. Ele foi aprendendo como lidar com vários casos um pouco menos simples que esse, e aprendeu como visualizar o que aquela fórmula complicadíssima "quer dizer" – ela calcula a altura de um certo paralelepípedo.

O Bob tratou essa fórmula como algo que generaliza vários casos "simples" em que ele consegue calcular a distância entre duas retas por outros métodos, e ele usou esses casos simples pra testar se a fórmula realmente dá o resultado que ele esperava.

Tanto o Alex quanto o Bob quanto o Carlos "estudaram pelo livro", mas existem vários modos de "estudar pelo livro" e o Bob usou modos que nem o Alex nem o Carlos conheciam.

Neste curso você vai aprender – e treinar – vários modos de "estudar pelo livro" que provavelmente vão ser totalmente novos pra você.

Contexto

Quase todas as expressões matemáticas que usamos em C2 dependem do contexto. Por exemplo, a interpretação default pra esta expressão aqui:

$$f(x) = x - 9 = 2$$

é:

Para toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
e para todo $x \in \mathbb{R}$ temos:
$f(x) = x - 9 = 2$

Se você só escreve "$f(x) = x - 9 = 2$" e mostra isso pro "colega que seja seu amigo" ele vai levar meia hora tentando adivinhar qual foi o contexto que você estava pensando mas não escreveu...
...e se ele descobrir em menos de, digamos, 50 tentativas, ele vai dizer "ok, jóia, tá certo!".

O "colega que seja menos seu amigo" vai fazer menos tentativas, e os personagens "o monitor" e "o professor" da Dica 7 vão checar se o que você escreveu vai ser entendido corretamente por qualquer pessoa que saiba as convenções de como escrever matemática.

Lembre que quase todo mundo pára de ler um texto matemático quando vê uma besteira muito grande escrita nele. Imagine que um "colega que seja menos seu amigo" te mostra a solução dele pra um problema e te pergunta se está certa. A solução dele começa com:

Sabemos que $2 = 3$. Então...

O que você faria?

Dica: releia isto aqui:
Slogans27:07 até 32:45

Fórmulas e hipóteses

Dê uma olhada no Teorema 4 da seção 3.1 do Miranda: MirandaP80. Ele diz isso aqui:

> Se f e g são funções diferenciáveis em $x = a$ então a função $f + g$ é diferenciável em a e:
>
> $$(f+g)'(a) = f(a) + g(a).$$

Nós vamos considerar que esse *teorema* pode ser decomposto em duas partes: *fórmula* e *hipóteses*. A *fórmula* dele é esta aqui,

$$(f+g)'(a) = f(a) + g(a)$$

e em muitas situações nós vamos querer usar só as fórmulas de certos teoremas e deixar pra verificar as hipóteses delas no final.

Obs: falta acrescentar muita coisa aqui... explicar o que são contas formais, mostrar que o Mathologer só faz contas formais no vídeo dele sobre o "Calculus Made Easy", mencionar que em Cálculo 3 nós vamos usar o "Calculus Made Easy" e que todas as contas dele são formais, falar sobre a introdução do Martin Gardner pro CME e como ele explica que o conceito de "função" foi mudando...

Obs 2: tem um slide sobre contas formais aqui: 2gT36 (p.4) O macaco e as contas formais

Sobre aulas expositivas

Muitos alunos acreditam que se eles assistirem uma aula expositiva eles vão ser capazes de resolver na prova questões sobre o que eles aprenderam – só que isso só passa a ser *mais ou menos* verdade depois que a pessoa aprende *muito bem* como estudar.

Muita coisa em matemática funciona como músculos. Os músculos mentais que você usa pra entender uma aula expositiva são bem diferentes dos músculos mentais que você usa pra resolver exercícios, e os músculos mentais que você exercita quando você relê uma explicação que você escreveu e procura jeitos de reescrevê-la de um modo mais claro são diferentes desses...

Leia isto aqui:
Visaud39:09 até 46:06

Formal vs. coloquial

Lembre que um dos meus objetivos principais *neste curso* é fazer as pessoas aprenderem a escrever suas idéias matemáticas de um jeito que seja claro e fácil de revisar, que elas gostem de reler depois (dica 7b) e que os colegas gostem de ler (dicas 7c e 7d)...

Algumas pessoas acham que textos matemáticos têm que ser escritos numa linguagem "formal" que seja a mais distante possível do português coloquial; outras pessoas preferem escrever de um modo bem próximo do coloquial. Por exemplo, o Jacir Venturi (VenturiGA), escreve num Português pomposo que eu acho horrível, e o Felipe Acker (AckerGA1) escreve de um modo bem próximo do coloquial que eu gosto bastante. E até hoje eu só tive acesso a bem pouco material do Reginaldo, mas eu tenho a impressão de que ele não gosta de usar linguagem coloquial em matemática... eu falo um pouquinho sobre isso neste trecho de um vídeo sobre didática: Visaud59:49.

Na parte do curso sobre somas de Riemann você vai aprender a lidar com definições bem complicadas, e aos poucos – um pouquinho neste curso, e bastante nos seguintes – você vai aprender a fazer as suas próprias definições. E quando você souber fazer as suas próprias definições você vai ver que dá pra ser totalmente preciso usando tanto português coloquial quanto português pomposo...

...ah, e na parte final do curso, que é sobre equações diferenciais, você vai (ter que) aprender a usar corretamente um monte de "partículas", como "seja", "então", "temos", "isto é", "queremos", "sabemos que", "lembre que", "digamos que" e "vamos testar se".

Cálculo 2 - 2023.2

Aulas 1 e 2: integração e derivação
com o mathologermóvel

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.2-C2.html

Links

Quadros destas aulas:
2hQ1 Quadros da aula 1 (2a, 28/ago/2023)
2hQ3 Quadros da aula 2 (3a, 29/ago/2023)

Links da aula 1:
2gT4 Releia a dica 7
2gT11 Atirei o pau no gato
2gT19 Retas reversas
2gT24 Integração e derivação com o Mathologermóvel
2gT27 (p.4) Exercício 1
2gT28 (p.5) Dicas pro exercício 1
CalcEasy03:19 até 12:47

Links da aula 2:
CalcEasy11:35 até 12:47
2gT37 (p.5) O macaco substituidor: EDOs, RC, TFC2
StewPtCap5p9 (p.330) Figuras 11 e 12
StewPtCap5p16 (p.337) A integral definida
StewPtCap5p33 (p.354) TFC, parte 2
StewPtCap5p36 (p.357) Exercícios 19 a 26 (sobre o TFC2)
2fT91 até 2fT93 (p.3 até p.5): A definição da integral

Os slides das próximas páginas são versões ligeiramente reescritas destes slides de outros semestres:

2fT17 (mathologermovel, p.3) Item 3
2fT18 (mathologermovel, p.4) Item 4
2eT62 (TFC1, p.3) Algumas propriedades da integral
2eT66 (TFC1, p.7) Exercício 1
2eT69 (TFC1, p.10) A função G(x) é esta aqui
2dT225 (MT3, p.4) Uma espécie de gabarito
2eT199 (P1, p.7) eu defini as funções f e g desta forma
2eT200 (P1, p.8) gabarito

Introdução

Nesta parte do curso nós vamos tentar entender
este trecho do vídeo do Mathologer,

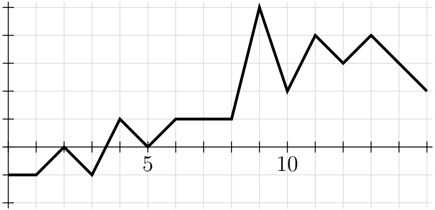
CalcEasy03:19 até 12:47

e vamos fazer alguns exercícios –
que podem ser feitos em vários níveis de detalhe.
Leia estes trechos das legendas de uns vídeos meus:

Slogans01:10 até 08:51: sobre chutar e testar
Slogans07:17 até 07:48: ...do tamanho de um apartamento
Visaud45:14 até 52:24: ajustar o nível de detalhe
Slogans1:11:02 até 1:17:42: seja o seu prório Geogebra
Slogans1:39:46 até 1:45:02: ...com quem vale a pena estudar

Leia também estes slides:
2gT4 (intro, p.3) "Releia a Dica 7"
2gT13 (intro, p.12) Sobre Português
2gT14 (intro, p.13) Sobre Português (2)
2gT16 (intro, p.15) Unexpected end of input
2gT19 (intro, p.18) Retas reversas

Exercício 1.
Seja $G(x)$ esta função:

$G(x) \quad =$ 

Relembre como calcular coeficientes angulares e derivadas no olhômetro e faça um gráfico da função $G'(x)$.

Dica 1: $G'(3.5) = 2$.
Dica 2: $G'(4)$ não existe — use uma bolinha vazia pra representar isso no seu gráfico.

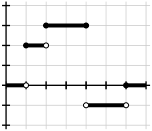
Exercício 1: mais dicas

Pra fazer o exercício 1 você provavelmente vai ter que relembrar algumas coisas sobre inclinação, coeficiente angular, limites laterais, derivadas laterais, e sobre o significado das bolinhas cheias e das bolinhas vazias nos gráficos... links:

Leit1p18 (p.17: inclinação)
Leit1p42 (p.41: bolinhas, domínio, imagem)
StewPtCap1p10 (p.15: círculo cheio e círculo vazio)
Miranda66 (Capítulo 3: Derivadas)
Miranda22 (Seção 1.4: Limites laterais)
Miranda74 (Seção 3.2.3: Derivadas laterais)

2eT70 (p.11) Dicas que eu preparei em 2022.1

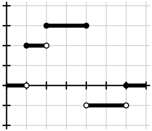
Exercício 2.

Seja $f(x) =$  .

Note que:
$\int_{x=1}^{x=2} f(x)\,dx = 2\cdot(2-1)$,
$\int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx = 3\cdot(4-3)$,
$\int_{x=4}^{x=6} f(x)\,dx = -1\cdot(6-4)$,

Calcule:
a) $\int_{x=1.5}^{x=2} f(x)\,dx$
b) $\int_{x=2}^{x=4} f(x)\,dx$
c) $\int_{x=1.5}^{x=4} f(x)\,dx$
d) $\int_{x=1.5}^{x=6} f(x)\,dx$

Exercício 3.

Sejam $f(x) =$ 

e $F(\beta) = \int_{x=2}^{x=\beta} f(x)\,dx$.

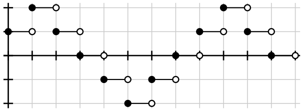
a) Calcule $F(2), F(2.5), F(3), \ldots, F(6)$.
b) Calcule $F(1.5), F(1), F(0.5), F(0)$.

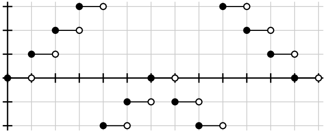
Exercício 4.
No exercício 3 você obteve alguns valores da função $F(\beta)$, mas não todos... por exemplo, você *ainda* não calculou $F(2.1)$.

a) Desenhe num gráfico só todos os pontos $(x, F(x))$ que você calculou nos itens (a) e (b) do exercício 3.
Dica: o conjunto que você quer desenhar é este aqui:
$\{(0, F(0)),\ (0.5, F(0.5)), \ldots, (6, F(6))\}$.

b) Tente descobrir — lendo os próximos slides, assitindo o vídeo, e discutindo com os seus colegas — qual é o jeito certo de ligar os pontos do item (a).

Exercício 5.
Sejam:

$f(x) =$  ,

$g(x) =$  .

Faça os gráficos destas funções:

a) $F(x) = \int_{t=0}^{t=x} f(t)\,dt$

b) $G(x) = \int_{t=3}^{t=x} g(t)\,dt$

Algumas propriedades da integral

As três propriedades mais básicas da integral definida são estas:

$$\begin{array}{rcll}
k \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &=& \int_{x=a}^{x=b} k f(x)\,dx & (*) \\
\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx &=& \int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx & (**) \\
\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &=& -\int_{x=b}^{x=a} f(x)\,dx & (***) \\
\int_{x=a}^{x=b} k\,dx &=& k(b-a) & (****)
\end{array}$$

O melhor modo da gente visualizar o que esses propriedades "querem dizer" é comparando a fórmula pro caso geral com casos particulares. Olhe pra figura à direita; ela compara a $(*)$ com dois casos particulares dela – primeiro um caso "normal", em que $k=2$, e depois um caso "estranho" em que $k=-1$...

No caso "estranho" aparecem uns números negativos, ó:

$$\underbrace{(-1)\cdot\underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx}_{>0}}_{<0} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=4}(-1)\cdot f(x)\,dx}_{<0}$$

...e uma figura que tem "área negativa"!!!

Eu acho a abordagem do Mathologer genial – ele começa dizendo que a distância percorrida é a área (ou a integral) da velocidade, e com isso vários casos estranhos em que aparecem números negativos *começam* a fazer sentido.

Slogan: a gente quer que as quatro propriedades acima valham sempre – tanto nos casos "normais" quanto nos casos "estranhos".

$$(*):\qquad k \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} k f(x)\,dx$$

$$(*)\begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=4 \\ k:=2 \end{bmatrix}:\qquad 2\cdot\underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} 2\cdot f(x)\,dx}$$

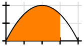
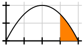
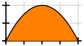
$$(*)\begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=4 \\ k:=-1 \end{bmatrix}:\qquad (-1)\cdot\underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=4}(-1)\cdot f(x)\,dx}$$

Links pros livros:
StewPtCap5p22 (p.343)
Leit5p48 (p.331)
MirandaP220

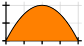
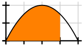
A motivação pro $(***)$ é isso aqui:

$$(**) : \quad \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx$$

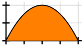
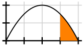
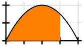
$$(**)\begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=3 \\ c:=4 \end{bmatrix} : \quad \underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx} + \underbrace{\int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx}$$

$$(**)\begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=4 \\ c:=3 \end{bmatrix} : \quad \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx} + \underbrace{\int_{x=4}^{x=3} f(x)\,dx}_{???} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx}$$

$$\underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx} - \underbrace{\int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx}$$

“Quase retângulos”

A quarta propriedade é essa aqui:

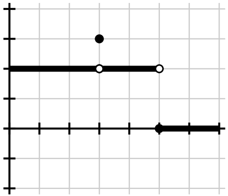
$$\int_{x=a}^{x=b} k\,dx \quad = \quad k(b-a) \quad (****)$$

A gente quer que ela valha pra todos os valores de k, a e b – incluindo os casos em que k é negativo, que são “retângulos com altura negativa” e pros casos que $a > b$, que são “retângulos que têm base negativa”...

...e além disso a gente quer que ela valha pra casos como o da figura da direita, em que entre $x = 2$ e $x = 5$ o mathologermóvel anda com velocidade constante, 2, exceto em dois instantes – repare que no gráfico a gente tem $f(3) = 3$ e $f(5) = 0$...

Vamos pensar em termos de velocidades e distâncias. Entre $x = 2$ e $x = 5$ o mathologermóvel andou sempre com velocidade 2, exceto por dois instantes de um buzilionésimo de segundo cada um, em que ele andou com velocidades diferentes de 2... esses instantes mudam tão pouco a distância percorrida que a gente vai considerar que eles não mudam a distância percorrida.

$f(x) \;=$



$$\begin{aligned} \int_{x=2}^{x=5} f(x)\,dx &= \int_{x=2}^{x=5} 2\,dx \\ &= 2\cdot(5-2) \\ &= 2\cdot 3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Cálculo 2 - 2023.2

Aulas 3, 4 e 5: contas com justificativas

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2023.2-C2.html

Links

2hQ5 Quadros da aula 3 (4a 30/ago)
2hQ7 Quadros da aula 4 (2a 04/set)
2hQ10 Quadros da aula 5 (3a 05/set)

CalcEasy11:35 até 12:47: vídeo sobre o macaco derivador

StewPtCap3p5 (p.158) Derivada de uma função constante
StewPtCap3p5 (p.158) A Regra da Potência
StewPtCap3p7 (p.160) A Regra da Potência (versão geral)
StewPtCap3p8 (p.161) A Regra da Multiplicação por Constante
StewPtCap3p8 (p.161) A Regra da Soma
StewPtCap3p14 (p.167) A Regra do Produto
Stew2p31 (p.131) Example 6

Visaud01:00 até 02:52 "é óbvio sim"
Visaud37:17 até 46:06 reduzir e aumentar o nível de detalhe
Visaud48:53 até o final: vários níveis de detalhe lado a lado

Links da aula 4 (2023sep04):
CalcEasy11:35 até 20:22: o macado derivador
2gT33 Material do semestre passado
StewPtCap3p26 (p.179) 3.4 A regra da cadeia
StewPtCap5p33 (p.354) O TFC2
StewPtCap5p36 (p.357) Exercícios sobre TFC2 (fazer do 19 ao 28)

Links da aula 6 (2023sep06):
StewPtCap5p23 (p.344) Propriedades da integral definida
StewPtCap5p39 (p.360) Integral indefinida
StewPtCap5p40 (p.361) Propriedades da integral indefinida
StewPtCap5p44 (p.365) Faça os exercícios 2 e 5 daqui
StewPtCap7p5 (p.420) Integração por partes

Como estudar funções

Você lembra de quando você aprendeu a fazer “contas com letras” na escola? Você levou centenas de horas de estudo e desespero – né? – pra entender como é que letras como x e y podiam fazer o papel de números desconhecidos cujos valores você quer descobrir e como é que letras como a e b podiam fazer o papel de números quaisquer... e você teve que reler muitas vezes tudo que você já tinha visto sobre soma, multiplicação, etc, pra entender essas operações de um jeito novo – antes elas eram operações que somavam e multiplicavam números conhecidos e concretos, depois elas passaram a ser operações que também eram capazes de somar e multiplicar expressões com letras...

Agora a gente vai ter que fazer algo parecido, mas agora pra funções. Em algumas situações as letras f e g vão representar funções que a gente quer descobrir, em outras situações f e g vão representar funções “quaisquer” (abstratas), em outras situações f e g vão representar funções que a gente conhece os gráficos delas mas que a gente não tem uma expressão “algébrica” que calcule os valores delas... e pra entender isso direito você vai ter que reler tudo que você já viu sobre operações com funções pra entender aquelas operações de um jeito novo, como operações que funcionam tanto pra expressões em que f e g são funções “concretas” como nos casos em que f e g são funções “abstratas”...

Muita gente acha que essa coisa de lidar com funções abstratas “é simples”, no sentido de que um dia você vai ler a explicação certa ou assistir o vídeo certo e *plim*, de um momento pro outro você vai se transformar em outra pessoa, vai deixar de ser a pessoa que achava isso difícil e vai virar a pessoa que acha isso fácil. NÃO É ASSIM... pra lidar com funções “abstratas” você vai ter que aprender centenas de detalhes, vai ter que aprender eles aos poucos, e eu nem sei quais são os livros que têm explicações mais ou menos completas sobre isso – eu tentei perguntar pra vários amigos matemáticos, por exemplo nessa série de reuniões onlines aqui, Sapt, e ninguém sabe onde tem material sobre isso... em teoria isso é algo anterior a Pré-Cálculo/Cálculo 0, que as pessoas deveria aprender no Ensino Médio mas que hoje em dia não aprendem mais.

Dicas:

1. Os músculos mentais que você exercita quando você lê algo ou assiste alguém falando são diferentes dos que você exercita quando você escreve as suas idéias, quando você relê o que você escreveu, e quando você reescreve de um jeito melhor o que você escreveu. O slogan/historinha sobre isto está aqui: 2gT22.

2. O melhor modo de estudar é escrever todas as suas hipóteses – até porque na maior parte dos casos só quem vai ler elas são os personagens (a) e (b) da Dica 7: 2gT4.

3. Leia o post da Ana Letícia de Fiori: 2gT18.

4. Tem um trecho do vídeo sobre slogans que é sobre indicar graus de certeza – leia as legendas dele. Ele vai de Slogans33:35 até 36:36.

5. Os livros de Cálculo 2 não definem precisamente a notação matemática que eles usam – você vai ter que aprender a notação certa por tentativa e erro, escrevendo as suas idéias do melhor modo que você conseguir e depois comparando a sua notação com as dos livros. Veja o slide 2gT7 sobre “A linguagem formal de Cálculo 2” e depois leia todos os slides de 2gT5 até 2gT10.

6. Pra muitas as pessoas a parte mais difícil do curso de C2 é a parte é que elas têm que aprender a usar “partículas em português”, como “se”, “então”, “queremos que”, “vamos testar se”, etc... e se elas não souberem usar essas partículas direito as contas delas vão ficar não só ambíguas como também erradas. Não deixe pra aprender isso na última hora, porque NÃO DÁ! Comece a prestar atenção nas partículas em português desde agora!!! As dicas pra P2 do semestre passado estão aqui, 2gT126, e tem um exemplo de uso dessas partículas no anexo da P2, aqui: 2gT138.

"Example 6"

De: Stew2p31 (p.131)

$$\begin{array}{rcl}
F(x) & = & (6x^3)(7x^4) \\
F'(x) & = & (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\frac{d}{dx}(6x^3) \\
& = & (6x^3)(28x^3) + (7x^4)(18x^2) \\
& = & 168x^6 + 126x^6 \\
& = & 294x^6
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
[\text{RC}] & = & \left(\frac{d}{dx}c = 0\right) & \text{Veja StewPtCap3p5} \\
[\text{RPot}] & = & \left(\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}\right) & \text{Veja StewPtCap3p7} \\
[\text{RMC}] & = & \left(\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}f(x)\right) & \text{Veja StewPtCap3p8} \\
[\text{RSoma}] & = & \left(\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)\right) & \text{Veja StewPtCap3p5} \\
[\text{RProd}] & = & \left(\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)\right) & \text{Veja StewPtCap3p14}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
F(x) & = & (6x^3)(7x^4) & \\
F'(x) & = & ((6x^3)(7x^4))' & \\
& = & \frac{d}{dx}((6x^3)(7x^4)) & \\
& = & (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\frac{d}{dx}(6x^3) & \text{Por [RProd] com } f(x) = 6x^3, g(x) = 7x^4 \\
& = & (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\cdot 6\frac{d}{dx}x^3 & \text{Por [RMC] com } c = 6, f(x) = x^3 \\
& = & (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\cdot 6\cdot 3x^2 & \text{Por [RPot] com } n = 3 \\
& = & (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)(18x^2) & \\
& = & (6x^3)\cdot 7\frac{d}{dx}x^4 + (7x^4)(18x^2) & \text{Por [RMC] com } c = 7, f(x) = x^4 \\
& = & (6x^3)\cdot 7\cdot 4x^3 + (7x^4)(18x^2) & \text{Por [RPot] com } n = 4 \\
& = & (6x^3)(28x^3) + (7x^4)(18x^2) & \\
& = & (6x^3)(28x^3) + 126x^6 & \\
& = & 168x^6 + 126x^6 & \\
& = & 294x^6 &
\end{array}$$

O que quer dizer “Por ... com ...”?

$$
\begin{array}{rcll}
F(x) & = & (6x^3)(7x^4) & \\
F'(x) & = & ((6x^3)(7x^4))' & \\
 & = & \boxed{\frac{d}{dx}((6x^3)(7x^4))} & \\
 & \boxed{=} & \boxed{(6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\frac{d}{dx}(6x^3)} & \text{Por [RProd] com } \boxed{f(x)} = \boxed{6x^3}, \boxed{g(x)} = \boxed{7x^4} \\
 & = & (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\cdot 6\frac{d}{dx}x^3 & \text{Por [RMC] com } c = 6, f(x) = x^3 \\
 & = & (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\cdot 6 \cdot 3x^2 & \text{Por [RPot] com } n = 3 \\
 & = & (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)(18x^2) & \\
 & = & (6x^3)\cdot 7\frac{d}{dx}x^4 + (7x^4)(18x^2) & \text{Por [RMC] com } c = 7, f(x) = x^4 \\
 & = & (6x^3)\cdot 7 \cdot 4x^3 + (7x^4)(18x^2) & \text{Por [RPot] com } n = 4 \\
 & = & (6x^3)(28x^3) + (7x^4)(18x^2) & \\
 & = & (6x^3)(28x^3) + 126x^6 & \\
 & = & 168x^6 + 126x^6 & \\
 & = & 294x^6 &
\end{array}
$$

Compare: nós definimos [RProd] como esta igualdade,

$$
\text{[RProd]} \quad = \quad \left(\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)\right)
$$

e se substituirmos $f(x)$ por $6x^3$ e $g(x)$ por $7x^4$ na igualdade [RProd] nós obtemos isto aqui,

$$
\begin{array}{lcl}
\text{[RProd]} & = & \left(\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)\right) \\
\text{[RProd]}\begin{bmatrix} \boxed{f(x)} := \boxed{6x^3} \\ \boxed{g(x)} := \boxed{7x^4} \end{bmatrix} & = & \left(\boxed{\frac{d}{dx}((6x^3)(7x^4))} \boxed{=} \boxed{(6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\frac{d}{dx}(6x^3)}\right)
\end{array}
$$

que é exatamente a igualdade que eu marquei lá em cima...

O que quer dizer "Por ... com ..."? (2)

$$
\begin{array}{rcll}
F(x) & = & (6x^3)(7x^4) & \\
F'(x) & = & ((6x^3)(7x^4))' & \\
& = & \frac{d}{dx}((6x^3)(7x^4)) & \\
& = & (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\frac{d}{dx}(6x^3) & \text{Por [RProd] com } f(x) = 6x^3, g(x) = 7x^4 \\
& = & (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4) \cdot 6\frac{d}{dx}x^3 & \text{Por [RMC] com } c = 6, f(x) = x^3 \\
& = & (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4) \cdot 6 \cdot 3x^2 & \text{Por [RPot] com } n = 3 \\
& = & (6x^3)\boxed{\frac{d}{dx}(7x^4)} + (7x^4)(18x^2) & \\
& \boxed{=} & (6x^3) \cdot \boxed{7\frac{d}{dx}x^4} + (7x^4)(18x^2) & \text{Por [RMC] com } \boxed{c} = \boxed{7}, \boxed{f(x)} = \boxed{x^4} \\
& = & (6x^3) \cdot 7 \cdot 4x^3 + (7x^4)(18x^2) & \text{Por [RPot] com } n = 4 \\
& = & (6x^3)(28x^3) + (7x^4)(18x^2) & \\
& = & (6x^3)(28x^3) + 126x^6 & \\
& = & 168x^6 + 126x^6 & \\
& = & 294x^6 &
\end{array}
$$

Lembre que a "regra da multiplicação por constante" é esta igualdade aqui,

$$
[\text{RMC}] \quad = \quad \left(\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}f(x) \right)
$$

e se substituirmos c por 7 e $f(x)$ por x^4 nela nós obtemos isto aqui,

$$
\begin{array}{rcl}
[\text{RMC}] & = & \left(\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}f(x) \right) \\
[\text{RMC}] \begin{bmatrix} \boxed{c} := \boxed{7} \\ \boxed{f(x)} := \boxed{x^4} \end{bmatrix} & = & \left(\boxed{\frac{d}{dx}(7x^4)} \boxed{=} \boxed{7\frac{d}{dx}x^4} \right)
\end{array}
$$

O '$\boxed{=}$' logo acima desta frase justifica a parte que muda no '$\boxed{=}$' lá de cima!

