Cálculo 2 - 2024.1

P1 (Primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C2.html

Questão 1
(Total: 4.0 pts)

Resolva a integral abaixo por substituição trigonométrica e teste o seu resultado. Dica: você vai ter que começar com a mudança de variável $u = 2x$.

$$\int x^3\sqrt{1-4x^2}\,dx\ .$$

Questão 2
(Total: 4.0 pts)

Lembre que:

$$[\mathrm{IP}] = \left(\int fg'\,dx = fg - \int f'g\,dx \right)$$

Complete as contas abaixo. Use uma folha inteira. Adicione mais linhas se precisar. Vou dar algumas dicas no quadro.

$$\begin{array}{rcll}
\int hm''\,dx & \overset{(1)}{=} & ? & \text{Por } [\mathrm{IP}] \left[\begin{smallmatrix} f:=h \\ g:=m' \\ (\ldots) \end{smallmatrix}\right] \\
\int h'm'\,dx & \overset{(2)}{=} & ? & \text{Por } [\mathrm{IP}] \left[(\ldots) \right] \\
\int hm''\,dx & \overset{(3)}{=} & ? & \text{Cópia da (1)} \\
 & \overset{(4)}{=} & ? & \text{Por (2)} \\
\int hm''\,dx & \overset{(5)}{=} & ? & \text{Por (3) e (4)} \\
\int (x-3)^2 e^x\,dx & \overset{(6)}{=} & ? & \text{Por (5)} \left[(\ldots) \right]
\end{array}$$

Dicas:

1) Nestas questões o que vai contar mais pontos é você organizar as contas de modo que cada passo seja fácil de entender, de verificar, e de justificar – "chegar no resultado certo" vai valer relativamente pouco.

2) Recomendo que vocês usem o método das "caixinhas de anotações" nas mudanças de variável... numa caixinha de anotações a primeira linha diz a relação entre a variável nova e a antiga, todas as outras linhas são consequências da primeira, e dentro da caixinha de anotações você pode usar as gambiarras com variáveis dependentes e diferenciais, como isto aqui: $dx = 42\,du$...

3) ...por exemplo:

$$\left[\begin{array}{c}
s = \operatorname{sen}\theta \\
\sqrt{1-s^2} = \cos\theta \\
\frac{ds}{d\theta} = \cos\theta \\
ds = \cos\theta\,d\theta \\
\theta = \operatorname{arcsen} s
\end{array}\right]$$

Questão 3
(Total: 1.0 pts)

No curso nós definimos que *pra nós* a “fórmula” do TFC2 seria esta aqui:

$$\text{[TFC2]} \ = \ \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \ = \ F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

Mostre que quando $a = 1$, $b = 3$ e

$$F(x) = \begin{cases} 2x & \text{quando } x < 2, \\ x & \text{quando } x \geq 2 \end{cases}$$

a fórmula [TFC2] é falsa.

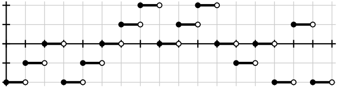
Dicas: o melhor modo de fazer isto é representando graficamente $F(x)$ e $F'(x)$ e calculando certas coisas a partir dos gráficos. Considere que o leitor sabe calcular áreas de retângulos, triângulos e trapézios no olhômetro quando as coordenadas deles são números simples, mas complemente os seus gráficos com um pouquinho de português quando nem tudo for óbvio só a partir dos gráficos.

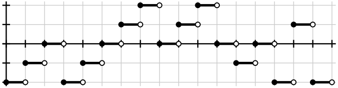
Questão 4
(Total: 1.0 pts)

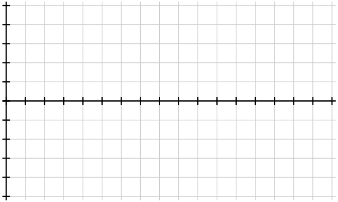
Seja $f(t)$ a função no topo da página seguinte. Seja

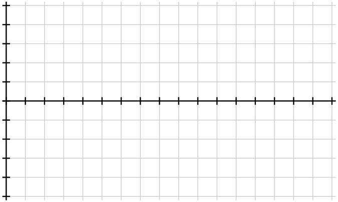
$$F(x) \ = \ \int_{t=3}^{t=x} f(t)\,dt.$$

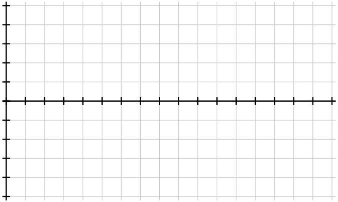
Desenhe o gráfico de $F(x)$ em algum dos grids vazios da próxima página. Indique claramente qual é a versão final e quais desenhos são rascunhos.

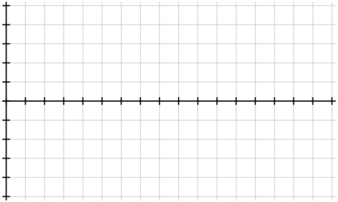












Questão 1: gabarito em Maxima

```
(%i1) f : x^3 * sqrt(1-4*x^2);
(%o1)
```

$$x^3\,\sqrt{1-4\,x^2}$$

```
(%i2) F1 : 'integrate(f, x);
(%o2)
```

$$\int x^3\,\sqrt{1-4\,x^2}\,dx$$

```
(%i3) F2 : changevar(F1, u=2*x, u, x);
(%o3)
```

$$\frac{\int \sqrt{1-u}\,u^3\,\sqrt{u+1}\,du}{16}$$

```
(%i4) F2 : rootscontract(F2);
(%o4)
```

