

Cálculo 3 - 2023.2

P2 (segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2023.2-C3.html>

Questão 1.

(Total: 10.0 pts)

Lembre que $\text{Int}(A)$ é o interior de A , \bar{A} é o fecho de A , ∂A é a fronteira de A , e que se f é uma função de A em B então f^{-1} é a “imagem inversa de F ”, que é definida de um jeito quando o argumento é um número e de outro jeito quando o argumento é um conjunto. Se $b \in A$ e $C \subset B$, então:

$$\begin{aligned} f^{-1}(b) &= \{a \in A \mid f(a) = b\} \\ f^{-1}(C) &= \{a \in A \mid f(a) \in C\} \end{aligned}$$

Sejam:

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in [-2, 2]\} \\ B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 3\} \\ C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-3, -1], y \in [1, 3]\} \\ D &= (A \setminus B) \setminus C \\ E &= \bar{D} \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ & \quad (x, y) \mapsto xy \\ G &: E \rightarrow \mathbb{R} \\ & \quad (x, y) \mapsto xy \end{aligned}$$

- a) (0.5 pts) Desenhe a região D .
 b) (0.5 pts) Desenhe a região E .
 c) (0.5 pts) Desenhe as curvas de nível da função F para $z = 0, 1, 2, -1, -2$. Note que várias delas vão ser curvas infinitas.

d) (1.0 pts) Desenhe as curvas de nível da função G para $z = 0, 1, 2, -1, -2$ e para $z = -1.5$. Note que várias delas vão ser pedaços finitos de curvas infinitas.

e) (0.5 pts) Dê as coordenadas de cada um dos “bicos” de ∂D e dê nomes como B_1, B_2, \dots, B_N para cada um deles.. Repare que eu não estou dizendo quem é N — você vai ter que descobrir.

f) (1.5 pts) Diga quais são os mínimos locais, máximos locais e pontos de sela da função G e dê nomes como P_1, P_2, \dots, P_M para esses pontos. Repare que eu não estou dizendo quem é M — você vai ter que descobrir.

Quais pontos de fronteira são máximos e mínimos locais? A gente não teve tempo de ver isso no curso, mas nos próximos dois itens você vai fazer um desenho que vai te ajudar a entender os teoremas sobre isso do capítulo 12 do Bortolossi...

g) (0.5 pts) Seja $Q = \{B_1, \dots, B_N\} \cup \{P_1, \dots, P_M\}$. Calcule o gradiente de F em cada um dos pontos do conjunto Q .

Dica: Depois que você fizer o item (g) refaça o item (d). Essa versão melhorada do item (d) vai te ajudar com o item (h) — que vale metade dos pontos da prova.

h) (5.0 pts) Faça um gráfico bem grande — ocupando uma folha toda — com a região E , as curvas de nível do item (d) e todos os vetores gradientes do item (g). Capriche bastante nesse desenho e passe ele a limpo várias vezes — imagine que você vai usar ele pra explicar pra uma outra pessoa porque é que nem todos os pontos do conjunto Q são máximos locais ou mínimos locais.