Integração por chutar-e-testar

Por exemplo, digamos que queremos resolver isto aqui:

$$\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x \, dx = {\color{red}?}$$

Eu começaria por estes chutes,

$$\begin{array}{lcl}
{\color{red}[\mathrm{TFC2}]} & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx = f(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
{\color{red}[\mathrm{TFC2}]}\,\big[f(x) := 42\big] & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx = 42\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
{\color{red}[\mathrm{TFC2}]}\,\big[f'(x) := 99\big] & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} 99\,dx = f(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
{\color{red}[\mathrm{TFC2}]}\begin{bmatrix} f(x) := \operatorname{sen} x \\ f'(x) := \cos x \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \cos x\,dx = (\operatorname{sen} x)\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
{\color{red}[\mathrm{TFC2}]}\begin{bmatrix} f(x) := \operatorname{sen} 4x \\ f'(x) := 4\cos 4x \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} 4\cos 4x\,dx = (\operatorname{sen} 4x)\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
{\color{red}[\mathrm{TFC2}]}\begin{bmatrix} f(x) := \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x \\ f'(x) := \cos 4x \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \cos 4x\,dx = \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right)\Bigg|_{x=a}^{x=b} \right) \\
{\color{red}[\mathrm{TFC2}]}\begin{bmatrix} f(x) := \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x \\ f'(x) := \cos 4x \\ a := 0 \\ b := \pi/2 \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x\,dx = \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi/2} \right)
\end{array}$$

...e depois eu faria isto aqui:

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x\,dx & \overset{(1)}{=} & \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi/2} \\
& = & \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4\cdot 0\right) \\
& = & \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\pi\right) - \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 0\right) \\
& = & \left(\frac{1}{4}\cdot 0\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot 0\right) \\
& = & 0
\end{array}$$

A justificativa pra igualdade '$\overset{(1)}{=}$' acima é a última substituição da coluna da esquerda. Eu raramente escrevo todas as substituições da coluna da esqueda explicitamente, mas elas são *praticamente* o método que eu uso pra encontrar a substituição certa de cabeça...

Integração por chutar-e-testar (2)

Na verdade o método que eu uso pra encontrar a substituição que resolve esta integral definida,

$$\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x\,dx = \color{red}{?}$$

é este aqui...

$$\begin{array}{lcl}
\color{red}{[\mathrm{TFC2}]} & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx = f(x)\big|_{x=a}^{x=b}\right) \\
\color{red}{[\mathrm{TFC2L}]} & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx\right) \\
\color{red}{[\mathrm{TFC2L}]}\,\big[f(x) := 42\big] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx\right) \\
\color{red}{[\mathrm{TFC2L}]}\,\big[f'(x) := 99\big] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} 99\,dx\right) \\
\color{red}{[\mathrm{TFC2L}]}\begin{bmatrix} f(x) := \operatorname{sen} x \\ f'(x) := \cos x \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} \cos x\,dx\right) \\
\color{red}{[\mathrm{TFC2L}]}\begin{bmatrix} f(x) := \operatorname{sen} 4x \\ f'(x) := 4\cos 4x \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} 4\cos 4x\,dx\right) \\
\color{red}{[\mathrm{TFC2L}]}\begin{bmatrix} f(x) := \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x \\ f'(x) := \cos 4x \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} \cos 4x\,dx\right) \\
\color{red}{[\mathrm{TFC2L}]}\begin{bmatrix} f(x) := \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x \\ f'(x) := \cos 4x \\ a := 0 \\ b := \pi/2 \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x\,dx\right) \\
\color{red}{[\mathrm{TFC2}]}\begin{bmatrix} f(x) := \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x \\ f'(x) := \cos 4x \\ a := 0 \\ b := \pi/2 \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x\,dx = \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi/2}\right)
\end{array}$$

...ou seja, eu começo encontrando a substituição certa.
Tem vários jeitos de definir o que é a "substituição certa".
Um jeito é dizer que a substituição que resolve esta problema aqui

$$\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x\,dx = \color{red}{?}$$

é a que obedece isto:

$$\color{red}{[\mathrm{TFC2L}]}\begin{bmatrix} f(x) := \color{red}{?} \\ f'(x) := \color{red}{?} \\ a := \color{red}{?} \\ b := \color{red}{?} \end{bmatrix} = \left(\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x\,dx\right)$$

Um outro jeito é a gente começar aprendendo os métodos que o Stewart ensina, e depois a gente escrever isto aqui:

$$\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x\,dx = \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi/2}$$

A "substituição certa" é a que a gente usa pra justificar essa igualdade.
A justificativa dessa igualdade "Pelo [TFC2], com ...", e a "substituição certa" é o que vem depois do "com".

Todos os livros de Cálculo 2 que eu conheço supõem que os leitores são muito bons em "aplicar fórmulas complicadas em casos complicados"... Esse método super passo-a-passo de encontrar a substituição certa e aplicá-la é algo que eu inventei pra ajudar pessoas que tinham dificuldade com problemas de "aplicar fórmulas complicadas em casos complicados" – e eu só tive que inventar ele porque eu não encontrei nenhum livro que ensinasse como "aplicar fórmulas complicadas em casos complicados".
Se você conhecer algum livro ou vídeo que ensine técnicas pra isso, PELAMORDEDEUS ME MOSTRE!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

Cálculo C2 - 2023.2

Aulas 6 e 7: integração por partes e exercícios
de como estruturar contas e demonstrações

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.2-C2.html

Links

StewPtCap5p39 (p.360) 5.4 Integrais Indefinidas
StewPtCap5p48 (p.369) 5.5 A Regra da Substituição
StewPtCap7p5 (p.420) 7.1 Integração por Partes

2hQ10 Quadros da aula 5 (3a, 05/set/2023)
2hQ12 Quadros da aula 6 (4a, 06/set/2023)
2hQ18 Quadros da aula 7 (2a, 11/set/2023)

2gT10 Justificativas
2gT117 $\int_{t=a}^{t=x} f(t)\,dt$ no olhômetro
Leit2p15 (p.68): Dois exemplos de contas com justificativas

CalcEasy14:08 até 18:18: como o macaco deriva funções elementares
2fQ1 Quadros de 2022.2 sobre árvores

2fT23 Outra definição para integral indefinida
2fT26 Integração por partes em 2022.2: pedaços do quadro
2fT30 Exercícios pra casa

2gQ18 Quadros da aula 9 de 2023.1 (02/mai/2023)

Avisos

Dá pra acessar a P1 do semestre passado, e as dicas pra ela, aqui:

2gT107 (2023.1) Dicas pra P1
2gT109 (2023.1) P1

A P1 deste semestre vai ter pelo menos uma questão de integração por mudança de variável e vai ter uma questão de frações parciais. Ela não vai ter uma questão de integração por partes porque eu vou considerar que integração por partes é uma técnica de integração que serve principalmente pra preparar a gente pra aprender técnicas mais complicadas.
Vocês podem estudar técnicas de integração por estes dois capítulos do Stewart:

StewPtCap5 Integrais
StewPtCap7 Técnicas de integração

Depois vou colocar aqui os links pras seções mais importantes.

Segundo o cronograma no plano de curso era pra eu ter apresentado frações parciais na última aula (6/set), mas eu não consegui. A gente vai deixar pra aprender frações parciais depois de mudança de variável.

Estudem pelo livro!!! O que a gente vai ver nas próximas aulas são coisas que complementam o livro e que vão ajudar vocês a não errarem nas questões da prova.

Integração por partes: um exemplo

Lembre que o Mathologer diz no vídeo dele que o melhor modo da gente aprender Cálculo é começar escrevendo idéias que a gente acha que devem ser verdade, e depois a gente vê se elas dão resultados certos e se elas fazem sentido... e se fizerem sentido a gente tenta formalizar elas.

Ele também diz – a partir daqui, na "lombada número 1",

CalcEasy20:27

que a integral é a inversa da derivada, mas que $\int \cos x\,dx$ pode retornar tanto $\operatorname{sen} x$ quanto $42+\operatorname{sen} x$. As contas à direita são bem improvisadas, mas como eu indiquei em cima que elas são só uma idéia que pode estar cheia de erros o "colega que seja menos meu amigo" não vai poder reagir deste jeito aqui...

2gT20

Exercício 0:
Calcule $\frac{d}{dx}(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x)$.

Idéia (que pode estar cheia de erros):

$$\begin{array}{rcll}
(gh)' & \overset{(1)}{=} & g'h + gh' & \text{por [DProd]} \\
\int (gh)'\,dx & \overset{(2)}{=} & \int g'h + gh'\,dx & \\
gh & \overset{(3)}{=} & \int g'h + gh'\,dx & \\
 & \overset{(4)}{=} & \int g'h\,dx + \int gh'\,dx & \text{por [IISoma]} \\
gh & \overset{(5)}{=} & \int g'h\,dx + \int gh'\,dx & \text{por 3 e 4} \\
gh - \int g'h\,dx & \overset{(6)}{=} & \int gh'\,dx & \text{por 5} \\
\int gh'\,dx & \overset{(7)}{=} & gh - \int g'h\,dx & \text{por 6} \\
\int xe^x\,dx & \overset{(8)}{=} & xe^x - \int 1\cdot e^x\,dx & \text{por 7 com } \left[\begin{smallmatrix} g:=x \\ h:=e^x \end{smallmatrix}\right] \\
 & \overset{(9)}{=} & xe^x - \int e^x\,dx & \\
 & \overset{(10)}{=} & xe^x - e^x & \text{por } (e^x)' = e^x \\
\int xe^x\,dx & \overset{(11)}{=} & xe^x - e^x & \text{por 8, 9 e 10} \\
\int x^2e^x\,dx & \overset{(12)}{=} & x^2e^x - \int 2xe^x\,dx & \text{por 7 com } \left[\begin{smallmatrix} g:=x^2 \\ h:=e^x \end{smallmatrix}\right] \\
 & \overset{(13)}{=} & x^2e^x - 2\int xe^x\,dx & \text{por [IIMC]} \\
 & \overset{(14)}{=} & x^2e^x - 2(xe^x - e^x) & \text{por 11} \\
 & \overset{(15)}{=} & x^2e^x - 2xe^x + 2e^x &
\end{array}$$

Três provas da regra da integral da soma

$$\begin{array}{rrcl}
\text{Sejam:} & \text{[DSoma]} & = & ((f+g)' = f'+g')\,, \\
 & \text{[II]} & = & (\int f'\,dx = f)\,, \\
 & \text{[IISoma]} & = & (\int f+g\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx) \\
\text{e:} & \text{[TFC1]} & = & \left(\left(\int_{t=a}^{t=x} f(t)\,dt\right)' = f(x)\right), \\
\text{Queremos ver que} & \int f+g\,dx & = & \int f\,dx + \int g\,dx.
\end{array}$$

Compare esta prova aqui, que é bem passo a passo
e que tem justificativas bem detalhadas,

$$\begin{array}{rrcll}
\text{Digamos que} & F' & \overset{(1)}{=} & f & \\
\text{e} & G' & \overset{(2)}{=} & g. & \\
\text{Então} & (F+G)' & \overset{(3)}{=} & F'+G' & \text{por [DSoma]} \left[\begin{smallmatrix} f:=F' \\ g:=G' \end{smallmatrix}\right] \\
 & & \overset{(4)}{=} & f+G' & \text{por 1} \\
 & & \overset{(5)}{=} & f+g, & \text{por 2} \\
 & (F+G)' & \overset{(6)}{=} & f+g, & \text{por 3, 4 e 5} \\
 & \int f\,dx & \overset{(7)}{=} & \int F'\,dx & \text{por 1} \\
 & & \overset{(8)}{=} & F, & \text{por [II]} \left[\begin{smallmatrix} f:=F \\ f':=F' \end{smallmatrix}\right] \\
 & \int f\,dx & \overset{(9)}{=} & F, & \text{por 7 e 8} \\
 & \int g\,dx & \overset{(10)}{=} & \int G'\,dx & \text{por 2} \\
 & & \overset{(11)}{=} & G, & \text{por [II]} \left[\begin{smallmatrix} f:=G \\ f':=G' \end{smallmatrix}\right] \\
 & \int g\,dx & \overset{(12)}{=} & G, & \text{por 10 e 11} \\
 & \int f+g\,dx & \overset{(13)}{=} & \int (F+G)'\,dx & \text{por 6} \\
 & & \overset{(14)}{=} & F+G & \text{por [II]} \left[\begin{smallmatrix} f:=F+G \\ f':=(F+G)' \end{smallmatrix}\right] \\
 & & \overset{(15)}{=} & \int f\,dx + G & \text{por 9} \\
 & & \overset{(16)}{=} & \int f\,dx + \int g\,dx & \text{por 12} \\
 & \int f+g\,dx & \overset{(17)}{=} & \int f\,dx + \int g\,dx & \text{por 13, 14, 15, 16}
\end{array}$$

...com esta outra aqui,

$$\begin{array}{rrcll}
\text{Digamos que} & F' & \overset{(1)}{=} & f & \\
\text{e} & G' & \overset{(2)}{=} & g. & \\
\text{Então} & (F+G)' & \overset{(3)}{=} & F'+G' & \text{por [DSoma]} \\
 & & \overset{(4)}{=} & f+g, & \text{por 1 e 2} \\
 & \int f\,dx & \overset{(5)}{=} & F, & \text{por 1 e [II]} \\
 & \int g\,dx & \overset{(6)}{=} & G, & \text{por 2 e [II]} \\
 & \int f+g\,dx & \overset{(7)}{=} & \int (F+G)'\,dx & \text{por 3 e 4} \\
 & & \overset{(8)}{=} & F+G & \text{por [II]} \\
 & & \overset{(9)}{=} & \int f\,dx + \int g\,dx & \text{por 5 e 6}
\end{array}$$

e com esta aqui:

$$\begin{array}{rrcll}
\text{Sabemos que} & \left(\int_{t=a}^{t=x} f(t)\,dt\right)' & \overset{(1)}{=} & f(x) & \text{por [TFC1]} \\
\text{e} & \left(\int_{t=a}^{t=x} g(t)\,dt\right)' & \overset{(2)}{=} & g(x). & \text{por [TFC1]} \\
\text{Sejam:} & F(x) & \overset{(3)}{=} & \int_{t=a}^{t=x} f(t)\,dt, & \\
 & G(x) & \overset{(4)}{=} & \int_{t=a}^{t=x} g(t)\,dt. & \\
\text{Então:} & F' & \overset{(5)}{=} & f, & \text{por 1 e 3} \\
 & G' & \overset{(6)}{=} & g, & \text{por 2 e 4} \\
 & (F+G)' & \overset{(7)}{=} & F'+G' & \text{por [DSoma]} \\
 & & \overset{(8)}{=} & f+g, & \text{por 5 e 6} \\
 & \int f\,dx & \overset{(9)}{=} & F, & \text{por 5 e [II]} \\
 & \int g\,dx & \overset{(10)}{=} & G, & \text{por 6 e [II]} \\
 & \int f+g\,dx & \overset{(11)}{=} & \int (F+G)'\,dx & \text{por 7 e 8} \\
 & & \overset{(12)}{=} & F+G & \text{por [II]} \\
 & & \overset{(13)}{=} & \int f\,dx + \int g\,dx & \text{por 9 e 10.}
\end{array}$$

"Escreva as justificativas"

Lembre que eu chamei a regra da multiplicação por constante na derivada de [DMC] e a regra da soma na derivada de [DSoma]. Vou usar estes nomes curtos aqui pra regra da multiplicação por constante na integral indefinida e pra regra da soma na integral indefinida:

$$\begin{array}{rcl} \text{[IIMC]} & = & \left(\int cf\,dx = c\int f\,dx\right) \\ \text{[IISoma]} & = & \left(\int f+g\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx\right) \end{array}$$

Nos exercícios 1 e 2 abaixo o contexto vai ser este aqui:

$$\begin{array}{rrcl} \text{Sejam:} & \text{[DMC]} & = & ((cf)' = cf')\,, \\ & \text{[II]} & = & \left(\int f'\,dx = f\right), \\ \text{e:} & \text{[TFC1]} & = & \left(\left(\int_{t=a}^{t=x} f(t)\,dt\right)' = f(x)\right). \\ \text{Queremos ver que} & \int cf\,dx & = & c\int f\,dx. \end{array}$$

Exercício 1.
Escreva as justificativas "completas" de cada passo da demonstração abaixo – aliás, só dos passos que têm um "por ..." à direita. Uma justificativa "completa" é uma em que a gente diz as substituições, como aqui: [II] $\left[\begin{smallmatrix} f:=42h \\ f':=42h' \end{smallmatrix}\right]$.

$$\begin{array}{rrcll} \text{Digamos que} & F' & \overset{(1)}{=} & f. & \\ \text{Então:} & \int F'\,dx & \overset{(2)}{=} & F, & \text{por ...} \\ & \int f\,dx & \overset{(3)}{=} & F, & \text{por ...} \\ & (cF)' & \overset{(4)}{=} & cF' & \text{por ...} \\ & & \overset{(5)}{=} & cf, & \text{por ...} \\ & (cF)' & \overset{(6)}{=} & cf, & \text{por ...} \\ & \int cf\,dx & \overset{(7)}{=} & \int (cF)'\,dx & \text{por ...} \\ & & \overset{(8)}{=} & cF & \text{por ...} \\ & & \overset{(9)}{=} & c\int f\,dx & \text{por ...} \\ & \int cf\,dx & \overset{(10)}{=} & c\int f\,dx & \text{por ...} \end{array}$$

Exercício 2.
Escreva as justificativas dos passos que têm um "por ..." na demonstração abaixo. Aqui você não precisa escrever as substituições – você pode escrever "por [II]" ao invés de "por [II] $\left[\begin{smallmatrix} f:=42h \\ f':=42h' \end{smallmatrix}\right]$".

$$\begin{array}{rrcll} \text{Sabemos que} & \left(\int_{t=a}^{t=x} f(t)\,dt\right)' & \overset{(1)}{=} & f(x) & \text{por ...} \\ \text{Seja} & F(x) & \overset{(2)}{=} & \int_{t=a}^{t=x} f(t)\,dt. & \\ \text{Então:} & F' & \overset{(3)}{=} & f, & \text{por ...} \\ & (cF)' & \overset{(4)}{=} & cf, & \text{por ...} \\ & \int cf\,dx & \overset{(5)}{=} & cF & \text{por ...} \\ & & \overset{(6)}{=} & c\int f\,dx & \text{por ...} \end{array}$$

“Escreva as justificativas” (2)

É muito comum os livros escreverem demonstrações de um jeito super curto e super difícil de entender. As duas técnicas mais básicas pra gente decifrar essas demonstrações super curtas são 1) testar casos particulares e 2) reescrever elas com mais passos de modo que cada passo da versão expandida fique fácil de justificar. Nos exercícios desta página você vai exercitar a técnica (2).

Uma das fórmulas mais úteis – e mais difíceis de entender – de Cálculo 2 é essa aqui, a da mudança de variável na integral indefinida:

$$[\text{MVI}] \;=\; \left(\int f(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int f(u)\,du\right)$$

Ela tem uma demonstração curta que eu levei mais de 20 anos pra entender e uma demonstração mais comprida em que os passos são bem mais fáceis de justificar. O Stewart e o Miranda mostram a demonstração curta nestas páginas daqui:

StewPtCap5p48 (p.369) 5.5 A Regra da Substituição
MirandaP189 6.2 Integração por substituição

e uma versão da demonstração mais comprida nestas páginas:

MirandaP230 7.6 Integração por Substituição na Integral Definida
StewPtCap5p51 (p.372) Regra da Substituição para as integrais definidas

Você vai precisar de muitos chutes e testes pra resolver os dois exercícios desta página, e você provavelmente não vai conseguir resolvê-los num dia só... mas eles vão te ajudar com questões que vão valer muitos pontos nas provas!

Exercício 3.
Reescreva a demonstração abaixo com mais passos e com justificativas completas; repare que nela está implícito que $F' = f$. Lembre que você pode acrescentar passos no início!

$$\begin{array}{rcl}
\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\
& = & F(g(b)) - F(g(a)) \\
& = & F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\
& = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du
\end{array}$$

Exercício 4.
Faça a mesma coisa aqui:

$$\begin{array}{rcl}
\int f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x)) \\
& = & F(u) \\
& = & \int f(u)\,du
\end{array}$$

Dica: refaça os exercícios 3 e 4 várias vezes em dias diferentes até você conseguir refazê-los sem errar muito e sem demorar muito... eles vão te ajudar a entender porque é que a gente não pode misturar a variável antiga e a nova na mesma integral. Releia esta história aqui, 2gT11, trate estes exercícios como exercícios de música, e seja como o Bob!

Expandindo as contas do $\int (\operatorname{sen}\theta)^3(\cos\theta)^5\,d\theta$

$$\text{[MVI]} = \left(\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \right)$$

$$\text{[MVI]}\begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{sen} x \\ g'(x) := \cos x \end{bmatrix} = \left(\int f(\operatorname{sen} x)\cos x\,dx = \int f(u)\,du \right)$$

$$\text{[MVI]}\begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{sen} x \\ g'(x) := \cos x \\ f(u) := u^2(1-u^2)^2 \end{bmatrix} = \left(\int (\operatorname{sen} x)^3(1-(\operatorname{sen} x)^2)^2\cos x\,dx = \int u^2(1-u^2)^2\,du \right)$$

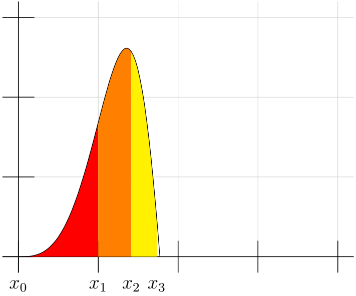
$$\text{[MVI3]} = \left(\begin{array}{rcl} \int f(g(x))g'(x)\,dx &=& F(g(x)) \\ &=& F(u) \\ &=& \int f(u)\,du \end{array} \right)$$

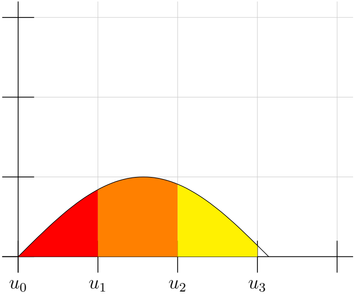
$$\text{[MVI3]}\begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{sen} x \\ g'(x) := \cos x \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int f(\operatorname{sen} x)\cos x\,dx &=& F(\operatorname{sen} x) \\ &=& F(u) \\ &=& \int f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$\text{[MVI3]}\begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{sen} x \\ g'(x) := \cos x \\ f(u) := u^2(1-u^2)^2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int (\operatorname{sen} x)^3(1-(\operatorname{sen} x)^2)^2\cos x\,dx &=& F(\operatorname{sen} x) \\ &=& F(u) \\ &=& \int u^2(1-u^2)^2\,du \end{array} \right)$$

Uma figura pra mudança de variável

$$\begin{aligned} x^2 &= u \\ \int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx &= \int_{u=a^2}^{u=b^2} \operatorname{sen} u\,du \end{aligned}$$





O macaco e as contas formais

Na aula de 25/abril nós passamos muito tempo revendo coisas que deveriam ser básicas – já vou dizer quais – e eu passei um dever de casa bem grande: *leia o que você conseguir das seções do Miranda e do Leithold sobre a regra da cadeia e faça todos os exercícios que você puder.* Aqui tem links pra elas:

Miranda87 Seção 3.5: regra da cadeia
Miranda228 Seção 7.5.1: TFC2
Leit3p45 (p.181) Seção 3.6: regra da cadeia
Leit5p61 (p.344) Seção 5.8: Os teoremas fundamentais do Cálculo

Lembre que: 1) um dos objetivos do curso é fazer vocês se tornarem capazes de estudar pelos livros, 2) as provas vão ter várias questões que vocês só vão conseguir fazer se vocês tiverem muita prática de fazer contas, e 3) o livro do Leithold é difícil em alguns lugares mas ele é INCRIVELMENTE bom – estudem por ele sempre que puderem!

Outra coisa: dê uma olhada na seção do Miranda sobre a regra da cadeia – você vai ver que essa fórmula tem uma demonstração, e que a fórmula e a demonstração só funcionam quando certas hipóteses são obedecidas. Aliás, uma questão da P1 do semestre passado foi sobre situações em que a fórmula do TFC2 dá resultados errados. Dê uma olhada nela:

2fT110 A fórmula do TFC2 nem sempre vale

A P1 deste semestre vai ter uma questão parecida com essa.

Em algumas situações nós vamos primeiro aplicar a fórmula como se ela valesse sempre, e só depois que nós fizermos todas as contas nós vamos descobrir quais são as hipóteses necessárias pra aquelas contas valerem. O nome "oficial" pra essas contas sem a verificação das hipóteses é "contas formais", mas eu vou usar a terminologia do Mathologer... ele fala muito no macaco que faz contas automaticamente sem fazer a menor idéia do que aquelas contas querem dizer, então eu vou usar expressões como "aqui vamos fazer contas como o macaco".

Exercício
Use o que você lembra de Cálculo 1 pra obter boas fórmulas pras derivadas abaixo:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \frac{d}{dx}\, e^{g(x)} \\ \text{b)} & \frac{d}{dx}\, g(x)^{1/2} \\ \text{c)} & \frac{d}{dx}\, \sqrt{g(x)} \\ \text{c)} & \frac{d}{dx}\, f(4x) \end{array}$$

No próximo slide nós vamos ver como o macaco faz esssas contas usando a operação '[:=]'.

Diferença

Lembre que esta notação aqui

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$

tem várias pronúncias:
"a integral da função $f(x)$ entre $x=a$ e $x=b$",
"a área sob a curva $f(x)$ entre $x=a$ e $x=b$",
"a área sob a curva $f(x)$ desde $x=a$ até $x=b$",
etc...