$$\frac{\int u^3\,\sqrt{1-u^2}\,du}{16}$$

```
(%i5) F3 : changevar(F2, u=sin(th), th, u);
(%o5)
```

$$\frac{\int \cos\theta\,\sqrt{1-\sin\theta}\,\left(\sin\theta\right)^3\,\sqrt{\sin\theta+1}\,d\theta}{16}$$

```
(%i6) F3 : rootscontract(F3);
(%o6)
```

$$\frac{\int \cos\theta\,\left(\sin\theta\right)^3\,\sqrt{1-\left(\sin\theta\right)^2}\,d\theta}{16}$$

```
(%i7) F3 : subst([sqrt(1-sin(th)^2)=cos(th)], F3);
(%o7)
```

$$\frac{\int \left(\cos\theta\right)^2\,\left(\sin\theta\right)^3\,d\theta}{16}$$

```
(%i8) F4 : changevar(F3, c=cos(th), c, th);
(%o8)
```

$$\frac{\int c^4-c^2\,dc}{16}$$

```
(%i9) F5 : ev(F4, 'integrate);
(%o9)
```

$$\frac{\frac{c^5}{5}-\frac{c^3}{3}}{16}$$

```
(%i10) F5 : expand(F5);
(%o10)
```

$$\frac{c^5}{80}-\frac{c^3}{48}$$

```
(%i11) F6 : subst([c=cos(th)], F5);
(%o11)
```

$$\frac{\left(\cos\theta\right)^5}{80}-\frac{\left(\cos\theta\right)^3}{48}$$

```
(%i12) F7 : subst([th=asin(u)], F6);
(%o12)
```

$$\frac{\left(1-u^2\right)^{\frac{5}{2}}}{80}-\frac{\left(1-u^2\right)^{\frac{3}{2}}}{48}$$

```
(%i13) F8 : subst([u=2*x], F7);
(%o13)
```

$$\frac{\left(1-4\,x^2\right)^{\frac{5}{2}}}{80}-\frac{\left(1-4\,x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{48}$$

```
(%i14) align_eqs([F1, F2, F3, F4,
                  F5, F6, F7, F8]);
(%o14)
```

$$\left(\begin{array}{rcl} \int x^3\,\sqrt{1-4\,x^2}\,dx & = & \frac{\int u^3\,\sqrt{1-u^2}\,du}{16} \\ & = & \frac{\int \left(\cos\theta\right)^2\,\left(\sin\theta\right)^3\,d\theta}{16} \\ & = & \frac{\int c^4-c^2\,dc}{16} \\ & = & \frac{c^5}{80}-\frac{c^3}{48} \\ & = & \frac{\left(\cos\theta\right)^5}{80}-\frac{\left(\cos\theta\right)^3}{48} \\ & = & \frac{\left(1-u^2\right)^{\frac{5}{2}}}{80}-\frac{\left(1-u^2\right)^{\frac{3}{2}}}{48} \\ & = & \frac{\left(1-4\,x^2\right)^{\frac{5}{2}}}{80}-\frac{\left(1-4\,x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{48} \end{array}\right)$$

```
(%i15)
```

Questão 2: gabarito

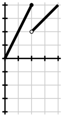
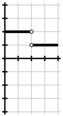
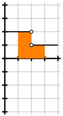
Lembre que:

$$[\text{IP}] = \left(\int fg'\,dx = fg - \int f'g\,dx\right)$$

Então:

$$\begin{array}{rcll}
\int hm''\,dx & \overset{(1)}{=} & hm' - \int h'm'\,dx & \text{Por [IP]} \begin{bmatrix} f:=h \\ f':=h' \\ g:=m' \\ g':=m'' \end{bmatrix} \\
\int h'm'\,dx & \overset{(2)}{=} & h'm - \int h''m\,dx & \text{Por [IP]} \begin{bmatrix} f:=h' \\ f':=h'' \\ g:=m \\ g':=m' \end{bmatrix} \\
\int hm''\,dx & \overset{(3)}{=} & hm' - \int h'm'\,dx & \text{Cópia da (1)} \\
 & \overset{(4)}{=} & hm' - \left(h'm - \int h''m\,dx\right) & \text{Por (2)} \\
 & \overset{(4b)}{=} & hm' - h'm + \int h''m\,dx & \\
\int hm''\,dx & \overset{(5)}{=} & hm' - h'm + \int h''m\,dx & \text{Por (3), (4) e (4b)} \\
\int (x-3)^2 e^x\,dx & \overset{(6)}{=} & (x-3)^2 e^x - 2(x-3)e^x + \int 2e^x\,dx & \text{Por (5)} \begin{bmatrix} h:=(x-3)^2 \\ h':=2(x-3) \\ h'':=2 \\ m:=e^x \\ m':=e^x \\ m'':=e^x \end{bmatrix}
\end{array}$$

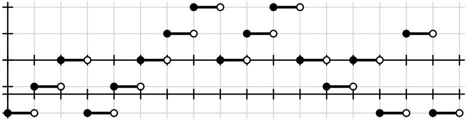
Questão 3: gabarito

$F(x) =$  $\quad F'(x) =$  $\quad \int_{x=1}^{x=3} F'(x)\,dx =$  $= 3$

$$\underbrace{\underbrace{\int_{x=1}^{x=3} F'(x)\,dx}_{3} \;=\; \underbrace{\underbrace{\underbrace{F(x)\big|_{x=1}^{x=3}}_{F(3)-F(1)}}_{3-2}}_{1}}_{\mathbf{F}}$$

Questão 4: gabarito

$$f(x) \ = $$



$$F(x) \ = \ \int_{t=3}^{t=x} f(t)\,dt \ = $$