Cálculo 3 - 2023.2

P1 (primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.2-C3.html

Questão 1

(Total: 5.0 pts)
O diagrama de numerozinhos da última folha da prova corresponde a uma superfície $z = F(x,y)$ que tem 5 faces. Também é possível interpretá-lo como uma superfície com 6 ou mais faces, mas vamos considerar que a superfície com só 5 faces é que é a correta.

a) **(1.0 pts)** Mostre como dividir o plano em 5 polígonos que são as projeções destas faces no plano do papel.

b) **(1.0 pts)** Chame estas faces de face NW ("noroeste"), N ("norte"), W ("oeste"), C ("centro"), R ("resto"), e chame as equações dos planos delas de $F_{NW}(x,y)$, $F_N(x,y)$, $F_W(x,y)$, $F_C(x,y)$, e $F_R(x,y)$. Dê as equações destes planos.

c) **(1.0 pts)** Sejam:

$$\begin{array}{rcl} P_N &=& \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z = F_N(x,y)\,\}, \\ P_C &=& \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z = F_C(x,y)\,\}, \\ r &=& P_N \cap P_C. \end{array}$$

Represente a reta r graficamente como numerozinhos.

d) **(0.5 pts)** Dê uma parametrização para a reta do item anterior. Use notação de conjuntos.

e) **(0.5 pts)** Seja

$$A = \{0,1,\ldots,10\} \times \{0,1,\ldots,10\};$$

note que os numerozinhos do diagrama de numerozinhos estão todos sobre pontos de A. Para cada ponto $(x,y) \in A$ represente graficamente $(x,y) + \frac{1}{3}\vec{\nabla}F(x,y)$.

Obs: quando $\vec{\nabla}F(x,y) = 0$ desenhe uma bolinha preta sobre o ponto (x,y), e quando $\vec{\nabla}F(x,y)$ não existir faça um '$\times$' sobre o numerozinho que está no ponto (x,y).

f) **(1.0 pts)** Sejam

$$\begin{array}{rcl} Q(t) &=& (0,2) + t\overrightarrow{(1,1)}, \\ (x(t),y(t)) &=& Q(t), \\ h(t) &=& F(x(t),y(t)). \end{array}$$

Faça o gráfico da função $h(t)$. Considere que o domínio dela é o intervalo $[0,6]$.

Questão 2

(Total: 3.0 pts)
Sejam

$$\begin{array}{rcl} u(x,y) & = & y-2x, \\ v(x,y) & = & x+y, \\ F(x,y) & = & u(x,y)v(x,y) \\ & = & 2x^2-xy-y^2. \end{array}$$

Nesta questão você vai ter que fazer várias cópias do diagrama de numerozinhos da função $F(x,y)$ para os pontos com $x,y \in \{-2,-1,0,1,2\}$. Os numerozinhos vão ser estes aqui:

$$\begin{array}{rrrrr} 0 & 4 & 4 & 0 & -8 \\ -5 & 0 & 1 & -2 & -9 \\ -8 & -2 & 0 & -2 & -8 \\ -9 & -2 & 1 & 0 & -5 \\ -8 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

a) **(1.0 pts)** Desenhe o "campo gradiente" da função F nestes pontos, mas multiplicando cada $\vec{\nabla}F(x,y)$ por $\frac{1}{10}$ pros vetores não ficarem uns em cima dos outros. Deixa eu traduzir isso pra termos mais básicos: faça uma cópia do diagrama de numerozinhos da $F(x,y)$, e sobre cada (x,y) com $x,y \in \{-2,-1,0,1,2\}$ desenhe a seta $(x,y)+\frac{1}{10}\vec{\nabla}F(x,y)$.

b) **(2.0 pts)** Faça uma outra cópia desse diagrama de numerozinhos e desenhe sobre ela as curvas de nível da função $F(x,y)$ para $z=0$, $z=-2$, $z=-5$, $z=1$ e $z=2$.

Dicas:
1) O vetor gradiente num ponto (x,y) é sempre ortogonal à curva de nível que passa pelo ponto (x,y).
2) Faça quantos rascunhos quiser. Eu só vou corrigir seus desenhos pros itens (a) e (b) que disserem "versão final", e eles têm que ser os mais caprichados possíveis.

Questão 3

(Total: 3.0 pts)
Se $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, a matriz hessiana de F é definida desta forma:

$$HF(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} F_{xx}(x,y) & F_{xy}(x,y) \\ F_{xy}(x,y) & F_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

Sejam:

$$\begin{array}{rcl}
u &=& x+y-5 \\
v &=& y-2 \\
s &=& 3+uv \\
p &=& 4+u^2+v^2 \\
S(x,y) &=& 3+u(x,y)v(x,y) \\
P(x,y) &=& 4+u(x,y)^2+v(x,y)^2 \\
(x_0,y_0) &=& (3,2) \\
A &=& \{-1,0,1\} \\
B &=& \{\,(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \mid \Delta x, \Delta y \in B\,\}
\end{array}$$

a) **(1.0 pts)** Calcule HS e HP.
b) **(2.0 pts)** Desenhe os diagramas de numerozinhos de u, v, s e p “nos 9 pontos em torno de (x_0,y_0)” – ou seja, nos pontos de B.

6	6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
6	6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
6	6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
5	5	5	5	4	2	0	0	0	0	0
4	4	4	4	3	2	0	0	0	0	0
3	3	3	3	2	1	0	0	0	0	0
2	2	2	2	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

6	6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
6	6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
6	6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
5	5	5	5	4	2	0	0	0	0	0
4	4	4	4	3	2	0	0	0	0	0
3	3	3	3	2	1	0	0	0	0	0
2	2	2	2	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

6	6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
6	6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
6	6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
5	5	5	5	4	2	0	0	0	0	0
4	4	4	4	3	2	0	0	0	0	0
3	3	3	3	2	1	0	0	0	0	0
2	2	2	2	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

6	6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
6	6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
6	6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
5	5	5	5	4	2	0	0	0	0	0
4	4	4	4	3	2	0	0	0	0	0
3	3	3	3	2	1	0	0	0	0	0
2	2	2	2	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

6	6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
6	6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
6	6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
5	5	5	5	4	2	0	0	0	0	0
4	4	4	4	3	2	0	0	0	0	0
3	3	3	3	2	1	0	0	0	0	0
2	2	2	2	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

6	6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
6	6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
6	6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
5	5	5	5	4	2	0	0	0	0	0
4	4	4	4	3	2	0	0	0	0	0
3	3	3	3	2	1	0	0	0	0	0
2	2	2	2	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0