A pronúncia desta operação daqui

$$f(x)\big|_{x=a}^{x=b}$$

vai ser "a diferença da $f(x)$ entre $x=a$ e $x=b$",
e a definição formal dela vai ser esta:

$$f(x)\big|_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a)$$

Exercício
O Leithold e o Miranda usam notações ligeiramente diferentes da minha para a operação diferença. Dê uma olhada nestas páginas aqui,

Leit5p65 p.348
Miranda344

e traduza a expressão

$$(\sin 2x)\big|_{x=3}^{x=4}$$

da minha notação para

a) a notação do Miranda,
b) a notação do Leithold.

Integral indefinida

Tanto o Leithold quanto o Miranda explicam a *integral indefinida* antes da *integral definida*. Dê uma olhada:

Miranda181 6. Integral Indefinida
Miranda207 7. Integração definida
Leit5p3 (p.286) 5.1. Antidiferenciação
Leit5p41 (p.324) 5.5. A integral definida
StewPtCap5p40 (p.361) A primitiva mais geral de $1/x^2$

Todos os modos fáceis de atribuir um significado intuitivo para expressões como esta aqui

$$\int f(x)\,dx$$

são gambiarras que funcionam mal.

Eu vou usar esta definição aqui,

2fT23 (p.4) Outra definição para a integral indefinida

e aqui tem um caso em que a definição usual quebra:

2fT24 (p.5) Meme: expanding brain, versão ln

Nós vamos começar usando a integral indefinida como o macaco que faz contas sem ter idéia do significado do que está fazendo, e só depois que tivermos bastante prática nós vamos discutir os vários jeitos de atribuir significados intuitivos para

A regra básica vai ser esta aqui:

$$[\text{II}] = \left(\int f'(x)\,dx = f(x) \right)$$

Exercícios

Calcule:

a) $[\text{II}] \begin{bmatrix} f(x) := x + 42 \\ f'(x) := 1 \end{bmatrix}$

b) $[\text{II}] \begin{bmatrix} f(x) := \frac{1}{2}x^2 \\ f'(x) := x \end{bmatrix}$

c) Resolva os exercícios 1 a 10 daqui por chutar e testar:
Miranda185 Exercícios 6.1

d) Entenda tudo que esta nesta página:
Leit5p6 (p.289) 5.1.8. Teorema

Outra definição pra integral indefinida

O Leithold, e a maioria dos livros, usam uma definição bem complicada pra $\int 2x\,dx$... pra eles $\int 2x\,dx$ é o conjunto de todas as 'f's que obedecem isto aqui:

$$f'(x) = 2x$$

e x^2+C é o conjunto de todas as 'g's que são "da forma x^2+C" para algum $C \in \mathbb{R}$, e pra ele esta igualdade

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

quer dizer: o conjunto de funções $\int 2x\,dx$ é igual ao conjunto de funções x^2+C.
Nós vamos usar uma outra definição pra igualdades como esta,

$$\int f(x)\,dx = g(x),$$

que é a seguinte: as três igualdades abaixo vão ser equivalentes pra nós,

$$\begin{array}{rcl} \int f(x)\,dx & \overset{?}{=} & g(x) \\ \frac{d}{dx}\int f(x)\,dx & \overset{?}{=} & g(x) \\ f(x) & \overset{?}{=} & \frac{d}{dx}g(x) \end{array}$$

Essa tradução vai servir pra qualquer igualdade com integrais, e ela vai nos permitir testar facilmente se uma igualdade com integrais é verdadeira ou não. Por exemplo, digamos que o macaco integrador do Mathologer tem estas integrais na tabela de integrais dele:

$$\begin{array}{rcl} \int x\,dx & = & \frac{1}{2}x^2+3 \\ \int 2x\,dx & = & x^2+42 \end{array}$$

Então dá pra testar esta igualdade

$$\int 2x\,dx \quad = \quad 2\int x\,dx + 99$$

assim:

$$\begin{array}{rcl} \int 2x\,dx & \overset{?}{=} & 2\int x\,dx + 99 \\ \underbrace{\frac{d}{dx}\underbrace{\int 2x\,dx}_{x^2+42}}_{2x} & \overset{?}{=} & \underbrace{\frac{d}{dx}\underbrace{(\underbrace{2\underbrace{\int x\,dx}_{\frac{1}{2}x^2+3}}_{x^2+6}+99)}_{x^2+105}}_{2x} \end{array}$$

ou seja, a igualdade acima é verdadeira — e a gente conseguiu testar isso usando números "concretos" ao invés de '$+C$'s! Yesss!!! =)

Meme: expanding brain, versão ln

Na definição do Leithold a fórmula
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ é FALSA!!!
A fórmula certa é a que aparece na
quarta linha desse meme aqui:

$$
\begin{array}{rcl}
\int \frac{1}{x}\,dx & = & \ln x \\
\int \frac{1}{x}\,dx & = & \ln|x| \\
\int \frac{1}{x}\,dx & = & \ln|x| + C \\
\int \frac{1}{x}\,dx & = & \begin{cases} \ln|x| + C_1 & \text{quando } x < 0, \\ \ln|x| + C_2 & \text{quando } x > 0 \end{cases}
\end{array}
$$

Esse vídeo aqui mostra como é que o C_1
"ajusta a altura da parte esquerda" e o C_2
"ajusta a altura da parte direita" do gráfico:

http://www.youtube.com/watch?v=u4kex7hDC2o#t=5m25s

Integração por partes

Vou usar isto, de 2022.2:
2fT25 (p.6) Pedaços do quadro

E:
Leit9 9. Técnicas de integração
Leit9p4 (p.531) 9.1. Integração por partes
Miranda182 6.1.1 Regras Básicas de Integração
Miranda199 6.3 Integração por partes

Ainda não LaTeXei as contas desta aula!
Mas os quadros dela – os sobre integração por partes – estão aqui: 2gQ20.

$$
\begin{array}{rcl}
[\text{TFC2}] & \overset{(1)}{=} & \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx = f(x)\big|_{x=a}^{x=b}\right) \\
[\text{TFC2}]\begin{bmatrix} f(x):=3 \\ f'(x):=0 \\ a:=2 \\ b:=5 \end{bmatrix} & \overset{(2)}{=} & \left(\int_{x=2}^{x=5} 0\,dx = 3\big|_{x=2}^{x=5}\right) \\
[\text{TFC2}]\begin{bmatrix} f(x):=4 \\ f'(x):=0 \\ a:=2 \\ b:=5 \end{bmatrix} & \overset{(3)}{=} & \left(\int_{x=2}^{x=5} 0\,dx = 4\big|_{x=2}^{x=5}\right) \\
3\big|_{x=2}^{x=5} & \overset{(4)}{=} & \int_{x=2}^{x=5} 0\,dx \\
& \overset{(5)}{=} & 4\big|_{x=2}^{x=5} \\
3\big|_{x=2}^{x=5} & \overset{(6)}{=} & 4\big|_{x=2}^{x=5}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
[\text{II}] & \overset{(7)}{=} & \left(\int f'(x)\,dx = f(x)\right) \\
[\text{II}]\begin{bmatrix} f(x):=3 \\ f'(x):=0 \\ a:=2 \\ b:=5 \end{bmatrix} & \overset{(8)}{=} & \left(\int 0\,dx = 3\right) \\
[\text{II}]\begin{bmatrix} f(x):=4 \\ f'(x):=0 \\ a:=2 \\ b:=5 \end{bmatrix} & \overset{(9)}{=} & \left(\int 0\,dx = 4\right) \\
3 & \overset{(10)}{=} & \int 0\,dx \\
& \overset{(11)}{=} & 4 \\
3 & \overset{(12)}{=} & 4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
[\mathrm{IIMC}_2] & = & \left(\begin{array}{rcl} \int cg'(x)\,dx & = & cg(x) \\ & = & c\int g'(x)\,dx \end{array} \right) \\
[\mathrm{IIMC}_1] & = & \left(\int cg'(x)\,dx \;=\; c\int g'(x)\,dx \right) \\
[\mathrm{IIMC}] & = & \left(\int ch(x)\,dx \;=\; c\int h(x)\,dx \right) \\
[\mathrm{IIMC}_2] \begin{bmatrix} g(x) := \int_{t=a}^{t=x} h(x)\,dt \\ g'(x) := h(x) \end{bmatrix} & = & \left(\begin{array}{rcl} \int ch(x)\,dx & = & c\left(\int_{t=a}^{t=x} h(x)\,dt\right) \\ & = & c\int h(x)\,dx \end{array} \right) \\
[\mathrm{IIMC}_2] \begin{bmatrix} g(x) := H(x) \\ g'(x) := h(x) \end{bmatrix} & = & \left(\begin{array}{rcl} \int ch(x)\,dx & = & cH(x) \\ & = & c\int h(x)\,dx \end{array} \right) \\
[\mathrm{IIMC}_1] \begin{bmatrix} g(x) := H(x) \\ g'(x) := h(x) \end{bmatrix} & = & \left(\int ch(x)\,dx \;=\; c\int h(x)\,dx \right) \\
[\mathrm{IIMC}_1] \left[g'(x) := h(x) \right] & = & \left(\int ch(x)\,dx \;=\; c\int h(x)\,dx \right)
\end{array}
$$

StewPtCap5p33 (p.354): $\displaystyle \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

StewPtCap5p39 (p.360): $\displaystyle \int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx \,\Big]_a^b$

Propriedades da integral indefinida

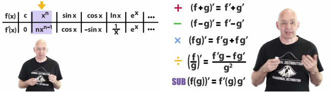
StewPtCap5p40 (p.361) Propriedades da integral indefinida

Contas fáceis e difíceis

Quando a gente pede pro Maxima "calcule 2+3" ele responde '5'; ele está nos dizendo que $2+3=5$. Mas quando a gente pede pra ele "calcule 5" ele responde '5', e não '2+3'... ou seja, ele nos diz que '5=5', não que '5=2+3'...
Nesses casos o que está antes do '=' é a expressão "antes" – a expressão original, que nós demos pro Maxima – e o que está à direita do '=' é a expressão "depois" – o resultado do Maxima calcular a expressão original e simplificá-la o máximo que ele consegue.
Em casos como esse o '=' quer dizer "o resultado de calcular a expressão da esquerda é a expressão da direita", ou "o resultado de simplificar a expressão da esquerda é expressão da direita".
Estes dois capítulos do "Maxima Workbook" explicam em detalhes excruciantes como o Maxima "calcula" e "simplifica" expressões:

MaximaWorkbookP96 (p.76) 11. Evaluation
MaximaWorkbookP101 (p.81) 12. Simplification

aaa



$$
\begin{array}{rrcl}
1. & c' & \Rightarrow & 0 \\
2. & (x^n)' & \Rightarrow & nx^{n-1} \\
3. & \operatorname{sen} x & \Rightarrow & \cos x \\
4. & \cos x & \Rightarrow & -\operatorname{sen} x \\
5. & \ln x & \Rightarrow & \frac{1}{x} \\
6. & e^x & \Rightarrow & e^x \\
\\
7. & (f+g)' & \Rightarrow & f'+g' \\
8. & (f-g)' & \Rightarrow & f'-g' \\
9. & (fg)' & \Rightarrow & f'g+fg' \\
10. & \left(\frac{f}{g}\right)' & \Rightarrow & \frac{f'g-fg'}{g^2} \\
11. & (f(g))' & \Rightarrow & f'(g)g'
\end{array}
$$

Cálculo C2 - 2023.2

Aula 9: teste de nivelamento
(duração 15 mins, 13/set/2023)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.2-C2.html

As perguntas
Calculem:

$$\frac{d}{dx} f(\operatorname{sen}(x^4) + \ln x)$$

e digam em que semestre vocês passaram em Cálculo 1
e com quem vocês fizeram.

Links
2hQ24 Quadro com a questão
2hQ25 Quadro com a solução

Alguns chutes e testes

$$\begin{array}{lcl}
\text{[RC]} & = & \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\right) \\
\text{[RC]} \begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{sen}(x^4) \\ g'(x) := \frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x^4) \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx} f(\operatorname{sen}(x^4)) = f'(\operatorname{sen}(x^4))\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x^4)\right) \\
\text{[RC]} \begin{bmatrix} g(x) := (\operatorname{sen}(x^4) + \ln x) \\ g'(x) := \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(x^4) + \ln x) \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx} f(\operatorname{sen}(x^4) + \ln x) = f'(\operatorname{sen}(x^4) + \ln x)\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(x^4) + \ln x)\right)
\end{array}$$

A solução

$$\begin{array}{rcl}
\frac{d}{dx} f(\operatorname{sen}(x^4) + \ln x) & = & f'(\operatorname{sen}(x^4) + \ln x)\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(x^4) + \ln x) \\
& = & f'(\operatorname{sen}(x^4) + \ln x)\left(\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x^4) + \frac{d}{dx}\ln x\right) \\
& = & f'(\operatorname{sen}(x^4) + \ln x)\left(\cos(x^4)\frac{d}{dx}x^4 + \frac{1}{x}\right) \\
& = & f'(\operatorname{sen}(x^4) + \ln x)\left(\cos(x^4)\cdot 4x^3 + \frac{1}{x}\right)
\end{array}$$

Cálculo C2 - 2023.2

Aulas 8 a 11: mudança de variáveis

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.2-C2.html

Links

Links da aula 8:
2hQ21 Quadros da aula 8 (4a, 12/set/2023)
StewPtCap5p39 (p.360) 5.4 Integrais Indefinidas
StewPtCap5p48 (p.369) 5.5 A Regra da Substituição
StewPtCap7p5 (p.420) 7.1 Integração por Partes
2gT45 (2023.1) Mudança de variável: exemplo
2gT46 (2023.1) Mudança de variável: caixinhas

Mudança de variável na integral definida (MVD):
2eT131 (t-ints, p.12) Uma figura pra mudança de variável
Thomas55p11 (p.376) Theorem 5: Substitution in definite integrals
2fT49 Meu PDF de 2022.2 sobre mudança de variáveis

Mudança de variável na integral indefinida (MVI):
2eT133 (t-ints, p.14) Um exemplo com contas
2eT135 (t-ints, p.16) Outro exemplo com contas
Thomas55p3 (p.370) Theorem 5: The substitution rule
Leit5p13 (p.296) A regra da cadeia para a antidiferenciação
Leit9p10 (p.537) Integração de potências de sen e cos
Miranda189 6.2. Integração por substituição
Miranda192 Exemplo 6.6
Miranda193 Não podemos
Miranda196 Exercícios
Miranda255 8.3 Integrais Trigonométricas

Vídeo do Reginaldo:
`https://www.youtube.com/watch?v=PTCUjrEBc4g`

Alguns quadros de 2023.1:
2gQ22 Quadros da aula 10 (05/maio/2023)
2gQ24 Quadros da aula 11 (09/maio/2023)
2gQ26 Quadros da aula 12 (12/maio/2023)
2gQ28 Quadros da aula 13 (16/maio/2023)

Introdução

O Stewart explica o truque da mudança de variável na integral usando *variáveis dependentes* e *diferenciais*. Por exemplo, se x é a variável independente, u é a variável dependente, e a relação entre elas é $u = g(x) = 2x$, então temos

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}2x = 2$$

e:

$$\int \operatorname{sen}(\underbrace{2x}_{u}) \underbrace{\underbrace{2}_{\frac{du}{dx}}\, dx}_{du} = \int \operatorname{sen}(u)\, du$$

Dê uma olhada:
StewPtCap1p5 (p.10) variável dependente
StewPtCap3p75 (p.228) Diferenciais
StewPtCap5p39 (p.360) 5.4 Integrais Indefinidas
StewPtCap5p48 (p.369) 5.5 A Regra da Substituição

Só que contas com variáveis dependentes e diferenciais são difíceis de justificar formalmente! A gente viu como expandir contas curtas em que certos passos têm justificativas complicadas em contas maiores mas em que cada passo tem uma justificativa bem simples... se a gente tenta fazer isso com a igualdade entre integrais acima a gente acaba descobrindo que as regras pra variáveis dependentes e diferenciais são bem complicadas.

Então eu vou fazer o seguinte. A regra da mudança de variável na integral definida, que o Stewart explica nesta página,
StewPtCap5p51 (p.372) ...para as integrais definidas
é bem fácil de demonstrar usando só o [TFC2].

Eu vou usar estas quatro definições aqui – onde [MVD] é a fórmula pra mudança de variável na integral definida, [MVI] é a fórmula pra mudança de variável na integral indefinida, [MVD4] é uma demonstração da [MVD] com 4 igualdades [MVI3] é uma demonstração da [MVI] com 3 igualdades,

$$\begin{array}{rcl}
[\text{MVD}] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \right) \\
[\text{MVI}] & = & \left(\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \right) \\
[\text{MVD4}] & = & \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x))|_{x=a}^{x=b} \\ & = & F(g(b)) - F(g(a)) \\ & = & F(u)|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right) \\
[\text{MVI3}] & = & \left(\begin{array}{rcl} \int f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x)) \\ & = & F(u) \\ & = & \int f(u)\,du \end{array} \right)
\end{array}$$

e a gente vai ver que dá pra tratar algumas destas fórmulas e demonstrações como abreviações pras outras, e que dá pra expandir as versões mais abreviadas em outras em que os passos são mais fáceis de justificar.

Um exemplo

Isto aqui é um exemplo de como contas com mudança de variável costumam ser feitas na prática:

$$\begin{aligned}
&\int 2\cos(3x+4)\,dx \\
=\ &\int 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \\
=\ &\frac{2}{3}\int \cos u\,du \\
=\ &\frac{2}{3}\operatorname{sen} u \\
=\ &\frac{2}{3}\operatorname{sen}(3x+4)
\end{aligned}$$

É necessário indicar em algum lugar que a relação entre a variável nova e a antiga é esta: $u = 3x+4$.

Compare as contas acima, que não têm nem os limites de integração nem as barras de diferença, com as da coluna da direita:

$$\begin{aligned}
&\int_{x=a}^{x=b} 2\cos(3x+4)\,dx \\
=\ &\int_{u=3a+4}^{u=3b+4} 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \\
=\ &\frac{2}{3}\int_{u=3a+4}^{u=3b+4} \cos u\,du \\
=\ &\frac{2}{3}\left((\operatorname{sen} u)\big|_{u=3a+4}^{u=3b+4}\right) \\
=\ &\frac{2}{3}\left((\operatorname{sen}(3x+4))\big|_{x=a}^{x=b}\right)
\end{aligned}$$

Nós vamos tratar a versão à esquerda como uma abreviação pra versão da direita. Note que pra ir da versão “completa” pra “abreviada” é super fácil, é só apagar os limites de integração e as barras de diferença – mas pra ir da versão “abreviada” pra “completa” a gente precisa reconstruir os limites de integração e as barras de diferença, o que é bem mais difícil.

Caixinhas de anotações

O meu truque preferido pra não me enrolar nas contas de uma mudança de variável é fazer uma caixinha de anotações como essa aqui,

$$\begin{bmatrix} u = 3x + 4 \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(3x+4) = 3 \\ \frac{du}{dx} = 3 \\ \color{red}{du = 3\,dx} \\ \color{red}{dx = \frac{1}{3}\,du} \end{bmatrix}$$

na qual: a) a primeira linha diz a relação entre a variável antiga e a variável nova – que nesse exemplo é $u = 3x + 4$, b) todas as outras linhas da caixinha são consequências dessa primeira, e c) dentro da caixinha a gente permite gambiarras como:

$$\color{red}{dx = 42\,du}$$

Durante quase todo o curso de C2 a gente vai tratar esse tipo de coisa como uma igualdade entre expressões incompletas – mais ou menos como se a gente estivesse dizendo isso aqui:

$$+20) = /99]$$

Na caixinha à esquerda eu colori as linhas que são gambiarras em vermelho.

Repare que se a gente soubesse usar diferenciais a gente saberia dar um sentido pras igualdades que envolvem diferenciais, e que eu marquei em vermelho... mas a gente não sabe, então a gente vai considerar que elas são gambiarras que a gente só vai entender direito em Cálculo 3.

Aqui tem um exemplo grande:
2fT112 (C2-P1, p.5) Questão 1: gabarito

Os detalhes horríveis

Nesta página aqui – Miranda193 – o Miranda diz "Não podemos calcular uma integral que possui tanto um x e um u nela", mas ele não explica porquê... se em

$$\int_{x=a}^{x=b} 2\cos(u)\,dx$$

esse u fosse uma abreviação para $3x+4$ essa integral acima seria equivalente à do início do slide anterior, né?... =(

Neste slide eu vou tentar contar o que eu sei sobre como o método da substituição funciona – *pra convencer vocês de que não vale a pena vocês tentarem entender os detalhes agora.*

Toda mudança de variável numa integral definida é consequência da igualdade (13) do slide "Contas (2)". Por exemplo, compare:

$$\begin{aligned}
\int_{x=a}^{x=b} g(h(x))h'(x)\,dx &= \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g(u)\,du \\
\int_{x=a}^{x=b} 2\cos(3x+4)\,dx &= \int_{u=3a+4}^{u=3b+4} 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du
\end{aligned}$$

A gente pode tentar descobrir qual é a substituição certa passo a passo, começando pelas funções mais simples.... eu faria assim: olhando pra parte direita eu chuto que $g(u) = 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}$; olhando pra parte esquerda eu chuto que $h(x) = 3x+4$, e daí $h'(x) = 3$; aí eu testo esta substituição aqui,

$$(13)\begin{bmatrix} g(u) := 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3} \\ h(x) := 3x+4 \\ h'(x) := 3 \end{bmatrix}$$

e vejo que o resultado dela é *equivalente* (mas não igual!!!) à última igualdade da coluna da esquerda – não preciso nem substituir o a e o b.

Preciso reescrever este slide!

Os detalhes horríveis (2)

Estas contas aqui,

$$\begin{array}{rcl} u &=& x^4 \\ \frac{du}{dx} &=& 4x^3 \\ du &=& \frac{du}{dx}dx \\ &=& 4x^3\,dx \end{array}$$

fazem sentido se a gente considerar que:

1. x é uma variável independente,
2. u é uma variável dependente, com $u = u(x) = x^4$,
3. dx é uma variável independente,
4. du é uma variável dependente, com $du = \frac{du}{dx}dx$,
5. estas regras sobre diferenciais valem: Leit4p61 (p.275),
6. estas regras sobre variáveis dependentes valem: Stew14p53 (p.951),
7. o dx num $\int f(x)\,dx$ funciona como uma diferencial.

Eu já perguntei pra vários matemáticos fodões que eu conheço – incluindo os desenvolvedores do Maxima, na mailing list – onde eu posso encontrar alguma formalização das regras de como lidar com variáveis dependentes, diferenciais e mudança de variável na integral indefinida, e todos eles me responderam a mesma coisa: "*não faço a menor idéia! Eu sei algumas das regras mas não todas, e não sei onde você pode procurar...*" =(

Moral: é melhor a gente tratar o $du = 4x^3\,dx$ como uma gambiarra...

