Cálculo 2 - 2024.1

P2 (segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C2.html

Links

http://anggtwu.net/e/maxima.e.html#2024-1-C2-P2
(find-es "maxima" "2024-1-C2-P2")

Questão 1

(Total: 4.0 pts)
Lembre que no curso eu mostrei que o meu modo preferido de escrever o "método" para resolver EDOs com variáveis separáveis — "EDOVSs" — é o "método" [M] abaixo... eu pus o termo "método" entre aspas porque alguns dos passos da [M] são gambiarras nas quais a gente não pode confiar totalmente, e aí a gente precisa sempre testar as nossas soluções. O abaixo — a "fórmula" — é uma versão resumida do [M].

$$[\mathrm{M}] \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dx} &=& \dfrac{g(x)}{h(y)} \\ h(y)\,dy &=& g(x)\,dx \\ \int h(y)\,dy &=& \int g(x)\,dx \\ \| && \| \\ H(y)+C_1 && G(x)+C_2 \\ H(y) &=& G(x)+C_2-C_1 \\ &=& G(x)+C_3 \\ H^{-1}(H(y)) &=& H^{-1}(G(x)+C_3) \\ \| && \\ y && \end{array}\right)$$

$$[\mathrm{F}_3] \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dx} &=& \dfrac{g(x)}{h(y)} \\ H^{-1}(H(y)) &=& H^{-1}(G(x)+C_3) \\ \| && \\ y && \end{array}\right)$$

Seja $(*_1)$ esta EDOVSs:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2(x-1)}{2(y-1)} \qquad (*_1)$$

a) **(1.0 pts)** Desenhe os tracinhos do campo de direções da EDO (*) nos pontos com $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Aqui você vai ter que desenhar 25 tracinhos e vai ter que caprichar – um tracinho com coeficiente angular $\frac{1}{2}$ tem que ser visualmente bem diferente de um com coeficiente angular 1 e de um com coeficiente angular 2.

b) **(1.5 pts)** Encontre as duas soluções gerais da EDO $(*)$ – a solução "positiva" e a "negativa" e dê nomes para elas.

c) **(0.5 pts)** Teste a sua solução "negativa".

d) **(0.5 pts)** Encontre a solução particular que passa pelo ponto $(-3, 4)$.

e) **(0.5 pts)** Encontre a solução particular que passa pelo ponto $(-3, -2)$.

Muito importante: em todas as questões desta prova eu vou corrigir as respostas de vocês como se eu fosse o "colega menos seu amigo e sem paciência pra adivinhar nada" da Dica 7 e do slide sobre contextos... por exemplo, se você escrever só "$a = 42$" eu vou interpretar isso como "aqui essa pessoa tá dizendo que é óbvio que '$a = 42$' é sempre verdade – e isso é falso!!!", e aí babau. Ou seja, a parte em português das questões de vocês vai ser MUUUUITO importante!

Questão 2
(Total: 2.5 pts)

Sejam $(*_2)$ e $(*_3)$ as EDOs abaixo:

$$\begin{array}{rcll} y'' - 3y' - 10y & = & 0 & \qquad (*_2) \\ y'' + 4y' + 29y & = & 0 & \qquad (*_3) \end{array}$$

a) **(0.5 pts)** Encontre as soluções básicas e a solução geral da EDO $(*_2)$. Dê um nome para cada uma delas.

b) **(1.0 pts)** Encontre uma solução $g(x)$ da EDO $(*_2)$ que obedeça isto aqui: $g(0) = 3$, $g'(0) = -1$.

c) **(1.0 pts)** Encontre as solução básicas complexas e as soluções básicas reais da EDO $(*_3)$.

Questão 3
(Total: 1.5 pts)

Seja $(*_4)$ esta EDO:

$$y' - \frac{2y}{x} = 3x$$

a) **(0.5 pts)** Encontre a solução geral dela.
b) **(1.0 pts)** Teste a sua solução.
Lembre que você pode usar este método:

$$[\mathrm{EL}_3] = \left(\begin{array}{rcl} f' + fg & = & h \\ G' & = & g \\ f & = & e^{-G}(\int e^G h\,dx + C) \end{array} \right)$$

Questão 4
(Total: 1.0 pts)

4) Sejam $(*_5)$ e $(*_6)$ estas EDOs:

$$\begin{array}{rl} 2xy^3\,dx + 3x^2y^2\,dy = 0 & (*_5) \\ 2x^2y^3\,dx + 3x^3y^2\,dy = 0 & (*_6) \end{array}$$

a) **(0.1 pts)** Mostre que a $(*_5)$ é exata.
b) **(0.1 pts)** Mostre que $(*_6)$ não é exata.
c) **(0.4 pts)** Encontre a solução geral de $(*_5)$.
d) **(0.4 pts)** Teste a sua solução geral da $(*_5)$.
Lembre que você pode usar este método:

$$[\mathrm{E}_5] = \left(\begin{array}{rcrcl} dz & = & z_x dx + z_y dy & = & 0 \\ \frac{d}{dx}z & = & z_x + z_y \frac{dy}{dx} & = & 0 \\ z & = & C & & \end{array} \right)$$