Caixinhas com mais anotações

$$\begin{array}{rcl}
\int (\operatorname{sen}\theta)^4 (\cos\theta)^7 \, d\theta &=& \int (\operatorname{sen}\theta)^4 (\cos\theta)^6 \cos\theta \, d\theta \\
&=& \int (\operatorname{sen}\theta)^4 ((\cos\theta)^2)^3 \cos\theta \, d\theta \\
&=& \int (\operatorname{sen}\theta)^4 (1-(\operatorname{sen}\theta)^2)^3 \cos\theta \, d\theta \\
&=& \int s^4 (1-s^2)^3 \, ds
\end{array}
\quad
\begin{bmatrix}
\operatorname{sen}\theta = s \\
\frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \\
ds = \cos\theta \, d\theta \\
\cos\theta \, d\theta = ds
\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl}
\int (\operatorname{sen}\theta)^4 (\cos\theta)^7 \, d\theta &=& \int (\operatorname{sen}\theta)^4 (\cos\theta)^6 \cos\theta \, d\theta \\
&=& \int s^4 (1-s^2)^3 \, ds
\end{array}
\quad
\begin{bmatrix}
\operatorname{sen}\theta = s \\
\frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \\
ds = \cos\theta \, d\theta \\
\cos\theta \, d\theta = ds \\
(\cos\theta)^2 = 1 - (\operatorname{sen}\theta^2) \\
(\cos\theta)^2 = 1 - s^2 \\
(\cos\theta)^6 = (1-s^2)^3
\end{bmatrix}$$

Caixinhas com mais anotações (2)

$$\begin{aligned}\int s\sqrt{1-s^2}\,ds &= \int (\operatorname{sen}\theta)\sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2}\cos\theta\,d\theta \\ &= \int (\operatorname{sen}\theta)\sqrt{(\cos\theta)^2}\cos\theta\,d\theta \\ &= \int (\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)\cos\theta\,d\theta \\ &= \int (\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)^2\,d\theta\end{aligned}
\qquad
\left[\begin{array}{c} s = \operatorname{sen}\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \\ ds = \cos\theta\,d\theta \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned}\int s\sqrt{1-s^2}\,ds &= \int (\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)\cos\theta\,d\theta \\ &= \int (\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)^2\,d\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds &= \int \frac{1}{\cos\theta}\cos\theta\,d\theta \\ &= \int 1\,d\theta \\ &= \theta \\ &= \operatorname{arcsen} s\end{aligned}
\qquad
\left[\begin{array}{c} s = \operatorname{sen}\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \\ ds = \cos\theta\,d\theta \\ s^2 = (\operatorname{sen}\theta)^2 \\ 1-s^2 = 1-(\operatorname{sen}\theta)^2 \\ 1-s^2 = (\cos\theta)^2 \\ \sqrt{1-s^2} = \cos\theta \\ \operatorname{arcsen} s = \operatorname{arcsen}\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{arcsen} s = \theta \\ \theta = \operatorname{arcsen} s \end{array}\right]$$

Caso particular 1 (MVD)

$$[\text{MVD}] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVD}]\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left(\int_{x=a}^{x=b} f(2x)\cdot 2\,dx \;=\; \int_{u=2a}^{u=2b} f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVD}]\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \left(\int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx \;=\; \int_{u=2a}^{u=2b} \operatorname{sen} u\,du \right)$$

$$[\text{MVD4}] = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & F(g(b)) - F(g(a)) \\ & = & F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}]\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f(2x)\cdot 2\,dx & = & F(2x)\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & F(2b) - F(2a) \\ & = & F(u)\big|_{u=2a}^{u=2b} \\ & = & \int_{u=2a}^{u=2b} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}]\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx & = & F(2x)\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & F(2b) - F(2a) \\ & = & F(u)\big|_{u=2a}^{u=2b} \\ & = & \int_{u=2a}^{u=2b} \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}]\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx & = & (-\cos 2x)\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & (-\cos 2b) - (-\cos 2a) \\ & = & (-\cos u)\big|_{u=2a}^{u=2b} \\ & = & \int_{u=2a}^{u=2b} \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

Caso particular 1 (MVI)

$$[\text{MVI}] = \left(\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left(\int f(2x)\cdot 2\,dx = \int f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \left(\int \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx = \int \operatorname{sen} u\,du \right)$$

$$[\text{MVI3}] = \left(\begin{array}{rcl} \int f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x)) \\ & = & F(u) \\ & = & \int f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int f(2x)\cdot 2\,dx & = & F(2x) \\ & = & F(u) \\ & = & \int f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx & = & F(2x) \\ & = & F(u) \\ & = & \int \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx & = & (-\cos 2x) \\ & = & (-\cos u) \\ & = & \int \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

Caso particular 2 (MVD)

$$[\text{MVD}] \quad = \quad \left(\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \quad = \quad \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVD}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\int_{x=a}^{x=b} f(x^2)\cdot 2x\,dx \quad = \quad \int_{u=a^2}^{u=b^2} f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVD}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx \quad = \quad \int_{u=a^2}^{u=b^2} \operatorname{sen} u\,du \right)$$

$$[\text{MVD4}] \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & F(g(b)) - F(g(a)) \\ & = & F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f(x^2)\cdot 2x\,dx & = & F(x^2)\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & F(b^2) - F(a^2) \\ & = & F(u)\big|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ & = & \int_{u=a^2}^{u=b^2} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx & = & F(x^2)\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & F(b^2) - F(a^2) \\ & = & F(u)\big|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ & = & \int_{u=a^2}^{u=b^2} \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx & = & (-\cos x^2)\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & (-\cos b^2) - (-\cos a^2) \\ & = & (-\cos u)\big|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ & = & \int_{u=a^2}^{u=b^2} \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

Caso particular 2 (MVI)

$$[\text{MVI}] = \left(\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI}]\begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \left(\int f(x^2)\cdot 2x\,dx = \int f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI}]\begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \left(\int \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx = \int \operatorname{sen} u\,du \right)$$

$$[\text{MVI3}] = \left(\begin{array}{rcl} \int f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x)) \\ & = & F(u) \\ & = & \int f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}]\begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int f(x^2)\cdot 2x\,dx & = & F(x^2) \\ & = & F(u) \\ & = & \int f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}]\begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx & = & F(x^2) \\ & = & F(u) \\ & = & \int \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}]\begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx & = & (-\cos x^2) \\ & = & (-\cos u) \\ & = & \int \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

Caso particular 3 (MVI)

$$[\text{MVI}] \qquad = \left(\int f(g(x))g'(x)\,dx \quad = \quad \int f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI}]\begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{sen} x \\ g'(x) := \cos x \end{bmatrix} \qquad = \left(\int f(\operatorname{sen} x)\cos x\,dx \quad = \quad \int f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI}]\begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{sen} x \\ g'(x) := \cos x \\ f(u) := u^2(1-u^2)^2 \end{bmatrix} \qquad = \left(\int (\operatorname{sen} x)^3(1-(\operatorname{sen} x)^2)^2\cos x\,dx \quad = \quad \int u^2(1-u^2)^2\,du \right)$$

$$[\text{MVI3}] \qquad = \begin{pmatrix} \int f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x)) \\ & = & F(u) \\ & = & \int f(u)\,du \end{pmatrix}$$

$$[\text{MVI3}]\begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{sen} x \\ g'(x) := \cos x \end{bmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} \int f(\operatorname{sen} x)\cos x\,dx & = & F(\operatorname{sen} x) \\ & = & F(u) \\ & = & \int f(u)\,du \end{pmatrix}$$

$$[\text{MVI3}]\begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{sen} x \\ g'(x) := \cos x \\ f(u) := u^2(1-u^2)^2 \end{bmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} \int (\operatorname{sen} x)^3(1-(\operatorname{sen} x)^2)^2\cos x\,dx & = & F(\operatorname{sen} x) \\ & = & F(u) \\ & = & \int u^2(1-u^2)^2\,du \end{pmatrix}$$

O macaco, de novo

Estas duas igualdades são falsas

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2} & = & \cos\theta \\ \operatorname{arcsen}\operatorname{sen}\theta & = & \theta \end{array}$$

quando $\theta = \pi$... confira!

Mas elas são verdadeiras para $\theta = 0$, e para todo θ num certo intervalo em torno do 0 que eu não quero contar qual é.

Lembre quem em Cálculo 2 a gente vai primeiro fazer as contas como o macaco que faz todas as contas como se tudo funcionasse, e a gente vai deixar pra checar os detalhes, como se θ está no intervalo certo, só no final, depois de termos feito as contas todas.

O Leithold é super cuidadoso nas contas e nesses detalhes como os domínios da funções e o intervalo onde mora o θ, mas a maioria dos outros livros de Cálculo 2 que eu conheço não são – eles são meio porcalhões com esses detalhes... e a gente também vai ser, senão não vai dar tempo de cobrir o suficiente da matéria.

O truque dos intervalos

Dê uma olhada nas primeiras páginas daqui:

Leit5p3 5.1. Antidiferenciação

O Leithold usa expressões como "num intervalo I", "para todo $x \in I$" e "definidas no mesmo intervalo" um montão de vezes. O truque de usar sempre intervalos resolve esse esse problema daqui super bem:

2fT24 Meme: expanding brain, versão ln

A minha definição preferida pra integral indefinida,

2fT23 Outra definição pra integral indefinida

também resolve o problema – de um modo bem mais simples, e que é suficiente pro tipo de conta que a gente tem que treinar em Cálculo 2.

MVI

A nossa fórmula pra mudança de variável na integral indefinida vai ser esta aqui:

$$\textstyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \quad = \quad \int f(u)\,du \quad = \left(\displaystyle\int f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int f'(u)\,du\right)$$

Dá pra demonstrar ela deste jeito,

$$\int f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; f(g(x)) \;=\; f(u) \;=\; \int f'(u)\,du$$

onde a primeira e a terceira igualdades são consequências do , e a igualdade do meio só vale se tivermos $u = g(x)$.

Os livros demonstram a $\int f(g(x))g'(x)\,dx \quad = \quad \int f(u)\,du$ de um jeitos que eu nunca achei muito convincentes – ou fingindo que tudo é óbvio, ou "derivando tudo em x". As contas abaixo me ajudaram a entender o que acontece quando a gente "deriva tudo em x":

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\int f'(g(x))g'(x)\,dx\right)}_{f'(g(x))g'(x)} \;=\; \underbrace{\frac{d}{dx}f(g(x))}_{f'(g(x))g'(x)} \;=\; \underbrace{\frac{d}{dx}\,\underbrace{f(u)}_{f(g(x))}}_{f'(g(x))g'(x)} \;=\; \underbrace{\frac{d}{dx}\underbrace{\underbrace{\int f'(u)\,du}_{f(u)}}_{f(g(x))}}_{f'(g(x))g'(x)}$$

Simplificando raizes quadradas

Na aula de 16/maio/2023 você aprendeu – na prática, não vendo uma definição formal – o que é transformar uma integral mais difícil numa integral mais fácil, que nós sabemos integrar...

a) Digamos que você sabe integrar $\int \sqrt{1-s^2}\,ds$. Transforme $\int \sqrt{1-(5x)^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

b) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

c) Digamos que você sabe integrar $\int \sqrt{1-s^2}^k\,ds$ para qualquer valor de k. Transforme $\int \sqrt{1-(5x)^2}^{42}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

d) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}^{42}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

e) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}^k\,dx$ em algo que você sabe integrar.

f) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}^k\,dx$ em algo que você sabe integrar.

g) Entenda este truque aqui:

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{3^2-x^2} & = & \sqrt{3^2-3^2\frac{1}{3^2}x^2} \\
& = & \sqrt{3^2-3^2(\frac{x}{3})^2} \\
& = & \sqrt{3^2(1-(\frac{x}{3})^2)} \\
& = & \sqrt{3^2}\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2} \\
& = & 3\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}
\end{array}$$

Use ele – com adaptações, óbvio – pra transformar $\int \sqrt{25-x^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

h) Use ele pra transformar $\int \sqrt{25-x^2}^{42}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

i) Use ele pra transformar $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

j) Use ele pra transformar $\int \sqrt{a^2-x^2}^k\,dx$ em algo que você sabe integrar.

j) Use ele pra transformar $\int x^{20}\sqrt{a^2-x^2}^k\,dx$ em algo que você sabe integrar.

Exercício 3

Slogan:

> *Toda integral que pode ser resolvida por uma sequência de mudanças de variável pode ser resolvida por uma mudança de variável só.*

Durante a quarentena eu dei algumas questões de prova sobre este slogan. Dê uma olhada:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=4
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=9
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-P1.pdf#page=15

a) Resolva a integral abaixo usando uma mudança de variável só (dica: $u = g(h(x))$):

$$\int f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)\,dx = ?$$

b) Resolva a integral acima usando duas mudanças de variável. Dica: comece com $u = h(x)$.

O Miranda e o Leithold preferem fazer em um passo só certas mudanças de variáveis que eu prefiro fazer em dois ou três passos. Entenda o exemplo 8.1 do Miranda – o da seção 8.4, na página 264...

http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#263

c) ...e descubra como resolver a integral dele fazendo duas mudanças de variáveis ao invés de uma só. A segunda mudança de variável vai ser $s = \operatorname{sen}\theta$, e a primeira eu prefiro não contar qual é – tente usar as idéias do exercício 1 pra descobrir qual ela tem que ser.

Ainda não atualizei este slide!

Cálculo C2 - 2023.2

Aula 10: derivada da função inversa

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.2-C2.html

Links

StewPtCap3p35 (p.188) 3.5 Derivação Implícita
StewPtCap3p39 (p.192) Derivadas de Funções Trigonométricas Inversas
StewPtCap3p43 (p.196) 3.6 Derivadas de Funções Logarítmicas
MirandaP90 3.6 Derivada da Função Inversa
MirandaP97 4.1 Derivação Implícita
MirandaP101 4.2 Derivadas das Funções Exponencial e Logaritmo
MirandaP104 4.3 Derivação das Funções Trigonométricas Inversas
Leit3p59 (p.195) 3.8 Derivação implícita
Leit7p15 (p.433) 7.2.3 Teorema: derivada da função inversa

Introdução

Pra mim a "fórmula da derivada da função inversa" e a "demonstração da fórmula da derivada da função inversa" são essas séries de igualdades aqui, que eu vou chamar de [DFI2] e [DFI6], onde o 2 e o 6 dizem o número de igualdades em cada uma:

$$\text{[DFI2]} \;=\; \left(\begin{array}{lrcl} \text{Se:} & f(g(x)) & = & x \\ \text{Então:} & g'(x) & = & \dfrac{1}{f'(g(x))} \end{array} \right)$$

$$\text{[DFI6]} \;=\; \left(\begin{array}{lrcl} \text{Se:} & f(g(x)) & = & x \\ \text{Então:} & \frac{d}{dx} f(g(x)) & = & \frac{d}{dx} x \\ & & = & 1 \\ & \frac{d}{dx} f(g(x)) & = & f'(g(x))g'(x) \\ & f'(g(x))g'(x) & = & 1 \\ & g'(x) & = & \dfrac{1}{f'(g(x))} \end{array} \right)$$

Você já viu algo assim em Cálculo 1 quando mostraram pra você que $\frac{d}{dx} \ln x = 1$... mas agora nós vamos reusar essa demonstração pra provar várias outras coisas diferentes.

Exercício 0.
Calcule o resultado das substituições abaixo.

a) [DFI6] $\begin{bmatrix} g(x) := \ln x \\ g'(x) := \ln' x \\ f(x) := \exp x \\ f'(x) := \exp' x \end{bmatrix} = ?$

b) [DFI6] $\begin{bmatrix} g(x) := \ln x \\ g'(x) := \ln' x \\ f(x) := e^x \\ f'(x) := e^x \end{bmatrix} = ?$

c) [DFI2] $\begin{bmatrix} g(x) := \ln x \\ g'(x) := \ln' x \\ f(x) := e^x \\ f'(x) := e^x \end{bmatrix} = ?$

d) [DFI2] $\begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{arcsen} x \\ g'(x) := \operatorname{arcsen}' x \\ f(x) := \operatorname{sen} x \\ f'(x) := \cos x \end{bmatrix} = ?$

e) [DFI2] $\begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{arcsen} x \\ g'(x) := \operatorname{arcsen}' x \\ f(x) := \operatorname{sen} x \\ f'(x) := \sqrt{1 - (\operatorname{sen} x)^2} \end{bmatrix} = ?$

Secante e tangente

Lembre que $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ e $\sec x = \frac{1}{\cos x}$. Vou definir estas abreviações – que vão ser temporárias, essas letras vão ter outros significados em outros lugares...

$$\begin{array}{rcl} s &=& \operatorname{sen} x \\ c &=& \cos x \\ t &=& \tan x \\ z &=& \sec x \end{array}$$

Então temos:

$$\begin{array}{l}
z^2 = \frac{1}{c^2} = \frac{s^2+c^2}{c^2} = \frac{s^2}{c^2} + \frac{c^2}{c^2} = t^2+1 \\
\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2} \\
\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{1'g-1g'}{g^2} = \frac{-g'}{g^2} \\
z' = \left(\frac{1}{c}\right)' = \frac{-c'}{c^2} = \frac{s}{c^2} = \frac{1}{c}\frac{s}{c} = zt \\
t' = \left(\frac{s}{c}\right)' = \frac{s'c-sc'}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} = z^2
\end{array}$$

Exercício 1.
Leia com cuidado todos os passos do “Então temos:” à esquerda e veja quais são os passos que você não acha óbvios. Expanda cada uma das igualdades que você achou complicadas em uma série de igualdades bem fáceis de justificar.

Exercício 2.
No item (e) do Exercício 0 eu usei que:

$$\operatorname{sen}' x = \sqrt{1-(\operatorname{sen} x)^2}$$

ou seja, eu “expressei $\operatorname{sen}' x$ em termos de $\operatorname{sen} x$”. Se você nunca viu essa expressão “expressar blá em termos de outro blá” veja como ela é usada nesta página do Stewart:

StewPtCap3p35 (p.188) 3.5 Derivação Implícita

Expresse:
a) $\tan x$ em termos de $\sec x$
b) $\sec x$ em termos de $\tan x$
c) $\tan' x$ em termos de $\tan x$
d) $\sec' x$ em termos de $\sec x$

Secante e tangente (2)

No final do exercício (0e) você obteve isto aqui,

$$\mathrm{arcsen}'\,x = \frac{1}{\sqrt{1-(\mathrm{sen}\,\mathrm{arcsen}\,x)^2}}$$

ou seja, você agora sabe justificar a primeira igualdade daqui,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{arcsen}'\,x & = & \dfrac{1}{\sqrt{1-(\mathrm{sen}\,\mathrm{arcsen}\,x)^2}} \\ & = & \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

e imagino que a segunda também, porque ela é relativamente fácil...

Exercício 3.
a) Expresse $\arctan x$ em termos de x.
b) Expresse $\mathrm{arcsec}\,x$ em termos de x.
Aqui você vai ter que combinar idéias dos exercícios 0 e 2.

Dica 1: todas as idéias principais estão aqui:
StewPtCap3p39 (p.192)

Dica 2: releia estes dois trechos das legendas de um dos vídeos sobre didática que eu preparei no início do ano:
Visaud01:25 até 03:00
Visaud50:43 até 52:24

Você não quer (só) virar a pessoa que lê demonstrações complicadas e acha elas óbvias. O que vai ser mais útil pra você no futuro vai ser você virar a pessoa que sabe expandir demonstrações complicadas e transformar elas em demonstrações que os seus colegas entendam! Lembre da Dica 7 daqui:
2gT4 “Releia a Dica 7”

Cálculo 2 - 2023.2

Aulas 11 e 12: Frações parciais

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2023.2-C2.html

Links

Quadros:
2hQ31 (2023.2) Aula 11
2hQ37 (2023.2) Aula 12
2gQ30 (2023.1) Aula 14
2xQ26 (2019.1)
2yQ43 (2019.2)
2yQ106 (2019.2, polinômios em duas variáveis).

Seções sobre frações parciais nos livros:

StewPtCap7p23 (p.438) Seção 7.4
Leit9p24 (p.551) Seção 9.5
Miranda240 Seção 8.1: Frações parciais

Eu tentei fazer um programa pra typesettear essas figuras mas o resultado ficou feio – 2bT212 – e eu ainda não tive tempo de melhorá-lo.

Polinômios de Laurent em Maxima:
`http://anggtwu.net/MAXIMA/laurent1.mac.html`

Sobre as questões de prova

A P1 vai ter uma questão em que você vai ter que resolver uma integral como essa aqui:

$$\int \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}\,dx$$

A VR e a VS vão ter questões em que você vai ter que resolver integrais de "funções racionais impróprias", como isto aqui,

$$\int \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{ex^2+fx+g}\,dx$$

em que você vai precisar de divisão de polinômios com resto.

Neste semestre eu vou considerar que frações parciais são principalmente uma desculpa pra gente aprender duas coisas: a) um jeito de lidar com polinômios que vai nos permitir fazer um montão de contas com polinômios ou de cabeça ou escrevendo muito pouco, e b) um caso que a gente precisa usar um pouquinho de Álgebra Linear – "resolver um sistema" – pra transformar uma integral complicada em outra mais simples.

A gente só vai ver os casos em que o polinômio do denominador tem raízes reais e essas raízes são todas diferentes.

A integral do $\frac{1}{x}$

Lembre que:

$$\begin{array}{rcl}
\color{red}{[\text{II}]} & = & \left(\int f'(x)\,dx \;=\; f(x) \right) \\
\color{red}{[\text{RC}]} & = & \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) \;=\; f'(g(x))g'(x) \right) \\
\color{red}{[\text{DFI}]} & = & \left(\begin{array}{rcl}
f(g(x)) & = & x \\
\frac{d}{dx} f(g(x)) & = & \frac{d}{dx} x \\
& = & 1 \\
\frac{d}{dx} f(g(x)) & = & f'(g(x))g'(x) \\
f'(g(x))g'(x) & = & 1 \\
g'(x) & = & \dfrac{1}{f'(g(x))}
\end{array} \right)
\end{array}$$

e que eu estou usando uma definição pra integral indefinida na qual as duas igualdades abaixo são equivalentes:

$$\begin{array}{rcl}
f(x) & = & \frac{d}{dx} g(x) \\
\int f(x)\,dx & = & g(x)
\end{array}$$

Ou seja, pra mim o '$+C$' é opcional.

Me contaram que o Reginaldo dá errado pra quem não escreve o '$+C$', então se você for fazer C2 com ele no próximo semestre não esqueça o '$+C$'!!!

Exercício 1
Calcule a integral abaixo. Dica: $u = bx + c$.

$$\int \frac{a}{bx + c}\,dx$$

Temos:

$$\begin{array}{rcl}
\exp(\ln(x)) & \overset{(1)}{=} & x \\
\ln' x & \overset{(2)}{=} & 1/\exp'(\ln(x)) \\
& \overset{(3)}{=} & 1/\exp(\ln(x)) \\
& \overset{(4)}{=} & 1/x \\
\frac{d}{dx} f(g(x)) & \overset{(5)}{=} & f'(g(x))g'(x) \\
\frac{d}{dx} \ln(-x) & \overset{(6)}{=} & \ln'(-x) \cdot -1 \\
& \overset{(7)}{=} & 1/(-x) \cdot -1 \\
& \overset{(8)}{=} & 1/x \\
\ln|x| & \overset{(9)}{=} & \begin{cases} \ln x & \text{quando } 0 < x, \\ \ln -x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\
\frac{d}{dx} \ln|x| & \overset{(10)}{=} & \frac{d}{dx} \begin{cases} \ln x & \text{quando } 0 < x, \\ \ln -x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\
& \overset{(11)}{=} & \begin{cases} \frac{d}{dx} \ln x & \text{quando } 0 < x, \\ \frac{d}{dx} \ln -x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\
& \overset{(12)}{=} & \begin{cases} 1/x & \text{quando } 0 < x, \\ 1/x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\
& \overset{(13)}{=} & 1/x \\
1/x & \overset{(14)}{=} & \frac{d}{dx} \ln x \\
1/x & \overset{(15)}{=} & \frac{d}{dx} \ln(-x) \\
1/x & \overset{(16)}{=} & \frac{d}{dx} \ln|x| \\
\int \frac{1}{x}\,dx & \overset{(17)}{=} & \ln x \\
\int \frac{1}{x}\,dx & \overset{(18)}{=} & \ln(-x) \\
\int \frac{1}{x}\,dx & \overset{(19)}{=} & \ln|x|
\end{array}$$

Contas sem “vai um” e polinômios

Compare esta conta com números,

$$
\begin{array}{r|l}
2773 & 12 \\ \cline{2-2}
-24 & 231 \\ \cline{1-1}
37 & \\
-36 & \\ \cline{1-1}
13 & \\
-12 & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
2400 &=& 200 \cdot 12 \\
360 &=& 30 \cdot 12 \\
12 &=& 1 \cdot 12 \\
2772 &=& 231 \cdot 12 \\
2773 &=& 231 \cdot 12 + 1
\end{array}
$$

Com esta conta com polinômios:

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3+7x^2+7x+3 & x+2 \\ \cline{2-2}
-(2x^3+4x^2) & 2x^2+3x+1 \\ \cline{1-1}
3x^2+7x & \\
-(3x^2+6x) & \\ \cline{1-1}
1x+3 & \\
-(1x+2) & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
2x^3+4x^2+0x+0 &=& (2x^2+0x+0)\cdot(x+2) \\
3x^2+6x+0 &=& (3x+0)\cdot(x+2) \\
1x+2 &=& 1 \cdot (x+2) \\
2x^3+7x^2+7x+1 &=& (2x^2+3x+1)\cdot(x+2) \\
2x^3+7x^2+7x+3 &=& (2x^2+3x+1)\cdot(x+2)+1
\end{array}
$$

Exercício 2
Traduza a conta com polinômios da esquerda pra notação de caixinhas daqui: 2xQ26, 2yQ43.

Exercício 3
Traduza a conta abaixo pra notação de caixinhas:

$$
\begin{array}{cl}
& \dfrac{2}{x+3} + \dfrac{4}{x-5} \\
= & \dfrac{2(x-5)}{(x+3)(x-5)} + \dfrac{(x+3)4}{(x+3)(x-5)} \\
= & \dfrac{2(x-5)+(x+3)4}{(x+3)(x-5)}
\end{array}
$$

Funções racionais

Exercício 4
Entenda a definição de "função racional própria" daqui – Miranda240 – e acrescente mais linhas nas contas do exercício 3 pra "simplificar" o resultado até ele virar uma "função racional própria". Faça isso tanto na notação usual quanto na notação de caixinhas.

Exercício 5
Entenda as contas do Exemplo 8.1 daqui – Miranda241 – e transforme a expressão abaixo numa função racional imprópria:

$$1000x^2 + 100x + 10 + \frac{2}{x+3} + \frac{4}{x-5}$$

Exercício 6
Isto aqui é verdade:

$$\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5} = \frac{(A+B)x + (-5A+3B)}{x^2-2x-15}$$

mostre porquê "aumentando o nível de detalhe" – transforme a igualdade acima numa série de igualdades na qual cada passo seja bem fácil de verificar.

Exercício 7
Resolva:

a) $(A+B)x + (-5A+3B) = 9x + 11$

b) $\dfrac{(A+B)x + (-5A+3B)}{x^2-2x-15} = \dfrac{9x+11}{x^2-2x-15}$

c) $\dfrac{(A+B)x + (-5A+3B)}{x^2-2x-15} = \dfrac{2x+7}{x^2-2x-15}$

d) $\dfrac{A}{x+3} + \dfrac{B}{x-5} = \dfrac{2x+7}{x^2-2x-15}$

e) $\displaystyle\int \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5}\, dx$

f) $\displaystyle\int \frac{2x+7}{x^2-2x-15}\, dx$

Exercício 8
(Bem trabalhoso, pra casa!)
Mostre como organizar a solução do (7f) em várias séries de igualdades fáceis de justificar, como no slide 3. Você pode precisar de algumas coisinhas em português, como na última página do PDF de 2022.2: 2fT137.

Aviso: Todos os slides a partir daqui são antigos!
Assim que der eu vou fazer uma faxina neles
e deixar só o que ainda serve!!!

Exercício 1
Algumas consequências da regra da cadeia...

$$[\mathrm{RC}] \;=\; \left(\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\right)$$

Obtenha os seguintes casos particulares da [RC]:

a) $g(x) = 2x$
b) $g(x) = 2x + 3$
c) $g(x) = x + 3$
d) $g(x) = x + 3,\ f(x) = \ln x$
e) $g(x) = -x$
f) $g(x) = -x,\ f(x) = \ln x$
g) $g(x) = -x + 200,\ f(x) = \ln x$

Exercício 2.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{3x}\,dx = ?$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{3x+4}\,dx = ?$

c) $\displaystyle\int \frac{2}{3x+4}\,dx = ?$

d) $\displaystyle\int \frac{a}{bx+c}\,dx = ?$

Derivadas formais (de novo)

Todas estas igualdades são verdadeiras,
mas se tentarmos formalizar elas com
todos os detalhes vamos ver que várias delas
falam de funções com domínios diferentes...

$$\begin{array}{rcl}
\frac{d}{dx}\ln x &=& \frac{1}{x} \\
\frac{d}{dx}\ln(-x) &=& \frac{1}{x} \\
\frac{d}{dx}\ln|x| &=& \frac{1}{x}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(x) \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(x)+C \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(-x) \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(-x)+C \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(|x|) \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(|x|)+C \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \begin{cases} \ln(-x)+C_1 & \text{quando } x<0, \\ \ln(x)+C_2 & \text{quando } x>0 \end{cases}
\end{array}$$

REPARE QUE:

$$\frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+5} = \frac{2(x+5)}{(x+3)(x+5)} + \frac{4(x+3)}{(x+3)(x+5)}$$

$$= \frac{2(x+5) + 4(x+3)}{(x+3)(x+5)}$$

$$= \frac{2x+10 + 4x+12}{x^2+8x+15}$$

$$= \frac{6x+22}{x^2+8x+15}$$

A MAIORIA DOS PROGRAMAS DE "COMPUTER ALGEBRA" TEM FUNÇÕES QUE FAZEM A OPERAÇÃO ACIMA E A INVERSA DELA:

$$\left(\frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+5}\right) \underset{\substack{\text{"apart"} \\ \text{(DIFÍCIL)}}}{\overset{\substack{\text{"together"} \\ \text{(FÁCIL)}}}{\rightleftarrows}} \left(\frac{6x+22}{x^2+8x+15}\right)$$

Exercício 3.

a) together $\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right) = ?$

b) together $\left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}\right) = ?$

c) together $\left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}\right) = ?$

Exercício 4.

EXERCÍCIO:

a) ENCONTRE EXPRESSÕES PARA c, d, e, f QUE FAÇAM ESTA FÓRMULA SER VERDADE:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{cx+d}{x^2+ex+f}$$

AS SUAS FÓRMULAS PARA c, d, e, f NÃO PODEM CONTER "x".

b) USE A FÓRMULA QUE VOCÊ ACABOU DE OBTER PARA ENCONTRAR OS A, a, B, b TAIS QUE:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{2x+3}{x^2-7+10}$$

Exercício 4: uma solução pro item (a)

a)
$$
\begin{array}{rcl}
\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} &=& \frac{cx+d}{x^2+ex+f} \\
\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} &=& \frac{A(x-b)}{(x-a)(x-b)} + \frac{B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \\
&=& \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \\
&=& \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab} \\
c &=& A+B \\
d &=& -Ab-Ba \\
e &=& -a-b \\
f &=& ab
\end{array}
$$

Exercício 4: uma solução pro item (a), cont...

Dá pra gente reescrever isso usando o '[:=]':

$$\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b} = \frac{cx+d}{x^2+ex+f}\right)\begin{bmatrix} c:=A+B \\ d:=-Ab-Ba \\ e:=-a-b \\ f:=ab \end{bmatrix}$$
$$= \left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b} = \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab}\right),$$

e sabemos que esta igualdade é verdade:

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b} = \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab}$$

então isto aqui

$$\begin{array}{rcl} c & = & A+B \\ d & = & -Ab-Ba \\ e & = & -a-b \\ f & = & ab \end{array}$$

é uma solução para a equação

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b} = \frac{cx+d}{x^2+ex+f} \quad \ldots$$

mas não sabemos se é a única solução!

Sempre dá pra escrever soluções de equações usando o '[:=]'. Por exemplo, as duas soluções da equação

$$(x-2)(x-5)=0:$$

São:

$$\begin{array}{l} ((x-2)(x-5)=0)\,[x:=2] \;=\\ ((2-2)(2-5)=0) \\ ((x-2)(x-5)=0)\,[x:=5] \;=\\ ((5-2)(5-5)=0) \end{array}$$

Nenhum livro "básico" define "solução de uma equação" desse jeito — como "a substituição que transforma a equação numa igualdade verdadeira" — mas eu acho isso um bom modo de entender o que são "equações" e "soluções"...

Ah, note que eu não fiquei repetindo a condição "as suas fórmulas para c, d, e, f não podem conter 'x'" o tempo todo... eu deixei isso implícito. =)

Exercício 4: uma solução pro item (b)
Temos duas soluções para

$$(x-a)(x-b) = x^2 - 7x + 10:$$

uma é $a = 2$ e $b = 5$, e a outra é $a = 5$ e $b = 2$.
Lembre que Cálculo 2 é sobre chutar e testar.
A gente pode chutar que $a = 5$, $b = 2$, e que c, d, e, f são os que a gente obtém pelo item (a), e aí ver se isso nos leva a uma solução...

(Obs: isso funciona!!!)

Exercício 4: item (c)
Seja [PFP] esta igualdade aqui – o
"princípio por trás das frações parciais":

$$[\text{PFP}] \quad = \quad \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \quad = \quad \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \right)$$

c) Resolva o exercício 8.7.2 do livro do Miranda –
`http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=251`
e depois mostre qual é a substituição da forma

$$[\text{PFP}] \begin{bmatrix} a:=? \\ b:=? \\ A:=? \\ B:=? \end{bmatrix}$$

que "está por trás" da sua solução.

Exercício 5.

Use estas idéias para integrar:

$$\int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 3}{x + 2}\, dx \quad = \quad ?$$

Exercício 6.

O que acontece nos casos em que “teria vai um”?

a) Tente fazer a divisão com resto de x^3 por $x+2$.
Mais precisamente, encontre um polinômios $R(x)$ e $Q(x)$ tais que $(x^3) = Q(x) \cdot (x+2) + R(x)$ e $R(x)$ é no máximo de grau 1.
Teste a sua resposta!

b) Calcule $\int \frac{x^3}{x+2}\,dx$ pelo método acima.
Teste a sua resposta derivando a sua antiderivada para $\frac{x^3}{x+2}$.

c) Calcule $\int \frac{x^3}{x+2}\,dx$ fazendo a substituição $u = x+2$.
Você deve obter o mesmo resultado que na (b).

d) Calcule $\int \frac{x^2}{(x+1)(x-1)}\,dx$ por frações parciais.

Dica importante

Lembre que uns dos meus slogans é
"eu só vou corrigir os sinais de igual"...
No slide ?? a igualdade mais importante é a da última linha.
Nós vamos usá-la assim, pra transformar a integral original
em algo fácil de integrar:

$$\int \frac{2x^3+7x^2+7x+3}{x+2}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x^2+3x+1)\cdot(x+2)+1}{x+2}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x^2+3x+1)\cdot\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} + \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \int 2x^2+3x+1 + \frac{1}{x+2}\,dx$$

Uma questão da P1 de 2020.1

A questão 3 da P1 de 2020.1,

`http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C2-P1.pdf`

era de frações parciais, e eu pus nesse PDF um gabarito parcial dela, que não inclui nem as contas da divisão de polinômios nem a verificação de que a nossa integral está certa. Faça a questão, incluindo a parte que não está no gabarito.

Cálculo 2 - 2023.2

Aulas 13 até 16: Somas de Riemann

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2023.2-C2.html

Links

Umas figuras (minhas) que mostram como
definir a integral como dois limites:
2eT95 A integral como limite

Alguns slides da introdução ao curso:
2hT11 Atirei o pau no gato - tempo infinito
2hT12 Imagens de intervalos

Stewart:
StewPtCap5p8 (p.329) somas superiores e inferiores
StewPtCap5p10 (p.331) pontos amostrais
StewPtCap5p16 (p.337) definição da integral definida

Miranda:
Miranda207 7.1 Áreas e somas de Riemann
Miranda212 7.2 Integral definida
Miranda213 marcas
Miranda217 7.3. Definição 3: Soma superior e inferior

Leithold:
Leit5p35 (p.318) Figura 3
Leit5p36 (p.319) Figura 4
Leit5p41 (p.324) 5.5. A integral definida

Livro de Análise do Ross:
RossAp16 (p.269) The Riemann Integral

Quadros de 2023.2:
2hQ39 Quadros da aula 13 (25/set/2023)

Vou (re)usar muito material destes PDFzinhos:
2fT60 2022.2, aulas 13, 14 e 16: Somas de Riemann
2fT89 2022.2, aula 19, 14 e 16: o TFC1 e o TFC2
2eT39 2022.1, aula 15: infs e sups

Quadros de 2023.1:
2gQ32 Quadros da aula 15 (23/maio/2023)
2gQ34 Quadros da Aula 16 (26/maio/2023)
2gQ37 Quadros da Aula 18 (02/junho/2023)
2gQ39 Quadros da Aula 19 (06/junho/2023)

Spoiler: descontinuidades

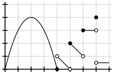
Digamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função qualquer.
Vamos definir o conjunto dos pontos de descontinuidade da f,
ou, pra abreviar, o "conjunto das descontinuidades da f", assim:

$$\mathsf{desc}(f) \;=\; \{\, x \in [a, b] \mid f \text{ é descontinua em } x \,\}$$

A expressão "f tem um número finito de pontos de descontinuidade",
que eu vou abreviar pra "f tem finitas descontinuidades" apesar
disso soar bem estranho em português, vai querer dizer:

$$\mathsf{desc}(f) \;\text{ é um conjunto finito}$$

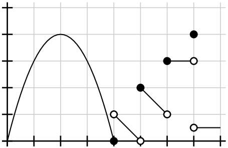
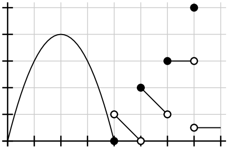
O conjunto vazio é finito, então toda f contínua "tem finitas
descontinuidades". Essa função aqui tem finitas descontinuidades:



A função de Dirichlet, que nós vimos aqui,
2dT104 (2021.2) A função de Dirichlet
tem infinitas descontinuidades.

Spoiler: descontinuidades (2)

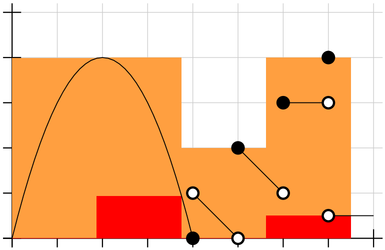
Sejam

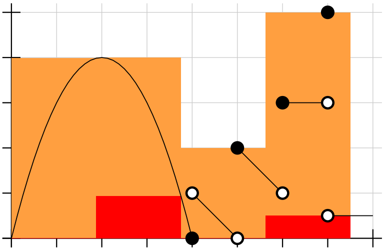
$f(x) =$  e $g(x) =$  .

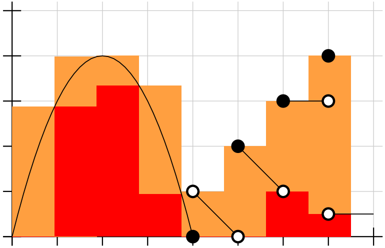
As figuras dos próximos slides mostram

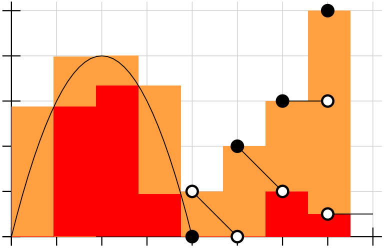
$$\overline{\underline{\int}}_{[0,7.5]_{2k}} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \overline{\underline{\int}}_{[0,7.5]_{2k}} g(x)\,dx$$

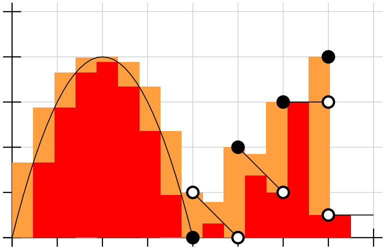
para vários valores de k. Use-as pra entender porque "na integral as descontinuidades não importam" — se só tivermos um número finito de descontinuidades.

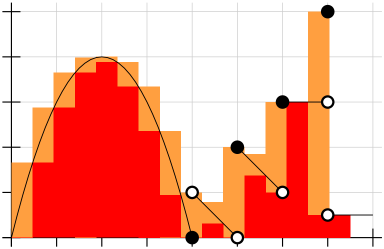


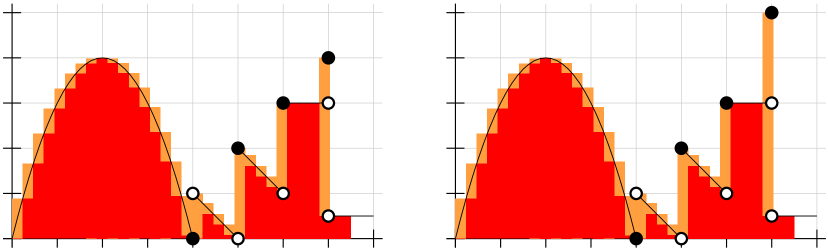


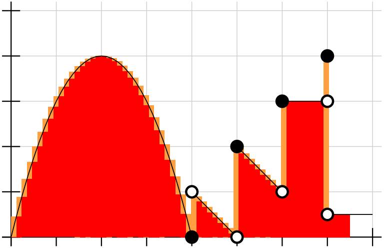


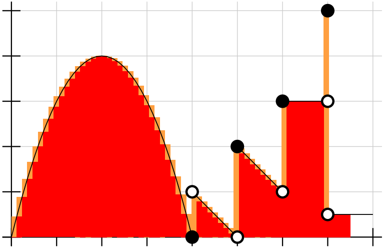


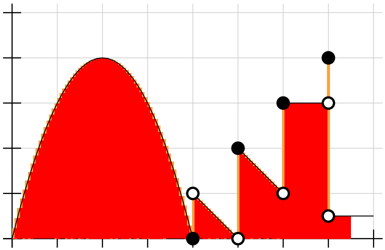


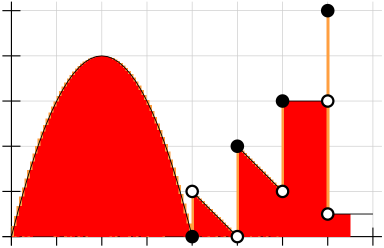










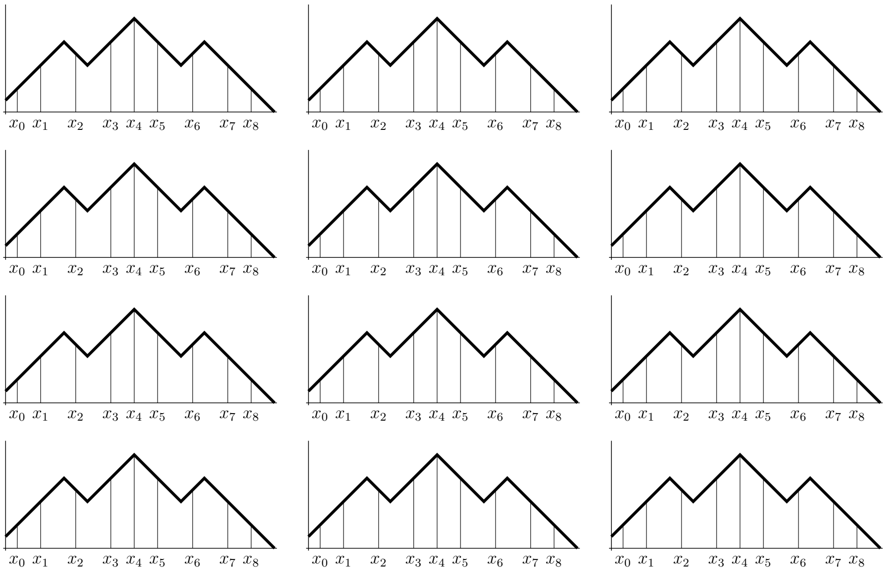


Montanhas

Seja $f(x)$ a função da próxima página – "as montanhas".
Você vai receber (pelo menos) uma cópia dessa página.
Faça cada item abaixo em um dos 12 gráficos da $f(x)$.

Represente graficamente cada um dos somatórios abaixo.
Se você tiver dificuldade com algum desses somatórios
faça ele em vários passos, como nestes slides:
2fT65 Somatórios
2gT85 Partições, informalmente

a) $\sum_{i=1}^{8} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$
b) $\sum_{i=1}^{8} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$
c) $\sum_{i=1}^{8} \max(f(x_{i-1}), f(x_i))(x_i - x_{i-1})$
d) $\sum_{i=1}^{8} \min(f(x_{i-1}), f(x_i))(x_i - x_{i-1})$
e) $\sum_{i=1}^{8} f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})(x_i - x_{i-1})$
f) $\sum_{i=1}^{8} \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1})$


x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

Miranda: somas inferiores e superiores

Nas páginas 217 e 218 o Miranda define as notações $I(f,P)$ e $S(f,P)$, e lá no meio dessas definições ele define

$$\min_{x\in I} f(x) \qquad \text{e} \qquad \max_{x\in I} f(x)$$

usando o truque do "vire-se": ele mostra uma figura e o leitor tem que se virar pra entender o que essas notações querem dizer... veja: Miranda217 (Definição 3)

Mais itens pra fazer na figura das montanhas

a) Entenda o que essas notações do Miranda querem dizer
e verifique que na figura das montanhas temos:

$$\begin{array}{rcl} \max(f(x_1), f(x_2)) & < & \displaystyle\max_{x\in[x_1,x_2]} f(x) \\ \displaystyle\min_{x\in[x_2,x_3]} f(x) & < & \min(f(x_2), f(x_3)) \end{array}$$

e depois represente nas montanhas:

b) $\sum_{i=1}^{8}(\max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x))(x_i - x_{i-1})$

c) $\sum_{i=1}^{8}(\min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x))(x_i - x_{i-1})$

Partições, informalmente

Informalmente uma partição de um intervalo $[a,b]$ é um modo de decompor $[a,b]$ em intervalos menores consecutivos. Por exemplo,

$$[2,7] = [2,3.5] \cup [3.5,4] \cup [4,6] \cup [6,7]$$

A definição "certa" é mais complicada... vamos vê-la daqui a pouco. O caso geral da igualdade acima é:

$$[a,b] = [a_1,b_1] \cup [a_2,b_2] \cup \ldots \cup [a_N,b_N],$$

onde:
N é o número de intervalos,
$a = a_1$, $b = b_N$, ("extremidades")
$a_i < b_i$ para todo i em que isto faz sentido ($i = 1,\ldots,N$)
$b_i = a_{i+1}$ para todo i e.q.i.f.s.; neste caso, $i = 1,\ldots,N-1$

Um jeito prático de definir uma partição é usando uma tabela.
Por exemplo, esta tabela

i	a_i	b_i	I_i
1	2	3.5	$[2,3.5]$
2	3.5	4	$[3.5,4]$
3	4	6	$[4,6]$
4	6	7	$[6,7]$

corresponde à partição de $[2,7]$ do início deste slide.

Compare com:
Miranda212 7.2 Integral definida
Leit5p41 (p.324) 5.5 A integral definida
StewPtCap5p8 (p.329) somas superiores e inferiores
StewPtCap5p10 (p.331) pontos amostrais
StewPtCap5p16 (p.337) definição da integral definida

Uma definição um pouco melhor de partição é a seguinte.
Digamos que P seja um subconjunto não-vazio e finito de $\mathbb{R}$, e que o menor elemento de P seja a e o maior seja b.
Então P é uma partição do intervalo $[a,b]$.

Exemplo: a partição $P = \{2,3.5,4,6,7\}$ corresponde a:

$$[2,7] = [2,3.5] \cup [3.5,4] \cup [4,6] \cup [6,7]$$

Pra fazer a tradução da "versão conjunto" pra "versão tabela" ponha os elementos de P em ordem e chame-os de $b_0,\ldots,b_N$; defina cada a_i como sendo b_{i-1} – por exemplo, $a_1 = b_0$ – e encontre a, b, e N. Depois que você tem a "versão tabela" é bem fácil obter a "versão união de intervalos".

Quando dizemos algo como "Seja P a partição $\{2.5,4,6\}$" estamos criando um contexto no qual há uma partição "default" definida... e neste contexto vamos ter valores definidos para N, a, b, e para cada a_i e b_i. Por exemplo...

Seja P a partição $\{2.5,4,6\}$. Então

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{i=1}^{N} f(b_i)\cdot(b_i-a_i) & = & \sum_{i=1}^{2} f(b_i)\cdot(b_i-a_i) \\
& = & f(b_1)\cdot(b_1-a_1) \\
& + & f(b_2)\cdot(b_2-a_2) \\
& = & f(4)\cdot(4-2.5) \\
& + & f(6)\cdot(6-4)
\end{array}$$

A definição de partição

Se P é um subconjunto finito e não-vazio de $\mathbb{R}$,
então podemos interpretar P como uma partição...
Por exemplo, se $P = \{200, 20, 42, 99, 63, 33, 20, 20\}$
então $P = \{20, 33, 42, 63, 99, 200\}$, e aí vamos interpretar
esse conjunto de 6 pontos – ordenados em ordem crescente –
como uma partição do intervalo $I = [a, b] = [20, 200]$ em
5 subintervalos ("$N = 5$"), assim:

$$\begin{array}{cccccccl}
20 & 33 & 42 & 63 & 99 & 200 & & \\
x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & & \\
a_1 & b_1 & & & & & & I_1 = [a_1, b_1] \\
 & a_2 & b_2 & & & & & I_2 = [a_2, b_2] \\
 & & a_3 & b_3 & & & & I_3 = [a_3, b_3] \\
 & & & a_4 & b_4 & & & I_4 = [a_4, b_4] \\
 & & & & a_5 & b_5 & & I_5 = [a_5, b_5] \\
a & & & & & b & & I = [a, b] = [x_0, x_N]
\end{array}$$

Exercícios sobre partições

a) Converta esta "partição"

$$[4,12] = [4,5] \cup [5,6] \cup [6,9] \cup [9,10] \cup [10,12]$$

para uma tabela. Neste caso quem são a, b e N?

b) Seja $P = \{2.5, 3, 4, 6, 10\}$.
Converta P para o "formato tabela" e para o "formato união de subintervalos", que é este aqui:

$$[a,b] = [a_1, b_1] \cup \ldots \cup [a_N, b_N].$$

c) Seja $P = \{4, 2, 1, 1.5\}$.
Interprete P como uma partição. Diga quem são o N, o a e o b dela e monte a tabela dos subintervalos dela.

d) Seja $P = [2,4]_6$.
Diga quem são os pontos da partição P.

e) Seja $P = [2,5]_{2^3}$.
Diga quem são os pontos da partição P.

Uma dica sobre simplificação
No Ensino Médio às vezes convencem a gente de que uma fração como $\frac{6}{4}$ tem que ser simplificada pra $\frac{3}{2}$, mas se a gente tem que listar uma sequência de números começando em 0 em que cada número novo é o anterior mais $\frac{1}{4}$ eu acho bem melhor escrever essa sequência como

$$\frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \ldots$$

do que como:

$$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \ldots$$

Lembre destes trechos da Dica 7: 2gT4
"Uma solução bem escrita é fácil de ler e fácil de verificar", e "Se as outras pessoas acharem que ler a sua solução é um sofrimento, isso é mau sinal; se as outras pessoas acharem que a sua solução está claríssima e que elas devem estudar com você, isso é bom sinal".

Aviso

As próximas páginas têm definições precisas de: partição, inf e sup, [inf] e [sup], integral definida, e um monte de definições intermediárias que a gente vai precisar pra entender as definições mais importantes...

O objetivo desta parte do curso é fazer vocês aprenderem um monte de $\boxed{\textit{técnicas}}$ *pra entenderem definições complicadas "visualizando o que elas querem dizer". Estas técnicas vão ser uma das partes do curso que vão ser mais úteis pras matérias seguintes.*

Aparentemente cada um dos exercícios deste PDF tem um monte de "dicas" de como fazê-lo. A gente normalmente imagina que essas dicas sejam só sugestões de um modo de chegar até o resultado final, mas aqui não é bem assim...

Lembre que neste slide daqui, da "Introdução ao curso",

2hT22 Sobre aulas expositivas

eu falei em "músculos mentais diferentes". Essa idéia vai valer aqui também; por exemplo, nos slides sobre o "Jogo colaborativo" eu digo que é pro jogador P escrever as suas jogadas num determinado formato e pro jogador O escrever as suas respostas num outro formato, e digo que se o jogador P não entender imediatamente a resposta do jogador O é porque o jogador P tem que rever certos exercícios básicos de "set comprehensions"...

Escrever as jogadas exatamente nesses formatos vai exercitar uma série de músculos mentais bem específicos.

Aviso (2)

Quando a gente vê um artista do Cirque de Soleil fazendo um número de aéreos a gente reconhece imediatamente que ele tem uma coordenação motora absurda e que ele tá usando um monte de músculos que a gente nunca usou e um monte de outros músculos que a gente nem sabia que existiam...

Quando a gente vê uma pessoa que entende bem – *e que é capaz de explicar claramente* – cada detalhe de uma definição bizarramente complicada como essa daqui, que o Stewart fez altos malabarismos pra ela caber em 9 linhas,

StewPtCap5p16 (p.337)

é a mesma coisa, só que essa pessoa treinou músculos mentais. *Nos exercícios deste PDFzinho a gente vai treinar vários dos músculos mentais que essas pessoas mais usam – e pra isso a gente vai fazer devagar e por escrito e com desenhos muitas coisas que elas fazem de cabeça.*

Também dá pra comparar o que a gente vai fazer aqui com a historinha deste slide:

2hT11 Atirei o pau no gato

Algumas mudanças de nota no Atirei o pau no gato exigem que a gente levante uns dedos da flauta ao mesmo tempo que a gente abaixa outros... a gente só consegue aprender isso treinando muitas vezes muito devagar, e enquanto a gente não treina bastante o som fica horrível.

Um jogo colaborativo

...ou: como debugar representações gráficas.
Pense num jogo colaborativo. Os jogadores se chamam P (“proponente”), e O (“oponente”). O P quer encontrar uma representação gráfica pro conjunto A, e à primeira vista o O quer mostrar que o P está errado... mas na verdade o objetivo dos dois é fazer com que o P chegue numa representação gráfica que não tem erro nenhum.

Digamos que

$$A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1, 2),\ y \in [1, 2) \,\}.$$

O P desenha uma representação gráfica com um nome diferente de A e “propõe” ela — por exemplo, o P diz isso aqui:

$A' =$ 

O oponente O diz: “verifica o ponto $(1, 1)$”. Os dois verificam o ponto $(1, 1)$ do A' e vêem que o desenho do A' é ambíguo no ponto $(1, 1)$, já que esse é um ponto de fronteira e o P não desenhou ele nem como linha grossa sólida nem com linha tracejada... então a resposta pra pergunta “$(1, 1) \in A'$?” não é nem **V** nem **F**, é “erro”, e portanto $A \neq A'$, e o P ainda não conseguiu a representação gráfica certa. O oponente O ganha essa rodada, e o P tem que propôr outra representação gráfica.

Aí o P propõe uma outra representação gráfica, com um outro nome, diferente de A e de A'. Por exemplo, P propõe isso aqui:

$A'' =$ 

O oponente O diz: “verifica o ponto $(0, 0)$”. Os dois verificam, e vêem que:

$$(0, 0) \notin A, \quad (0, 0) \in A''$$

E portanto $A \neq A''$, e o P ainda não conseguiu a representação gráfica certa. O oponente O ganha mais essa rodada.

Quando o P propõe um desenho que o O não consegue mostrar que está errado o P ganha a rodada.

Até vocês terem prática vocês vão jogar como o P, vão me mostrar as representações gráficas de vocês, e eu vou jogar como o O. Quando vocês tiverem mais prática vocês vão conseguir chutar representações gráficas (como o jogador P) e testá-las (fazendo o papel do jogador O vocês mesmos).