Questão 5
(Total: 1.0 pts)

Seja

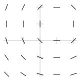
$$f(x) \quad = \quad 4 - 2x.$$

Rode o gráfico de f entre $y = 0$ e $y = 2$ em torno do eixo y, e chame a figura que você obteve de C. Chame de S o sólido de revolução que é o fecho convexo de C – vou explicar isso no quadro.

a) **(0.5 pts)** Represente graficamente C e S.

b) **(0.5 pts)** Calcule o volume de S.

Mini-gabarito

1a) 

(%i1) `solpos;`
(%o1)
$$y=\sqrt{-x^2+2\,x-2\,\%c+1}+1$$

(%i2) `solneg;`
(%o2)
$$y=1-\sqrt{-x^2+2\,x-2\,\%c+1}$$

(%i3) `e1c : subst(solneg, star1);`
(%o3)
$$\frac{d}{d\,x}\left(1-\sqrt{-x^2+2\,x-2\,\%c+1}\right)=\frac{x-1}{\sqrt{-x^2+2\,x-2\,\%c+1}}$$

(%i4) `ev(e1c, 'derivative);`
(%o4)
$$-\left(\frac{2-2\,x}{2\,\sqrt{-x^2+2\,x-2\,\%c+1}}\right)=\frac{x-1}{\sqrt{-x^2+2\,x-2\,\%c+1}}$$

(%i5) `e1d;`
(%o5)
$$y=\sqrt{-x^2+2\,x+24}+1$$

(%i6) `e1e;`
(%o6)
$$y=1-\sqrt{-x^2+2\,x+24}$$

(%i1) `g  : rhs(ode2(star2,y,x));`
(%o1)
$$\%k1\,e^{5\,x}+\%k2\,e^{-2\,x}$$

(%i2) `f1 : subst([%k1=1,%k2=0], g);`
(%o2)
$$e^{5\,x}$$

(%i3) `f2 : subst([%k1=0,%k2=1], g);`
(%o3)
$$e^{-2\,x}$$

(%i4) `h;`
(%o4)
$$\frac{5\,e^{5\,x}}{7}+\frac{16\,e^{-2\,x}}{7}$$

(%i5) `ode2(star3,y,x);`
(%o5)
$$y=e^{-2\,x}\,\left(\%k1\,\sin\left(5\,x\right)+\%k2\,\cos\left(5\,x\right)\right)$$

(%i1) `star4 : 'diff(y,x) - 2*y/x = 3*x;`
(%o1)
$$\frac{d}{d\,x}\,y-\frac{2\,y}{x}=3\,x$$

(%i2) `sol   : ode2(star4,y,x);`
(%o2)
$$y=x^2\,\left(3\,\log x+\%c\right)$$

(%i3) `e1    : subst(sol, star4);`
(%o3)
$$\frac{d}{d\,x}\,\left(x^2\,\left(3\,\log x+\%c\right)\right)-2\,x\,\left(3\,\log x+\%c\right)=3\,x$$

(%i4) `e2    : ev(e1, 'derivative);`
(%o4)
$$3\,x=3\,x$$

(%i1) `exact5;`
(%o1)
$$6\,x\,y^2=6\,x\,y^2$$

(%i2) `notexact6;`
(%o2)
$$6\,x^2\,y^2=9\,x^2\,y^2$$

(%i3) `sol5;`
(%o3)
$$y=\frac{\%c}{x^{\frac{2}{3}}}$$

(%i4) `test5;`
(%o4)
$$3\,\%c^2\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\left(\frac{\%c}{x^{\frac{2}{3}}}\right)\right)\,x^{\frac{2}{3}}+\frac{2\,\%c^3}{x}=0$$

(%i5) `ev(test5, 'derivative);`
(%o5)
$$0=0$$

(%i1) `e1 : y = 4-2*x;`
(%o1)
$$y=4-2\,x$$

(%i2) `e2 : solve(e1,x)[1];`
(%o2)
$$x=-\left(\frac{y-4}{2}\right)$$

(%i3) `define(raio(y), rhs(e2));`
(%o3)
$$\mathrm{raio}\left(y\right):=-\left(\frac{y-4}{2}\right)$$

(%i4) `define(area(y), %pi * raio(y)^2);`
(%o4)
$$\mathrm{area}\left(y\right):=\frac{\pi\,\left(y-4\right)^2}{4}$$

(%i5) `integrate(area(y),y,0,2);`
(%o5)
$$\frac{14\,\pi}{3}$$