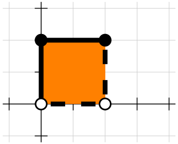
Um jogo colaborativo (2)

Represente graficamente os seguintes conjuntos:

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[1,2),\ y\in[1,2)\,\} \\ B & = & \{\,(x,2x) \mid x\in[1,2)\,\} \\ C & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x \ \wedge\ x+y<2\,\} \end{array}$$

Dica: todos eles vão dar subconjuntos do plano feitos de infinitos pontos, e você vai ter que adaptar as convenções que usamos pra desenhar intervalos pra desenhar *regiões*.

Use bolinhas cheias pra indicar "este ponto pertence ao conjunto", bolinhas ocas pra indicar "este ponto não pertence ao conjunto", linhas grossas contínuas pra indicar "esse trecho da fronteira pertence ao conjunto" e linhas tracejadas pra indicar "esse trecho da fronteira não pertence ao conjunto". Por exemplo:



Dica: se você não tem nenhuma prática com as duas notações da forma $\{\ldots \mid \ldots\}$ – por exemplo:

$$\begin{array}{rcl} \{\underbrace{a\in\{1,2,3,4\}}_{\text{gerador}} \mid \underbrace{a\ge 3}_{\text{filtro}}\} & = & \{3,4\} \\ \{\underbrace{10a}_{\text{expr}} \mid \underbrace{a\in\{1,2,3,4\}}_{\text{gerador}}\} & = & \{10,20,30,40\} \end{array}$$

então comece fazendo alguns exercícios daqui:

MpgP8 (até a p.12) Set Comprehensions

Todos os exercícios dessa parte do MPG dão conjuntos finitos, e os conjuntos A, B e C da coluna da esquerda são infinitos.

Imagens de intervalos

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ então em princípio a expressão $f(\{7, 8, 9\})$ deveria dar um erro, porque f é uma função que espera receber um número, e $\{7, 8, 9\}$ é um conjunto... mas aí normalmente a gente define que o comportamento da f quando ela recebe um conjunto vai ser este aqui:

$$f(A) \quad = \quad \{\, f(a) \mid a \in A \,\}$$

A gente diz que $f(A)$ é a imagem do conjunto A.

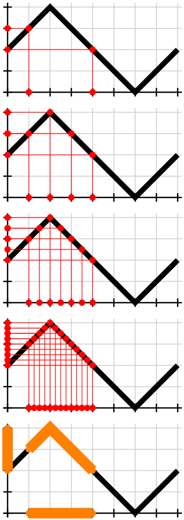
Algumas pessoas – como o Carlos, aqui: 2gT12 – acham que isto é sempre verdade:

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)].$$

Não seja como o Carlos!!! Seja como o Bob!!!

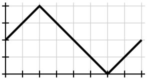
Nas figuras à direita temos:

$$\begin{array}{rcl}
f(\{1,4\}) & = & \{f(1), f(4)\} \\
 & = & \{3, 2\} \\
 & = & \{2, 3\} \\
f(\{1,2,3,4\}) & = & \{f(1), f(2), f(3), f(4)\} \\
 & = & \{2, 3, 4, 3\} \\
 & = & \{2, 3, 4\} \\
f([1,4]) & = & [2, 4] \\
[f(1), f(4)] & = & [3, 2] \\
 & = & \{\, y \in \mathbb{R} \mid 3 \leq y \leq 2 \,\} \\
 & = & \emptyset \\
 & \neq & f([1,4])
\end{array}$$



Imagens de intervalos: exercício

Seja $f(x)$ esta função:

$f(x) =$ 

Calcule estas imagens de intervalos:

a) $f([0,1])$	a') $f((0,1))$
b) $f([1,2])$	b') $f((1,2))$
c) $f([0,2])$	c') $f((0,2))$
d) $f([2,3])$	d') $f((2,3))$
e) $f([1,3])$	e') $f((1,3))$
f) $f([0,3])$	f') $f((0,3))$
g) $f([0,4])$	g') $f((0,4))$
h) $f([4,8])$	h') $f((4,8))$
i) $f([0,8])$	i') $f((0,8))$
j) $f([1,7])$	j') $f((1,7))$

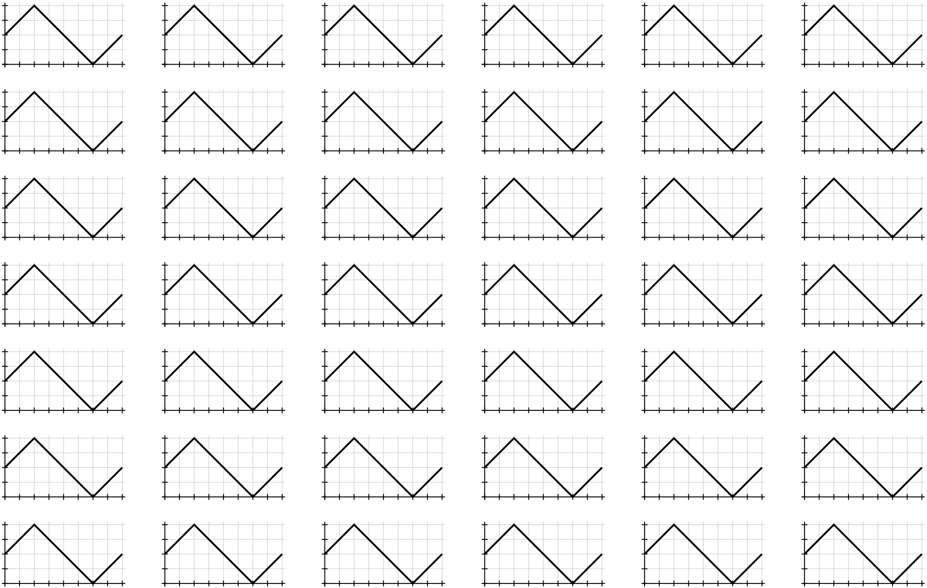
Dicas:

1) Faça os itens (a) até (j) primeiro. Os itens (a') até (j') são bem mais difíceis, e em alguns deles os resultados vão ser conjuntos fechados ou "semi-abertos".

2) O Leithold define intervalos semi-abertos aqui: Leit1p7

3) Nos casos em que você tiver dificuldade de encontrar o $f(I)$ desenhe num gráfico só:

a função $f(x)$,
o conjunto I (no eixo x),
o conjunto $\{\,(x, f(x)))\mid x \in I\,\}$
(sobre o gráfico da f),
e o conjunto $f(I)$ (no eixo y).



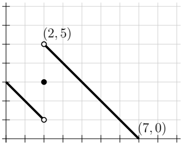
As definições de inf e sup

Digamos que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $B\subset\mathbb{R}$.
Vamos definir $\inf(f(B))$ e $\sup(f(B))$ —
e também $\inf(D)$ e $\sup(D)$, pra $D\subset\mathbb{R}$ —
desta forma:

$$\begin{array}{rcl}
\overline{\mathbb{R}} & = & \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\} \\
C & = & \{\,(x,f(x))\mid x\in B\,\} \\
D & = & \{\,f(x)\mid x\in B\,\} \\
E & = & \{\,y\in\mathbb{R}\mid \exists x\in B.\ f(x)=y\,\} \\
U & = & \{\,y\in\overline{\mathbb{R}}\mid \forall d\in D.\ d\le y\,\} \\
L & = & \{\,y\in\overline{\mathbb{R}}\mid \forall d\in D.\ y\le d\,\} \\
(\alpha=\sup(D)) & = & \alpha\in U\wedge(\forall u\in U.\ \alpha\le u) \\
(\beta=\inf(D)) & = & \beta\in L\wedge(\forall \ell\in L.\ \ell\le\beta)
\end{array}$$

Agora uma função descontínua

Sejam $f(x) =$



e $B = [1,3]$.

Exercício

a) Represente graficamente estes conjuntos — as definições deles são as mesmas do slide anterior:

$$\begin{array}{rcl} C &=& \{\, (x, f(x)) \mid x \in B \,\} \\ D &=& \{\, f(x) \mid x \in B \,\} \\ E &=& \{\, y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in B.\ f(x) = y \,\} \\ U &=& \{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall d \in D.\ d \le y \,\} \\ L &=& \{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall d \in D.\ y \le d \,\} \end{array}$$

Dica pro L e pro U: desenhe o infinito perto, como aqui:

2eT40 Uma figura

Lembre que

$$\begin{array}{rcl} B &=& [1,3] \\ D &=& f(B) \end{array}$$

e que definimos o inf e o sup desta forma:

$$\begin{array}{rcl} (\alpha = \sup(D)) &=& \alpha \in U \land (\forall u \in U.\ \alpha \le u) \\ (\beta = \inf(D)) &=& \beta \in L \land (\forall \ell \in L.\ \ell \le \beta) \end{array}$$

Isso é uma definição estranha e indireta... pode ser que a gente calcule $(42 = \inf(D))$ e $(99 = \inf(D))$ por ela e os dois dêem verdadeiro – se isso acontecer então $\inf(D)$ não vai um número!!!

Exercício (cont.)

Calcule:

b) $(6 = \sup(D))$
c) $(5 = \sup(D))$
d) $(4 = \sup(D))$
e) $(2 = \sup(D))$
f) $(1 = \sup(D))$
g) $(0 = \sup(D))$

“Para todo” (∀) e “existe” (∃)

$$\begin{array}{rcl}
(\forall a \in \{2,3,5\}.a^2 < 10) & = & (a^2 < 10)[a := 2] \land \\
& & (a^2 < 10)[a := 3] \land \\
& & (a^2 < 10)[a := 5] \\
& = & (2^2 < 10) \land (3^2 < 10) \land (5^2 < 10) \\
& = & (4 < 10) \land (9 < 10) \land (25 < 10) \\
& = & \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \\
& = & \mathbf{F}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
(\exists a \in \{2,3,5\}.a^2 < 10) & = & (a^2 < 10)[a := 2] \lor \\
& & (a^2 < 10)[a := 3] \lor \\
& & (a^2 < 10)[a := 5] \\
& = & (2^2 < 10) \lor (3^2 < 10) \lor (5^2 < 10) \\
& = & (4 < 10) \lor (9 < 10) \lor (25 < 10) \\
& = & \mathbf{V} \lor \mathbf{V} \lor \mathbf{F} \\
& = & \mathbf{V}
\end{array}$$

Visualizando '∀'s e '∃'s

Dá pra *visualizar* o que a expressão

$$(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.\, 2 \leq x < 4 \lor x = 6)$$

"quer dizer" visualizando os '**V**'s e '**F**'s de expressões mais simples, e combinando esses "mapas" de '**V**'s e '**F**'s. E digamos que:

$$\begin{array}{rcl} F(x) &=& (2 \leq x), \\ G(x) &=& (x \leq 4), \\ H(x) &=& (x = 6) \end{array}$$

Então temos:

$$\begin{array}{rl} & (\forall x \in \{1,\ldots,7\}.\, 2 \leq x < 4 \lor x = 6) \\ = & (\forall x \in \{1,\ldots,7\}.\, (2 \leq x \land x < 4) \lor x = 6) \\ = & (\forall x \in \{1,\ldots,7\}.\, (F(x) \land G(x)) \lor H(x)) \end{array}$$

Às vezes vamos ter que fazer figuras com muitos '**V**'s e '**F**'s, e vai ser mais fácil visualizar onde estão os '**V**'s e '**F**'s delas se usarmos sinais mais fáceis de distinguir...

Vou usar essa convenção aqui:
O **V** é uma bolinha preta, ou sólida: $\bullet$
O **F** é uma bolinha branca, ou oca: $\circ$

Compare:

$$\begin{array}{lcl} (\forall x \in \{1,\ldots,7\}.2 \leq x) &=& \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \\ (\forall x \in \{1,\ldots,7\}. \quad\; x < 4) &=& \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1,\ldots,7\}.2 \leq x < 4) &=& \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1,\ldots,7\}. \qquad\quad x = 6) &=& \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1,\ldots,7\}.2 \leq x < 4 \lor x = 6) &=& \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} (\forall x \in \{1,\ldots,7\}.F(x)) &=& \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \\ (\forall x \in \{1,\ldots,7\}. \qquad G(x)) &=& \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1,\ldots,7\}.F(x) \land G(x)) &=& \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1,\ldots,7\}. \qquad\qquad H(x)) &=& \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1,\ldots,7\}.F(x) \land G(x) \lor H(x)) &=& \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} (\forall x \in \{1,\ldots,7\}.F(x)) &=& \circ \land \bullet \land \bullet \land \bullet \land \bullet \land \bullet \land \bullet \\ (\forall x \in \{1,\ldots,7\}. \qquad G(x)) &=& \bullet \land \bullet \land \bullet \land \circ \land \circ \land \circ \land \circ \\ (\forall x \in \{1,\ldots,7\}.F(x) \land G(x)) &=& \circ \land \bullet \land \bullet \land \circ \land \circ \land \circ \land \circ \\ (\forall x \in \{1,\ldots,7\}. \qquad\qquad H(x)) &=& \circ \land \circ \land \circ \land \circ \land \circ \land \bullet \land \circ \\ (\forall x \in \{1,\ldots,7\}.F(x) \land G(x) \lor H(x)) &=& \circ \land \bullet \land \bullet \land \circ \land \circ \land \bullet \land \circ \end{array}$$

É isso que a gente vai fazer pra analisar expressões como $(\forall x \in A.\_\_\_\_)$ e $(\exists x \in A.\_\_\_\_)$ e descobrir quais são verdadeiras e quais não — mesmo quando o conjunto A é um conjunto infinito, como $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ ou $[2,10]$.

Você pode fazer as suas próprias definições — como o meu "$\bullet = \mathbf{V}$ e $\circ = \mathbf{F}$" — mas elas têm que ficar claras o suficiente... releia isto:

2gT4 "Releia a Dica 7"

Retângulos acima e abaixo

Lembre que eu contei que em cursos tradicionais de Cálculo 2 – aqueles em que as pessoas passam centenas de horas fazendo contas à mão, e mais outras centenas de horas estudando por aqueles livros que fingem que certas coisas dificílimas são óbvias – as pessoas acabam aprendendo algumas coisas super úteis que não aparecem listadas explicitamente no programa do curso...

Uma dessas coisas é aprender a entender definições que *aparentemente* envolvem um número infinito de contas. Se a gente for como o Bob a gente consegue visualizar o que essas definições "querem dizer".

As definições formais de "retângulo acima (ou abaixo) da curva" e "melhor retângulo acima (ou abaixo) da curva" são assim – elas aparentemente precisam de infinitas contas.

Instruções de desenho (explícitas)

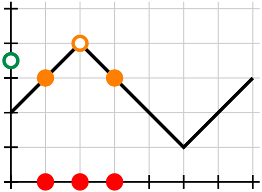
Sejam $f(x) =$  ,

$$\text{e } P(y) \;=\; \underbrace{\forall x \in \{1,2,3\}.\ \underbrace{f(\underbrace{\;x\;}_{\text{em } (x,0)}) < y}_{\text{em } (x,f(x))}}_{\text{em } (0,y)}.$$

As anotações sob as chaves são "instruções de desenho" que o Bob vai usar pra calcular cada $P(y)$ de cabeça, e pra visualizar o que $P(y)$ "quer dizer"...

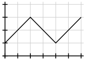
Na próxima página eu fiz as figuras pra $P(3.5)$.

$$
\begin{aligned}
P(3.5) &= \underbrace{\forall x \in \{1,2,3\}.\, \underbrace{f(\underbrace{\ x\ }_{\text{em } (x,0)})\ < 3.5}_{\text{em } (x,f(x))}}_{\text{em } (0,3.5)} \\
&= \underbrace{\underbrace{(f(\underbrace{\ 1\ }_{\text{em } (1,0)}) < 3.5)}_{\text{em } (1,f(1))} \ \wedge\ \underbrace{(f(\underbrace{\ 2\ }_{\text{em } (2,0)}) < 3.5)}_{\text{em } (2,f(2))} \ \wedge\ \underbrace{(f(\underbrace{\ 3\ }_{\text{em } (3,0)}) < 3.5)}_{\text{em } (3,f(3))}}_{\text{em } (0,3.5)} \\
&= \underbrace{(\underbrace{3 < 3.5}_{\text{em } (1,3)}) \ \wedge\ (\underbrace{4 < 3.5}_{\text{em } (2,4)}) \ \wedge\ (\underbrace{3 < 3.5}_{\text{em } (3,3)})}_{\text{em } (0,3.5)} \\
&= \underbrace{(\underbrace{\ \bullet\ }_{\text{em } (1,3)}) \ \wedge\ (\underbrace{\ \circ\ }_{\text{em } (2,4)}) \ \wedge\ (\underbrace{\ \bullet\ }_{\text{em } (3,3)})}_{\text{em } (0,3.5)} \\
&= \underbrace{\ \circ\ }_{\text{em } (0,3.5)}
\end{aligned}
$$



Instruções de desenho: exercício

Sejam:

$$f(x) = $$  ,

$$\begin{array}{rcl} P(y) &=& \forall x \in \{1,2,3\}.f(x) < y \ , \\ Q(y) &=& \forall x \in \{1,2,3\}.f(x) \leq y \ , \\ R(y) &=& \forall x \in \{1,2,3\}.f(x) \geq y \ , \\ S(y) &=& \forall x \in \{1,2,3\}.f(x) > y \ , \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} P'(y) &=& \forall x \in [3,5].f(x) < y \ , \\ Q'(y) &=& \forall x \in [3,5].f(x) \leq y \ , \\ R'(y) &=& \forall x \in [3,5].f(x) \geq y \ , \\ S'(y) &=& \forall x \in [3,5].f(x) > y \ . \end{array}$$

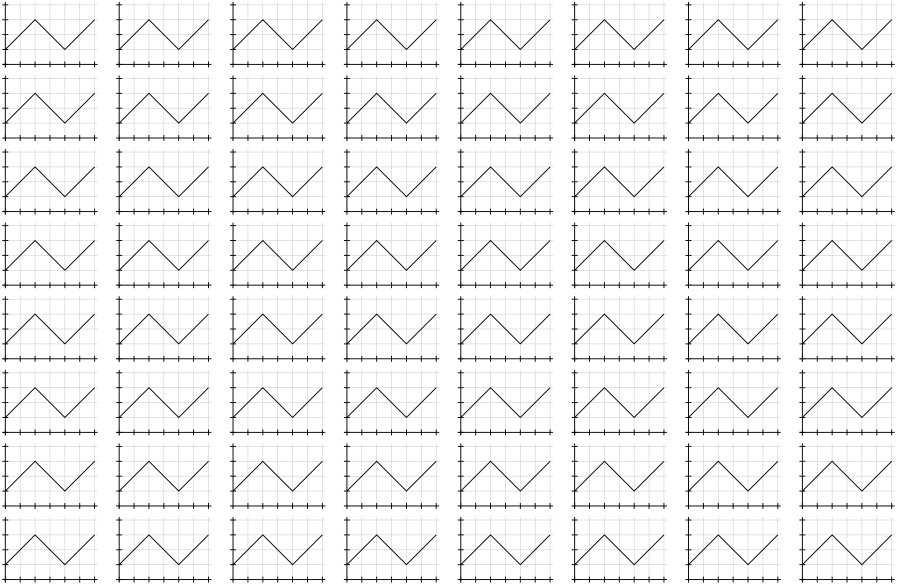
Para cada uma das expressões à direita visualize-a, represente-a graficamente numa das cópias do gráfico da $f(x)$ da próxima página, e dê o resultado dela.
Note que aqui eu não estou dando instruções de desenho *explícitas* – você vai ter que escolher como você vai fazer pra visualizar cada expressão.

a) $P(3.5), P(3.0), \ldots, P(0.5)$
b) $Q(3.5), Q(3.0), \ldots, Q(0.5)$
c) $R(3.5), R(3.0), \ldots, R(0.5)$
d) $S(3.5), S(3.0), \ldots, S(0.5)$

e) $P'(3.5), P'(3.0), \ldots, P'(0.5)$
f) $Q'(3.5), Q'(3.0), \ldots, Q'(0.5)$
g) $R'(3.5), R'(3.0), \ldots, R'(0.5)$
h) $S'(3.5), S'(3.0), \ldots, S'(0.5)$

Nos itens (e) até (f) os seus desenhos vão ter infinitas bolinhas... aliás, você vai ter que fazer desenhos que *finjam* que têm infinitas bolinhas, e nos quais o leitor consiga entender o que você quis representar... veja este slide antigo:

2dT142 “E pra conjuntos infinitos?”



Instruções de desenho: outro exercício

A seção "Mais sobre bolinhas" daqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2-4.pdf#page=29
tem dicas sobre como visualizar subconjuntos "definidos por proposições", como este aqui:

$$\{\, x \in A \mid P(a) \,\}$$

A gente primeiro marca cada ponto de A com uma bolinha ou preta ou branca, e depois a gente pega o conjunto das bolinhas pretas e interpreta ele como um outro conjunto – o resultado.

Use isto pra visualizar cada um dos conjuntos à direita e pra encontrar uma descrição mais simples para cada um deles. Geralmente essas "descrições mais simples" vão ser em notação de intervalos.

As funções $P, \ldots, S, P', \ldots, S'$ são as do exercício 8. O símbolo $\overline{\mathbb{R}}$ denota a "reta real estendida":

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbb{R}} &= \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \\
&= (-\infty, +\infty) \cup \{-\infty, +\infty\} \\
&= [-\infty, +\infty]
\end{aligned}$$

Para mais detalhes, veja:
https://en.wikipedia.org/wiki/Extended_real_number_line

a) $\{\, y \in [0,3] \mid P(y) \,\}$
b) $\{\, y \in [0,3] \mid Q(y) \,\}$
c) $\{\, y \in [0,3] \mid R(y) \,\}$
d) $\{\, y \in [0,3] \mid S(y) \,\}$

a') $\{\, y \in [0,3] \mid P'(y) \,\}$
b') $\{\, y \in [0,3] \mid Q'(y) \,\}$
c') $\{\, y \in [0,3] \mid R'(y) \,\}$
d') $\{\, y \in [0,3] \mid S'(y) \,\}$

e) $\{\, y \in \mathbb{R} \mid P(y) \,\}$
f) $\{\, y \in \mathbb{R} \mid Q(y) \,\}$
g) $\{\, y \in \mathbb{R} \mid R(y) \,\}$
h) $\{\, y \in \mathbb{R} \mid S(y) \,\}$

i) $\{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid P(y) \,\}$
j) $\{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid Q(y) \,\}$
k) $\{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid R(y) \,\}$
l) $\{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid S(y) \,\}$

Algumas somas de Riemann

Vou definir:

$$\begin{array}{rcl}
[\text{L}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i - a_i) \\
[\text{R}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(b_i)(b_i - a_i) \\
[\text{Trap}] & = & \sum_{i=1}^{N} \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i - a_i) \\
[\text{M}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(\frac{a_i+b_i}{2})(b_i - a_i) \\
[\text{min}] & = & \sum_{i=1}^{N} \min(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\text{max}] & = & \sum_{i=1}^{N} \max(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\text{inf}] & = & \sum_{i=1}^{N} \inf(f([a_i, b_i]))(b_i - a_i) \\
[\text{sup}] & = & \sum_{i=1}^{N} \sup(f([a_i, b_i]))(b_i - a_i)
\end{array}$$

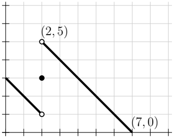
Compare com: os exercícios das montanhas,
as páginas 208–210 do Miranda (Miranda208), e:
`https://pt.wikipedia.org/wiki/Soma_de_Riemann`

Nas duas últimas linhas o $f([a_i, b_i])$ é a imagem de um intervalo. Temos:

$$\begin{array}{rcl}
f(A) & = & \{\, f(a) \mid a \in A \,\} \\
f(\{7,8,9\}) & = & \{\, f(a) \mid a \in \{7,8,9\} \,\} \\
 & = & \{f(7), f(8), f(9)\}
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rcl}
[a,b]_N &=& \{\,a+k(\frac{b-a}{N}) \mid k\in\{0,\ldots,N\}\,\} \\
&=& \{a+0(\frac{b-a}{N}),\ a+1(\frac{b-a}{N}),\ \ldots,\ a+N(\frac{b-a}{N})\} \\
&=& \{a,\ a+\frac{b-a}{N},\ a+2\frac{b-a}{N},\ a+3\frac{b-a}{N},\ \ldots,\ b\} \\
\overline{\int}_P f(x)\,dx &=& [\sup]_P \\
&=& \sum_{i=1}^{N} \sup(f([a_i,b_i]))(b_i-a_i) \\
\underline{\int}_P f(x)\,dx &=& [\inf]_P \\
&=& \sum_{i=1}^{N} \inf(f([a_i,b_i]))(b_i-a_i) \\
\overline{\underline{\int}}_P f(x)\,dx &=& \overline{\int}_P f(x)\,dx - \underline{\int}_P f(x)\,dx \\
\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &=& \lim_{k\to\infty} \overline{\int}_{[a,b]_{2^k}} f(x)\,dx \\
\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &=& \lim_{k\to\infty} \underline{\int}_{[a,b]_{2^k}} f(x)\,dx \\
\overline{\underline{\int}}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &=& \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx - \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \\
\left(\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx\ \text{ existe}\right) &=& \left(\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx\right) \\
&=& \left(\overline{\underline{\int}}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = 0\right) \\
\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &=& \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \qquad \text{(se a integral existir)} \\
&=& \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \qquad \text{(se a integral existir)}
\end{array}
$$

Aproximações por cima e por baixo

Sejam: $f(x) =$ 

,

$P = \{3, 4, 5\}$,
$Q = \{1, 3, 4, 5\}$,

e por enquanto considere que:

$$\begin{array}{rcl} \sup(f(B)) & = & \max_{x \in B} f(x) \quad \text{e} \\ \inf(f(B)) & = & \min_{x \in B} f(x). \end{array}$$

Exercício.
Represente graficamente:

a) $\overline{\int}_P f(x)\,dx$

b) $\underline{\int}_P f(x)\,dx$

c) $\overline{\underline{\int}}_P f(x)\,dx$

d) $\overline{\int}_Q f(x)\,dx$

e) $\underline{\int}_Q f(x)\,dx$

f) $\overline{\underline{\int}}_Q f(x)\,dx$

g) $\overline{\underline{\int}}_{[1,5]_2} f(x)\,dx$

h) $\overline{\underline{\int}}_{[1,5]_4} f(x)\,dx$

Cálculo 2 - 2023.2

Aula 16: a função de Dirichlet

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2023.2-C2.html

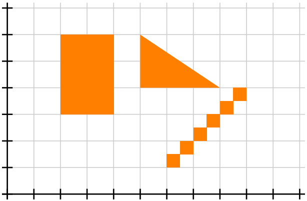
Links

2gQ39 (2023.1) Quadros da aula 19 (06/jun/2023)

Áreas no olhômetro

A partir daqui eu vou supor que todo mundo sabe calcular determinadas áreas “no olho” — contando quadradinhos, fazendo “base · altura” (pra retângulos), ou fazendo “(base · altura)/2” (pra triângulos)...

Tente calcular a área da figura abaixo de cabeça.
Se você não conseguir peça ajuda URGENTE!!!



A função de Dirichlet
A *função de Dirichlet* é definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{quando } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{quando } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ela não tem um nome oficial, então
vamos chamá-la de 'f' nos próximos slides.

O gráfico dela alterna freneticamente entre $y = 0$ e $y = 1$.

Lembre que:
os números racionais são os cuja expansão decimal é "periódica", e os irracionais são os que não são assim;
entre cada dois racionais diferentes há um irracional, e
entre cada dois irracionais diferentes há um racional...

A função de Dirichlet (2)

Lembre que podemos obter um irracional entre, digamos, $a = \frac{10}{7} = 1.42857\underline{142857}$ e $b = \frac{1285715}{900000} = 1.428572\underline{2}$, modificando a expansão decimal de um dele e trocando-a pela expansão decimal de $\sqrt{2}$ a partir de um certo ponto... Por exemplo:

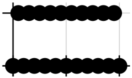
$$\begin{array}{rcl} \sqrt{2} & = & 1.41421356237... \\ b & = & 1.42857\underline{222222}... \\ c & = & 1.42857156237... \\ a & = & 1.42857\underline{142857}... \end{array}$$

Neste caso temos $a < c < b$, com $a, b \in \mathbb{Q}$ e $c \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Dá pra fazer algo parecido pra obter um racional entre dois irracionais.

A função de Dirichlet (3)

Dá pra desenhar o gráfico da função de Dirichlet assim:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{quando } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{quando } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases} \quad =$$



Repare que isso só funciona porque o desenho é claramente ambíguo... um leitor "normal" não consegue descobrir no olho quais são as coordenadas das bolinhas em $y = 1$ e em $y = 0$, então ele é obrigado a olhar pra definição formal da $f(x)$...

e aí quando ele entende a definição formal da $f(x)$ ele descobre que o desenho quer dizer "muitas bolinhas em $y = 1$, muito próximas umas das outras, e muitas bolinhas em $y = 0$ muito próximas das outras"...

...e ele entende que esse "muitas" quer dizer "infinitas".

Exercício 19.
A função de Dirichlet é um dos exemplos mais simples de uma função que não é integrável.

Sejam $f(x)$ a função de Dirichlet,
e $d_k = \overline{\underline{\int}}_{[0,1]_{2^k}} f(x)\,dx$.

a) Represente graficamente d_0, d_1, d_2, d_3.
b) Calcule no olhômetro o limite $\lim_{k\to\infty} d_k$.
(Dica: esse limite não dá zero...)

c) Represente graficamente $[\max]_{[0,1]_{2^2}}$ e $[\min]_{[0,1]_{2^2}}$.
(Dica: o método do máximo "não enxerga" os pontos com $y = 1$...)

Cálculo C2 - 2023.2

Aula 16: o TFC1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2023.2-C2.html

Links

2hT27 (2023.2) Exercício 1: faça um gráfico da $G'(x)$
2hT32 (2023.2) Exercício 5: $G(x) = \int_{t=3}^{t=x} g(t)\, dt$

StewPtCap2p26 (p.97) O teorema do confronto
StewPtCap5p30 (p.351) TFC1
StewPtCap5p31 (p.352) TFC1, demonstração

Leit2p61 (p.114) 2.8 Teorema do confronto ou do sanduíche
Leit5p62 (p.345) 5.8.1 TFC1

MirandaP29 Teorema do confronto
MirandaP225 TFC1

RossAp38 (p.291) Fundamental Theorem of Calculus

Introdução (2021.2)

Digamos que $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função integrável.
Digamos que $c \in [a,b]$.
Digamos que a função $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$F(t) \;\; = \int_{x=c}^{x=t} f(x)\,dx.$$

O TFC1 tem duas versões.
A versão mais simples diz o seguinte:
se a função f é contínua então para todo $t \in (a,b)$ vale:

$$F'(t) \;\; = f(t). \qquad\qquad (*)$$

A versão mais complicada do TFC1, que vamos ver depois, não supõe que a função f é contínua.

Nós vamos ver um argumento visual que mostra que a igualdade $(*)$ é verdade. Esse argumento visual é quase uma demonstração formal, num sentido que eu vou explicar depois.

Introdução (2)

Digamos que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função contínua.
Digamos que $c\in[a,b]$.
Digamos que a função $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ é definida por:

$$F(t) \quad = \int_{x=c}^{x=t} f(x)\,dx.$$

Então:

$$\begin{array}{rcl}
F'(t) & = & \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(t+\varepsilon)-F(t)}{\varepsilon} \\
& = & \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\int_{x=c}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx - \int_{x=c}^{x=t} f(x)\,dx}{\varepsilon} \\
& = & \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx}{\varepsilon} \\
& = & \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx \\
& \overset{???}{=} & f(t)
\end{array}$$

Introdução (3)

Digamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.
Digamos que $c \in [a, b]$.
Digamos que a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$F(t) \;=\; \int_{x=c}^{x=t} f(x)\,dx.$$

O nosso argumento visual vai mostrar que:

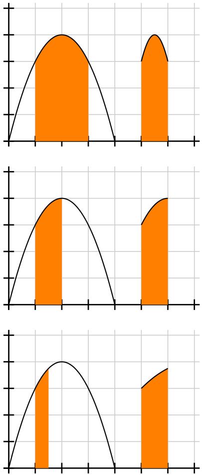
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx \;=\; f(t).$$

Primeiro exemplo:
$f(x)$ é a nossa parábola preferida, e $t = 1$.

Primeira figura: $\varepsilon = 2$.
Segunda figura: $\varepsilon = 1$.
Terceira figura: $\varepsilon = 1/2$.

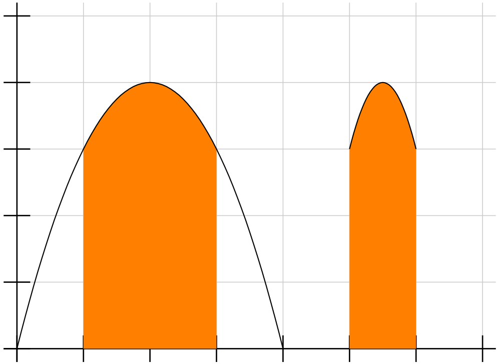
À esquerda: $\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$.
À direita: $\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$.

Repare que a área em laranja à esquerda sempre tem base ε e a área em laranja à direita sempre tem base $\varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1$.



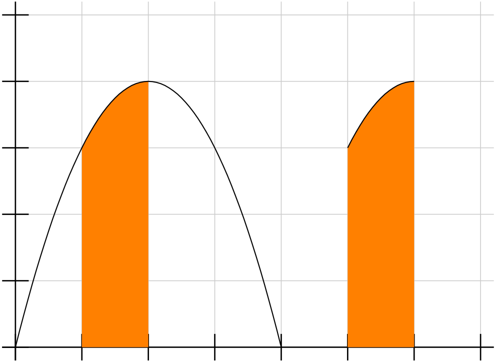
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 2\text{:}$$



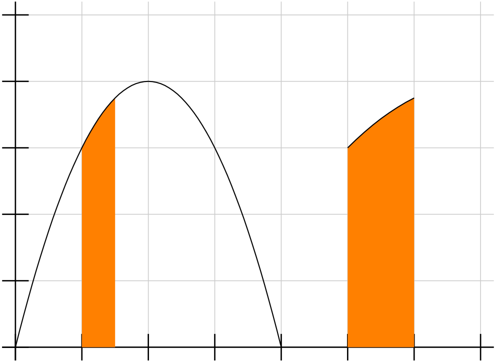
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1\text{:}$$



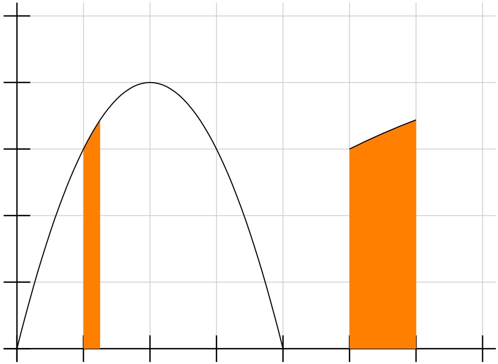
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/2\text{:}$$



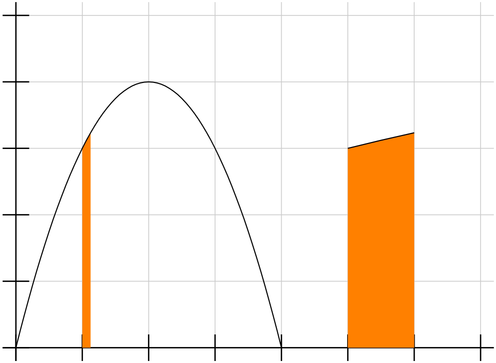
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/4:$$



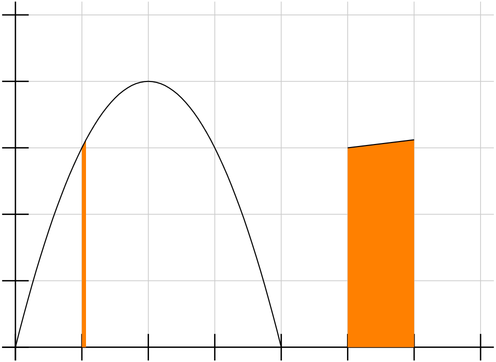
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/8\text{:}$$



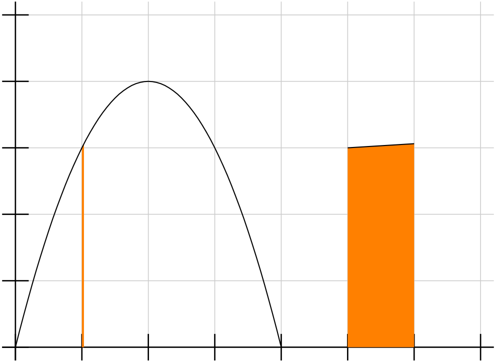
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/16\text{:}$$



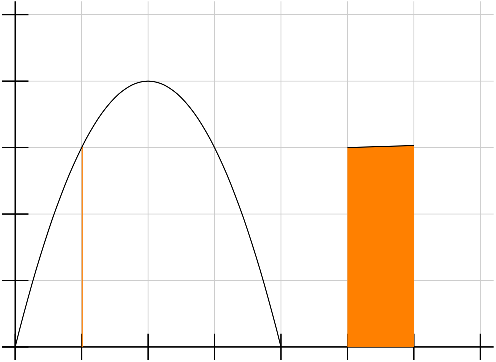
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/32\text{:}$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/64:$$

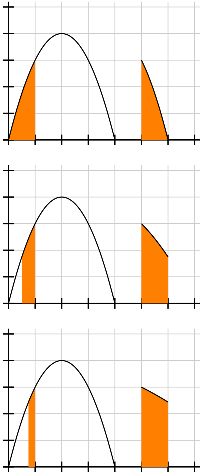


Agora com ε negativo!...

$f(x)$ é a nossa parábola preferida, e $t = 1$.

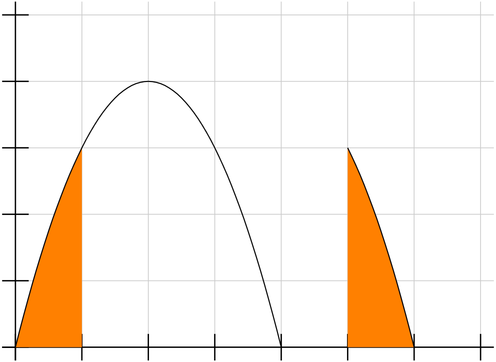
Primeira figura: $\varepsilon = -1$.
Segunda figura: $\varepsilon = -1/2$.
Terceira figura: $\varepsilon = -1/4$.

À esquerda: $\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$.
À direita: $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$.



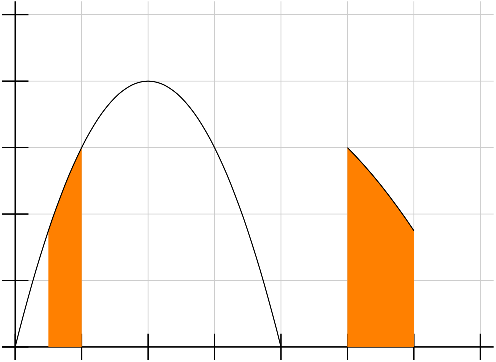
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon=-1\text{:}$$



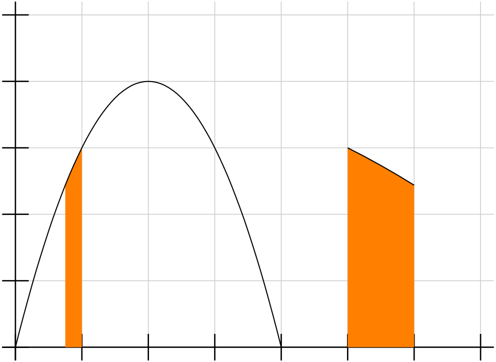
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/2:$$



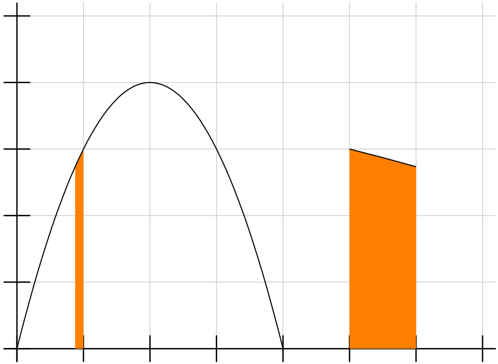
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/4\text{:}$$



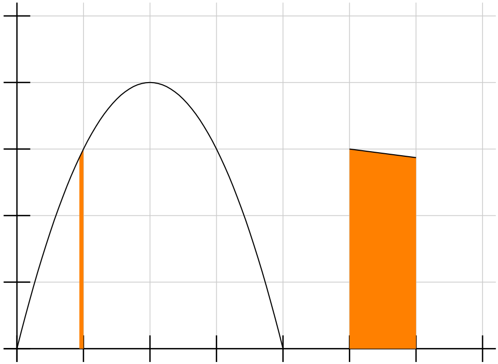
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/8\text{:}$$



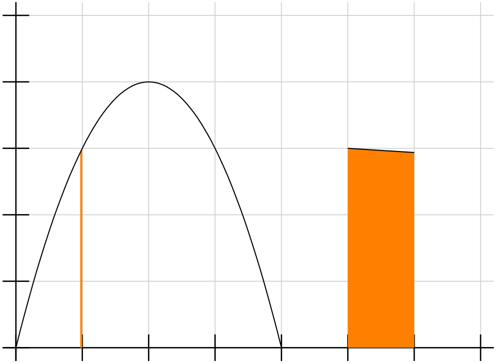
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/16\text{:}$$



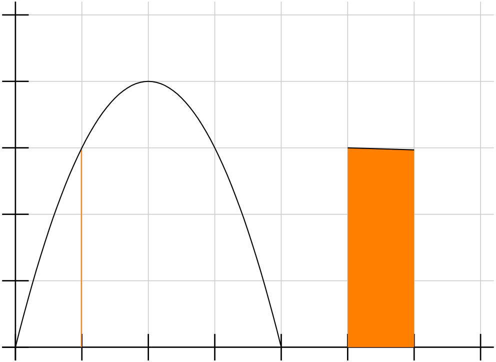
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/32\text{:}$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/64\text{:}$$



Exercício 5.
Seja $f(x)$ a função à direita.
Seja $t = 2$.

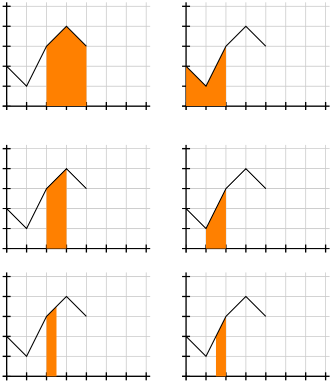
a) Desenhe $\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$
para $\varepsilon = 2$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 1/2$.

b) Desenhe $\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$
para $\varepsilon = -2$, $\varepsilon = -1$, $\varepsilon = -1/2$.

Dica: comece entendendo as
áreas em laranja à direita!

c) Quanto você acha que dá
$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$?

d) Quanto você acha que dá
$\lim_{\varepsilon \to 0^-} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$?



Exercício 6.
Seja $f(x)$ a função à direita.
Seja $t = 2$.

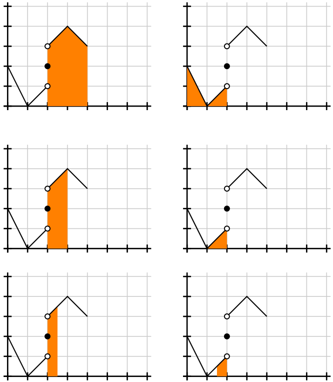
a) Desenhe $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$
para $\varepsilon = 2$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 1/2$.

b) Desenhe $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$
para $\varepsilon = -2$, $\varepsilon = -1$, $\varepsilon = -1/2$.

Dica: comece entendendo as áreas em laranja à direita!

c) Quanto você acha que dá
$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$?

d) Quanto você acha que dá
$\lim_{\varepsilon\to 0^-} \frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$?



Cálculo C2 - 2023.2

Dicas pra P1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.2-C2.html

Sobre as questões

A P1 vai ter uma questão de derivar e integrar funções no olhômetro, como essas daqui:
2hT32 (2023.2) Exercício 5
2gT111 (2023.1) P1, questão 5
2gT117 (2023.1) P1, questão 5, gabarito
Essa questão vai valer 1.0 (pontos).

A P1 vai ter uma questão de "mostre que neste caso aqui a fórmula do TFC2 dá um resultado errado", como esta:
2fT110 (2022.2) P1, questão 3
2fT114 (2022.2) P1, questão 3, gabarito

A P1 vai ter uma questão de substituição trigonométrica em que o "termo malvado" vai ser da forma $\sqrt{1-s^2}$, como estas: isso é esse aqui,
2gT50 (2023.1) Caixinhas com mais anotações (2)
2gT110 (2023.1) P1, questão 1
2gT113 (2023.1) P1, questão 1, gabarito

A P1 vai ter uma questão de "substituição não trigonométrica", como esta aqui:
2gT111 (2023.1) P1, questão 2
2gT114 (2023.1) P1, questão 2, gabarito

A P1 vai ter uma questão de frações parciais da forma $\int \frac{ax+b}{x^2+cx+d}\,dx$. O melhor modo de estudar pra ela é fazendo o exercício 8 daqui,
2hT95 Funções racionais
que depende de todos os exercícios anteriores.

A VR e a VS vão ter questões de substituição trigonométrica com termos malvados mais complicados e vão ter questões de frações parciais com frações impróprias. *Faça uma boa P1 e a uma boa P2 e não fique nem em VR nem em VS!!!*

Aqui tem um exemplo de substituição trigonométrica em que o termo malvado é mais complicado:
2fT109 (2022.2) P1, questão 1
2fT112 (2022.2) P1, questão 1, gabarito

Mais dicas

Leia todos os slides da introdução ao curso:
2hT2 Aula 0: introdução ao curso

Nas provas de Cálculo 2 a gente corrige o que você escreveu, não o que você pensou. Nas matérias de matemática mais básicas você pode vir na vista de prova, mostrar que você pensou a coisa certa, e ganhar um monte de pontos com isso – mas em Cálculo 2 não dá pra fazer isso, porque um dos objetivos principais de Cálculo 2 é fazer as pessoas aprenderem a escrever e forçar as pessoas a treinarem jeitos de escrever...
Releia a Dica 7!!!

Alguns erros de sintaxe são considerados graves – como por exemplo escrever "$\int_{x=2}^{x=3}$" ou "$\int_{x=2}^{x=3} \cos x$" ao invés de "$\int_{x=2}^{x=3} \cos x\, dx$". *Tratar essas abreviações informais como erros graves é um truque pra forçar as pessoas a aprenderem os jeitos certos de definir abreviações.*

Por enquanto vocês estão começando a aprender a definir funções e conjuntos, e muitas pessoas já estão tendo uma dificuldade enorme pra escrever os "sejas" e pra nomear as funções e conjuntos; o jeito certo de definir abreviações envolve dificuldades conceituais ainda maiores, que a gente vai ver depois.

Os livros usam "$\int_2^3 \cos x\, dx$" ao invés de "$\int_{x=2}^{x=3} \cos x\, dx$" – e você pode usar isso também.

Não escrever os sinais de '=' é um erro GRAVÍSSIMO que pode fazer você tirar ZERO na questão. Isso é porque eu vou interpretar cada '=' como uma afirmação e analisar cada afirmação que você fez pra ver se ela faz sentido e se os detalhes dela estão certos, e se você não escrever os '='s eu não consigo apontar pras afirmações que eu vou analisar... e aí fica muito mais difícil corrigir a questão e muitíssimo mais difícil discutir ela na vista de prova. *Releia a Dica 3!*

Alguns '='s não são afirmações, são coisas como "queremos que", "vamos testar se". *Comece a treinar usar essas partículas em português, elas vão ser importantíssimas na P2!*

Usar '$\to$' ou '$\Rightarrow$' ao invés de '=' é um erro grave mas não gravíssimo. Isso é porque eu sei que regras usar pra julgar se um '=' está certo e se ele é fácil de justificar, mas eu não sei quais são as regras que os '$\to$'s e '$\Rightarrow$'s devem obedecer... e eu nem sei onde encontrar livros e vídeos que usem '$\to$' e '$\Rightarrow$' ao invés de '='. *Se você conhecer algum me mande o link!*

Na P1 você não vai precisar usar o [:=] pra nada – por enquanto ele é só algo que a gente usou pra discutir certas operações que as pessoas já deveriam saber fazer de cabeça. Na P2 a gente vai usar ele um pouquinho pra obter casos particulares.

Cálculo 2 - 2023.2

Aulas 19 e 21: volumes

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.2-C2.html

Links

StewPtCap6p12 (p.389) 6.2 Volumes
StewPtCap6p13 (p.390) volume da esfera
StewPtCap6p18 (p.395) pirâmide de base quadrada
StewPtCap6p20 (p.397) Exercícios: façam do 1 ao 5!
StewPtCap8p17 (p.500) trombeta de Gabriel
StewPtCap13p18 (p.768) 13.3 Comprimento de Arco e Curvatura
StewPtCap15p6 (p.874) 15.1 Integrais múltiplas sobre retângulos
StewPtCap15p9 (p.877) aproximações do volume
Miranda285 9.3 Volume
Miranda288 O volume da esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$
Miranda285 9.3.1 Secções transversais
Miranda289 9.3.2 Sólidos de revolução
Miranda292 Façam os exercícios 2, 3, 4 e 5!
Leit6p3 (p.374) 6.1 Volumes de sólidos por cortes
Leit6p17 (p.388) 6.3 Comprimento de arco

3cT75 Pirâmide (3D)
2gT105 Um jogo colaborativo
2gT137 P2 de 2023.1, questão sobre volumes

Quadros de 2023.2:
2hQ47 Quadros da aula 19 (09/out/2023)
2hQ49 Quadros da aula 21 (11/out/2023)

Quadros de 2023.1:
2gQ59 Quadros da aula 27 (4/julho/2023)

Exercício 1

Sejam:

$$\begin{array}{rcl}
A &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\,\} \\
B &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le x\,\} \\
C &=& \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1\,\} \\
D &=& \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le x\,\} \\
E &=& \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le x, 0\le z\le x\,\} \\
[x=\alpha] &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=\alpha\,\} \\
[y=\beta] &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=\beta\,\} \\
[[x=\alpha]] &=& \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=\alpha\,\} \\
[[y=\beta]] &=& \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=\beta\,\} \\
[[z=\gamma]] &=& \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=\gamma\,\}
\end{array}$$

Lembre das técnicas do "jogo colaborativo", e:
a) Represente graficamente A.
b) Represente graficamente B.
c) Represente graficamente C.
d) Represente graficamente D.
e) Represente graficamente E.
f) Represente num gráfico só A e $A\cap[x=0.5]$. Qual é o comprimento de $A\cap[x=0.5]$?
g) Represente num gráfico só B e $B\cap[x=0.5]$. Qual é o comprimento de $B\cap[x=0.5]$?
h) Represente num gráfico só D e $D\cap[[x=0.5]]$. Qual é a área de $D\cap[[x=0.5]]$?
i) Represente num gráfico só D e $D\cap[[y=0.5]]$. Qual é a área de $D\cap[[y=0.5]]$?
j) Represente num gráfico só D e $D\cap[[z=0.5]]$. Qual é a área de $D\cap[[z=0.5]]$?
k) Represente num gráfico só E e $E\cap[[x=0.5]]$. Qual é a área de $E\cap[[x=0.5]]$?
l) Represente num gráfico só E e $E\cap[[y=0.5]]$. Qual é a área de $E\cap[[y=0.5]]$?
m) Represente num gráfico só E e $E\cap[[z=0.5]]$. Qual é a área de $E\cap[[z=0.5]]$?

Calcule:
n) $\mathsf{área}(E\cap[[x=0.2]])$
o) $\mathsf{área}(E\cap[[x=0.8]])$
p) $\displaystyle\int_{t=0}^{t=1} \mathsf{área}(E\cap[[x=t]])\,dt$

Dicas pro exercício 1

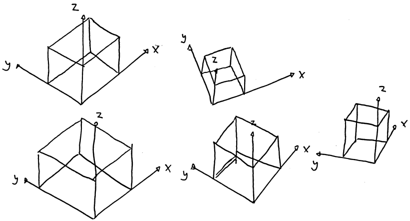
O conjunto C é um cubo e os conjuntos D e E vão ser pedaços do cubo C.

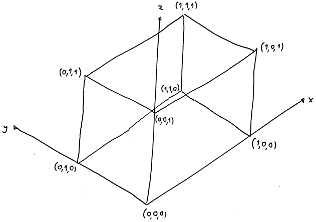
Existem 8 pontos de $\mathbb{R}^3$ que obedecem isto aqui: $x, y, z \in \{0, 1\}$. Vou inventar um nome pra eles: eles vão ser os pontos "simples". O conjunto C contém todos os pontos simples mas os conjuntos D e E só contém alguns pontos simples cada um... quais?

Pra fazer os itens que envolvem os conjuntos D e E comece fazendo um MONTE de desenhos de cubos à mão, SEM USAR RÉGUA – como eu fiz na figura de cima à direita. Se você não usar régua o seu ganho de velocidade vai ser tão grande que você não vai se incomodar muito pra descartar os desenhos que ficarem tortos demais, e você vai poder escolher quais são os desenhos nos quais os eixos estão numa posição melhor pra desenhar o conjunto E, que é meio complicado.

Quando você encontrar uma posição pros eixos que você ache que está boa faça uma versão ampliada do seu cubo naquela posição ocupando uma folha inteira, e depois escreva do lado de cada um dos pontos "simples" as coordenadas dele – como eu fiz na figura de baixo à direita. Use essa figura pra tentar entender os conjuntos D e E.

A melhor posição pra desenhar o conjunto E não é a da figura de baixo à direita.





Aviso

Na aula 19 – que era pra ser a única aula sobre volumes – as pessoas tiveram tanta dificuldade pra desenhar os conjuntos C, D e E em 3D que eu preferi considerar que elas não teriam condições de entender os trechos do Stewart em que ele faz cortes em figuras 3D e depois calcula as áreas desses cortes... então nós vamos ter uma segunda aula sobre isso.
Slogans

Cálculo 2 - 2023.2

P1 (Primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2023.2-C2.html

Questão 1
(Total: 2.5 pts)

Calcule:

$$\int s^3 \sqrt{1-s^2}^{\,3} \, ds \ .$$

Questão 2
(Total: 3.0 pts)

Calcule a integral abaixo fazendo pelo menos duas mudanças de variável e teste o seu resultado:

$$\int \frac{(\ln x)^3 \cos((\ln x)^4)}{x} \, dx.$$

Questão 3
(Total: 2.5 pts)

Calcule e teste o seu resultado:

$$\int \frac{3x+2}{(x+4)(x-5)} \, dx \ .$$

Dicas:

1) Nestas questões o que vai contar mais pontos é você organizar as contas de modo que cada passo seja fácil de entender, de verificar, e de justificar – "chegar no resultado certo" vai valer relativamente pouco.

2) Recomendo que vocês usem o método das "caixinhas de anotações" nas mudanças de variável... numa caixinha de anotações a primeira linha diz a relação entre a variável nova e a antiga, todas as outras linhas são consequências da primeira, e dentro da caixinha de anotações você pode usar as gambiarras com variáveis dependentes e diferenciais, como isto aqui: $dx = 42\,du$...

3) ...por exemplo:

$$\begin{bmatrix} s = \operatorname{sen}\theta \\ \sqrt{1-s^2} = \cos\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos\theta \\ ds = \cos\theta \, d\theta \\ \theta = \operatorname{arcsen} s \end{bmatrix}$$

Questão 4
(Total: 1.0 pts)

No curso nós definimos que *pra nós* a "fórmula" do TFC2 seria esta aqui:

$$[\text{TFC2}] \;=\; \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \;=\; F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

Mostre que quando $a = 1$, $b = 3$ e

$$F(x) = \begin{cases} 2x & \text{quando } x < 2, \\ x & \text{quando } x \geq 2 \end{cases}$$

a fórmula [TFC2] é falsa.

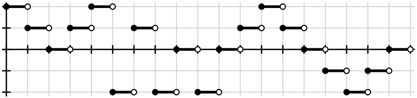
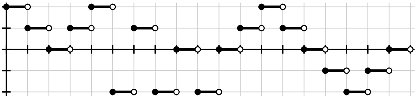
Dicas: o melhor modo de fazer isto é representando graficamente $F(x)$ e $F'(x)$ e calculando certas coisas a partir dos gráficos. Considere que o leitor sabe calcular áreas de retângulos, triângulos e trapézios no olhômetro quando as coordenadas deles são números simples, mas complemente os seus gráficos com um pouquinho de português quando nem tudo for óbvio só a partir dos gráficos.

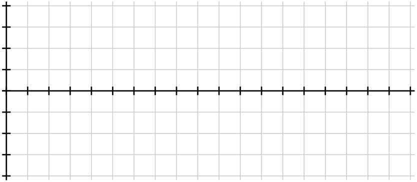
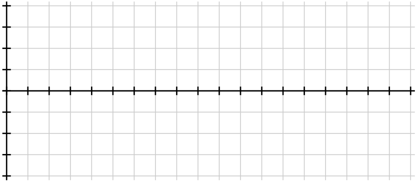
Questão 5
(Total: 1.0 pts)

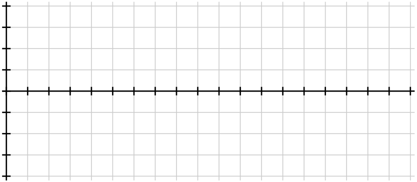
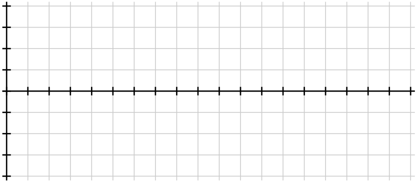
Seja $f(t)$ a função no topo da página seguinte. Seja

$$F(x) \;=\; \int_{t=2}^{t=x} f(t)\,dt.$$

Desenhe o gráfico de $F(x)$ em algum dos grids vazios da próxima página. Indique claramente qual é a versão final e quais desenhos são rascunhos.

Questão 1: gabarito

$$\begin{array}{rcl}
\int s^3\sqrt{1-s^2}^3\,ds &=& \int (\operatorname{sen}\theta)^3(\cos\theta)^3(\cos\theta)\,d\theta \\
&=& \int (\cos\theta)^4(\operatorname{sen}\theta)^2(\operatorname{sen}\theta)\,d\theta \\
&=& \int (\cos\theta)^4(1-(\cos\theta)^2)(\operatorname{sen}\theta)\,d\theta \\
&=& \int c^4(1-c^2)(-1)\,dc \\
&=& \int c^4(c^2-1)\,dc \\
&=& \int c^6-c^4\,dc \\
&=& \frac{1}{7}c^7-\frac{1}{5}c^5 \\
&=& \frac{1}{7}\sqrt{1-s^2}^7-\frac{1}{5}\sqrt{1-s^2}^5
\end{array}
\qquad
\begin{bmatrix} s=\operatorname{sen}\theta \\ s^2=(\operatorname{sen}\theta)^2 \\ 1-s^2=(\cos\theta)^2 \\ \sqrt{1-s^2}=\cos\theta \\ \frac{ds}{d\theta}=\cos\theta \\ ds=\cos\theta\,d\theta \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} c=\cos\theta \\ \frac{dc}{d\theta}=-\operatorname{sen}\theta \\ dc=-\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\ (-1)dc=\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\ (\operatorname{sen}\theta)^2=1-c^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl}
\frac{d}{ds}\sqrt{1-s^2} &=& \frac{d}{ds}(1-s^2)^{1/2} \\
&=& \frac{1}{2}(1-s^2)^{-1/2}\frac{d}{ds}(1-s^2) \\
&=& \frac{1}{2}(1-s^2)^{-1/2}(-2s) \\
&=& -(1-s^2)^{-1/2}s \\
&=& -\sqrt{1-s^2}^{-1}s \\
\frac{d}{ds}\sqrt{1-s^2}^k &=& (k\sqrt{1-s^2}^{k-1})(\frac{d}{ds}\sqrt{1-s^2}) \\
&=& (k\sqrt{1-s^2}^{k-1})(-\sqrt{1-s^2}^{-1}s) \\
&=& -k\sqrt{1-s^2}^{k-2}s \\
\frac{d}{ds}\sqrt{1-s^2}^7 &=& -7\sqrt{1-s^2}^5s \\
\frac{d}{ds}\sqrt{1-s^2}^5 &=& -5\sqrt{1-s^2}^3s \\
\frac{d}{ds}(\frac{1}{7}\sqrt{1-s^2}^7-\frac{1}{5}\sqrt{1-s^2}^5) &=& \frac{1}{7}(-7\sqrt{1-s^2}^5s)-\frac{1}{5}(-5\sqrt{1-s^2}^3s) \\
&=& -\sqrt{1-s^2}^5s+\sqrt{1-s^2}^3s \\
&=& (-\sqrt{1-s^2}^2+1)\sqrt{1-s^2}^3s \\
&=& (-(1-s^2)+1)\sqrt{1-s^2}^3s \\
&=& (-1+s^2+1)\sqrt{1-s^2}^3s \\
&=& s^2\sqrt{1-s^2}^3s \\
&=& s^3\sqrt{1-s^2}^3
\end{array}$$

Questão 2: gabarito

$$
\begin{array}{rcl}
\int \frac{(\ln x)^3 \cos((\ln x)^4)}{x}\,dx & = & \int (\ln x)^3 \cos((\ln x)^4) \frac{1}{x}\,dx \\
& = & \int u^3 \cos(u^4)\,du \\
& = & \int \cos(u^4) u^3\,du \\
& = & \int \cos v \cdot \frac{1}{4}\,dv \\
& = & \frac{1}{4} \int \cos v\,dv \\
& = & \frac{1}{4} \operatorname{sen} v \\
& = & \frac{1}{4} \operatorname{sen}(u^4) \\
& = & \frac{1}{4} \operatorname{sen}((\ln x)^4)
\end{array}
\qquad
\left[\begin{array}{c} u = \ln x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ du = \frac{1}{x}dx \end{array}\right]
\quad
\left[\begin{array}{c} v = u^4 \\ \frac{dv}{du} = 4u^3 \\ dv = 4u^3du \\ \frac{1}{4}dv = u^3du \end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\frac{d}{dx}(\frac{1}{4} \operatorname{sen}((\ln x)^4)) & = & \frac{1}{4} \cos((\ln x)^4)\, \frac{d}{dx}((\ln x)^4) \\
& = & \frac{1}{4} \cos((\ln x)^4) \cdot 4(\ln x)^3 \frac{d}{dx}(\ln x) \\
& = & \frac{1}{4} \cos((\ln x)^4) \cdot 4(\ln x)^3 \frac{1}{x} \\
& = & \cos((\ln x)^4)(\ln x)^3 \frac{1}{x} \\
& = & \frac{(\ln x)^3 \cos((\ln x)^4)}{x}
\end{array}
$$

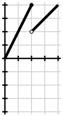
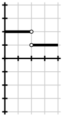
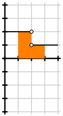
Questão 3: gabarito (falta o teste)

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Queremos integrar:} & \int \frac{3x+2}{(x+4)(x-5)}\,dx \\
\text{Queremos que:} & \frac{3x+2}{(x+4)(x-5)} & = & \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-5} \\
\text{Sabemos que:} & \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-5} & = & \frac{A(x-5)}{(x+4)(x-5)} + \frac{B(x+4)}{(x+4)(x-5)} \\
& & = & \frac{A(x-5)+B(x+4)}{(x+4)(x-5)} \\
& & = & \frac{Ax-5A+Bx+4B}{(x-4)(x+5)} \\
& & = & \frac{(A+B)x+(-5A+4B)}{(x-4)(x+5)} \\
\text{Então:} & \frac{3x+2}{(x+4)(x-5)} & = & \frac{(A+B)x+(-5A+4B)}{(x-4)(x+5)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
3x+2 & = & (A+B)x + (-5A+4B) \\
A+B & = & 3 \\
-5A+4B & = & 2 \\
A & = & 10/9 \\
B & = & 17/9
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\frac{3x+2}{(x+4)(x-5)} & = & \frac{10/9}{x+4} + \frac{17/9}{x-5} \\
\int \frac{3x+2}{(x+4)(x-5)}\,dx & = & \int \frac{10/9}{x+4} + \frac{17/9}{x-5}\,dx \\
& = & \frac{10}{9}\ln|x+4| + \frac{17}{9}\ln|x-5|
\end{array}$$

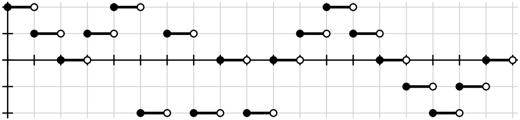
Questão 4: gabarito

$F(x) =$  $F'(x) =$  $\int_{x=1}^{x=3} F'(x)\,dx =$  $= 3$

$$\underbrace{\underbrace{\int_{x=1}^{x=3} F'(x)\,dx}_{3} \;=\; \underbrace{\underbrace{\underbrace{F(x)\big|_{x=1}^{x=3}}_{F(3)-F(1)}}_{3-2}}_{1}}_{\mathbf{F}}$$

Questão 5: gabarito

$f(x) \ =$



$F(x) \ = \ \int_{t=2}^{t=x} f(t)\,dt \ =$

Cálculo C2 - 2023.2

Aula 26: comprimento de arco

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2023.2-C2.html

Links

StewPtCap4p14 (p.257) 4.2 O Teorema do Valor Médio
StewPtCap4p15 (p.258) teorema da existência
StewPtCap5p16 (p.337) pontos amostrais arbitrários
StewPtCap6p33 (p.410) O Teorema do Valor Médio para Integrais
StewPtCap8p5 (p.488) 8.1 Comprimento de arco
StewPtCap10p16 (p.586) Comprimento de arco
StewPtCap13p18 (p.768) 13.3 Comprimento de Arco e Curvatura

MirandaP213 marcas
MirandaP224 Teorema do valor médio para integrais
MirandaP301 9.5 Comprimento de arco

Leit4p18 (p.232) 4.3.2. Teorema do Valor Médio
Leit5p41 (p.324) ponto escolhido
Leit5p57 (p.340) 5.7 O teorema do valor médio para integrais
Leit6p17 (p.388) 6.3 Comprimento de arco do gráfico de uma função

Introdução

Cada um dos três livros que nós estamos usando – Stewart, Miranda, Leithold – tem pelo menos um capítulo com várias “aplicações da integral”. Em cada uma dessas “aplicações” a gente aprende como pegar um certo conceito de Geometria ou Física, como volumes, comprimento de arco, áreas de superfícies de revolução, e centro de massa e aí expressar a quantidade que a gente quer calcular como um somatório, e depois a gente transforma esse somatório numa integral. O método é sempre o mesmo, e ele tem dois passos: “expressar como somatório” e “transformar o somatório numa integral”. O passo de “expressar como somatório” é sempre trabalhoso e exige um olhômetro afiado pra gente entender os argumentos geométricos e as contas correspondentes a eles, e o passo de “transformar o somatório numa integral” exige um truque no qual a gente usa “partições pontilhadas” ao invés de “partições”, e se a gente escolhe os ‘m_i’s das partições pontilhadas exatamente do jeito certo o limite dos somatórios vira algo bem simples...

Normalmente em Cálculo 2 a gente apresenta a demonstração da “fórmula” de cada uma das “aplicações” super rápido, e quase ninguém entende as demonstrações – mas as pessoas decoram as fórmulas e *às vezes* conseguem aplicar elas na prova... e depois elas esquecem tudo.

Neste semestre eu vou tentar apresentar os passos mais importantes de uma dessas “aplicações” – a fórmula pro comprimento de arco – com exemplos simples, figuras e exercícios... se tudo der certo depois vai ficar fácil entender as outras aplicações. Tomara que funcione! =)

Pontos "mágicos"

Eu vou dizer que os "pontos mágicos" pra uma função $f(x)$ no intervalo $[a,b]$ – ou: os pontos mágicos pra integral $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ – são os pontos $m \in [a,b]$ que obedecem isto aqui:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \;=\; f(m)(b-a)$$

Os pontos mágicos vão fazer os nossos somatórios virarem integrais de um modo magicamente simples. Por exemplo:

$$\begin{array}{l}
\sum_{i=1}^{2} f(m_i)(b_i-a_i) \\
= \; f(m_1)(b_1-a_1)+f(m_2)(b_2-a_2) \\
= \; \int_{x=a_1}^{x=b_1} f(x)\,dx + \int_{x=a_2}^{x=b_2} f(x)\,dx \\
= \; \int_{x=a_1}^{x=b_2} f(x)\,dx
\end{array}$$

A figura da próxima página mostra os dois pontos mágicos para a minha parábola preferida, $f(x)=4-(x-2)^2$, no intervalo $[0,4]$. As figuras das páginas 5 a 8 mostram os pontos mágicos pra $f(x)$ nos subintervalos de várias partições do intervalo $[2,4]$.

Os pontos mágicos geralmente são bem difíceis de calcular na mão; usando o Maxima eu consegui descobrir que os pontos mágicos da próxima página são:

$$x=\frac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad x=\frac{2\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}.$$

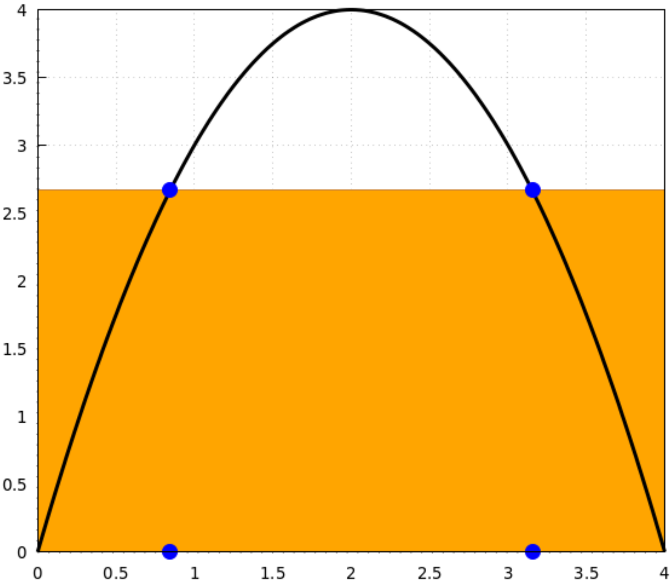
Os pontos mágicos das outras páginas têm fórmulas horríveis – eu usei o Maxima pra fazer todos os desenhos.

Os livros usam argumentos que mostram que os pontos mágicos existem, mas não calculam eles explicitamente.

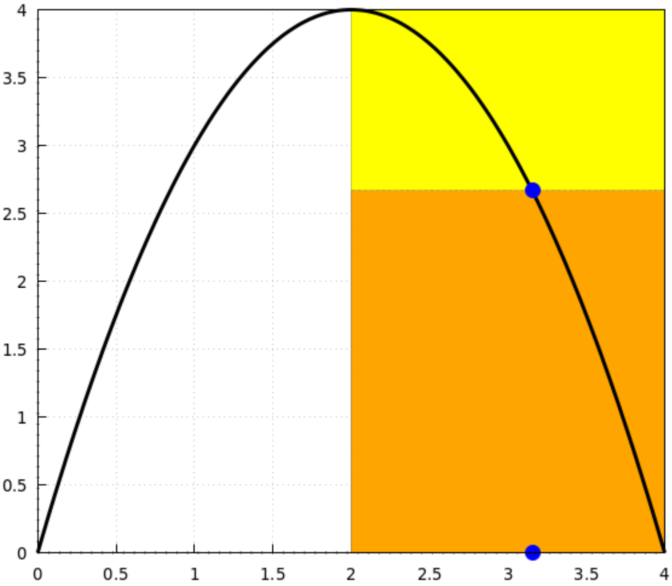
O Stewart e o Miranda chamam os pontos mágicos de 'x_i^*'s ao invés de 'm_i's, e o Leithold chama eles de 'ξ_i's. *Essas notações não deixam claro o quão mágicos esses pontos são.* =(

Dê uma olhada aqui: StewPtCap4p15. Ele diz:

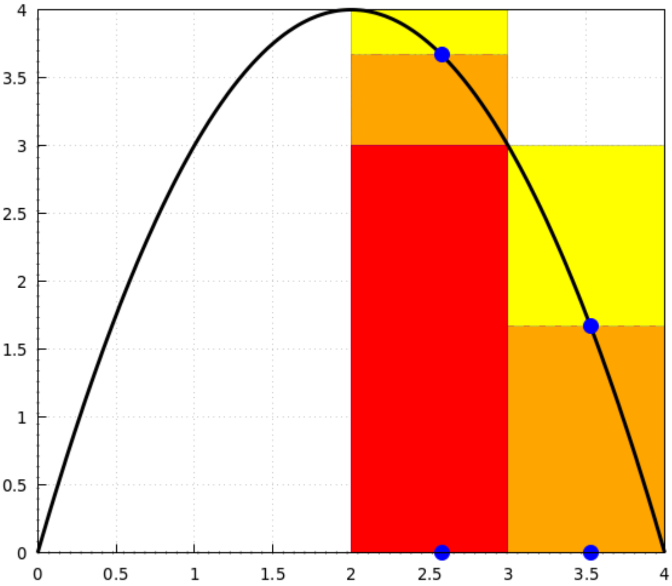
> O Teorema do Valor Médio é um exemplo do que é chamado *teorema de existência*. Da mesma forma que o Teorema do Valor Intermediário, o Teorema dos Valores Extremos e o Teorema de Rolle, ele garante que existe um número com certa propriedade, mas não nos diz como achá-lo.

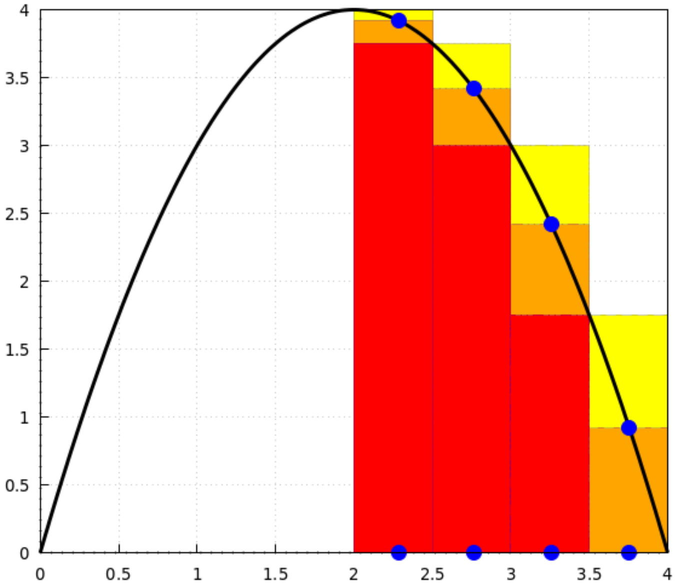


4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

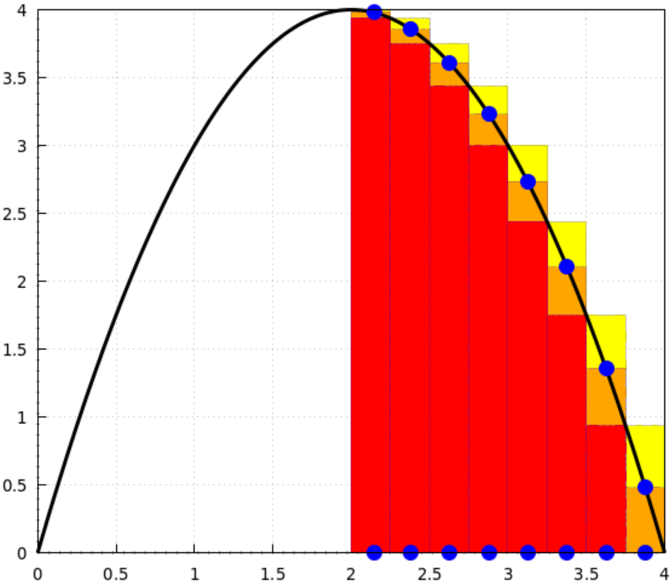


4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4


4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4



4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4


0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

Algumas contas

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2} & = & \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} \\
& = & \sqrt{\frac{a^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}} \\
& = & \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} \\
& = & \sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{\frac{1}{a^2}} \\
& = & \sqrt{a^2+b^2}\,\frac{1}{a}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}\;a & = & \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\;a \\
& = & \sqrt{\frac{a^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}}\;a \\
& = & \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}\;a \\
& = & \sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{\frac{1}{a^2}}\;a \\
& = & \sqrt{a^2+b^2}\,\frac{1}{a}\;a \\
& = & \sqrt{a^2+b^2}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{1+\left(\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\right)^2}\;(x_1-x_0)^2 & = & \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2} \\
\sqrt{1+f'(m_1)^2}\;(x_1-x_0)^2 & = & \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}
\end{array}$$

Compare com:
StewPtCap8p6 (p.489)
MirandaP302
Leit6p19 (p.390)

Somas de Riemann com pontos escolhidos

Uma *partição pontilhada*, ou uma *partição com pontos escolhidos*, é um par (P, Q) onde: P é uma partição de um intervalo $[a, b]$ com N subintervalos e $Q = (m_1, \ldots, m_N)$, $\forall i \in \{1, \ldots, N\}. m_i \in [a_i, b_i]$.

Se (P, Q) é uma partição pontilhada, então:

$$\int_{P,Q} f(x)\,dx \;=\; \sum_{i=1}^{N} f(m_i)(b_i - a_i)$$

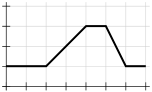
Cada um dos livros que estamos usando define isso de um jeito ligeiramente diferente. Se você tiver tempo e curiosidade dê uma olhada nestas páginas:

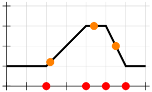
StewPtCap5p16 (p.337) pontos amostrais
Leit5p41 (p.324) ponto escolhido
MirandaP213 marcas

Exercício
As figuras da direita definem uma função $f(x)$ e duas partições pontilhadas do intervalo $[2, 6]$. Na partições pontilhada da esquerda nós temos:

$$\begin{array}{rcl} \int_{P,Q} f(x)\,dx & = & 1.2 \cdot (4-2) \\ & + & 3.0 \cdot (5-4) \\ & + & 2.0 \cdot (6-5) \end{array}$$

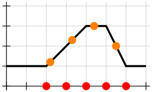
a) Quanto é $\int_{P,Q} f(x)\,dx$ na partição pontilhada da direita?
b) Quanto é $\int_{P,Q} f'(x)\,dx$ na partição pontilhada da direita?
c) E $\int_{P,Q} \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$?
d) E $\int_{x=2}^{x=6} \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$?

$f(x) =$ 



$P = \{2, 4, 5, 6\}$
$Q = (2.2, 4.4, 5.5)$

i	a_i	b_i	I_i	m_i
1	2	4	$[2, 4]$	2.2
2	4	5	$[4, 5]$	4.4
3	5	6	$[5, 6]$	5.5



$P = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
$Q = (2.2, 3.3, 4.4, 5.5)$

i	a_i	b_i	I_i	m_i
1	2	3	$[2, 3]$	2.2
2	3	4	$[3, 4]$	3.3
3	4	5	$[4, 5]$	4.4
4	5	6	$[5, 6]$	5.5