Cálculo 2 - 2024.1

Aula 14: diferenciais e
introdução às regras de
mudança de variável na integral

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C2.html

Links

Leit4p55 (p.269) 4.9 A diferencial
Leit4p61 (p.275) reescritas (...) usando a notação de Leibniz
Leit5p13 (p.296) Suponha que desejamos antidiferenciar $(1+x^2)^9(2x)$
Leit5p13 (p.296) 5.2.1 Regra da cadeia para a antidiferenciação
Leit5p19 (p.302) Exercícios 5.2

StewPtCap1p5 (p.10) variável dependente
StewPtCap3p75 (p.228) Diferenciais
StewPtCap5p39 (p.360) 5.4 Integrais Indefinidas
StewPtCap5p48 (p.369) 5.5 A Regra da Substituição
StewPtCap5p51 (p.372) Regra da Substituição para as Integrais Definidas
StewPtCap5p51 (p.372) Demonstração. Seja F uma primitiva de f...
StewPtCap5p53 (p.374) Exercícios

Miranda117 4.7 Aproximações Lineares e Diferencial
Miranda119 Definição 7: a diferencial
Miranda189 6.2 Integração por Substituição
Miranda191 Exercícios
Miranda192 Exemplo 6.6
Miranda193 Não podemos calcular uma integral que possui tanto um x e um u nela
Miranda196 Exercícios

...reescritas usando a notação de Leibniz

O Leithold define diferenciais na p.269, e na p.275...
Leit4p55 (p.269) 4.9 A diferencial
Leit4p61 (p.275) ...usando a notação de Leibniz
ele tem esta tabela, em que ele mostra como as regras usuais de derivação podem ser traduzidas pra regras usando diferenciais:

$$
\begin{array}{rcl}
\frac{d(c)}{dx} &=& 0 \\
\frac{d(x^n)}{dx} &=& nx^{n-1} \\
\frac{d(cu)}{dx} &=& c\frac{du}{dx} \\
\frac{d(u+v)}{dx} &=& \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx} \\
\frac{d(uv)}{dx} &=& u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx} \\
\frac{d(\frac{u}{v})}{dx} &=& \frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2} \\
\frac{d(u^n)}{dx} &=& nu^{n-1}\frac{du}{dx}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
d(c) &=& 0 \\
d(x^n) &=& nx^{n-1}dx \\
d(cu) &=& c\,du \\
d(u+v) &=& du+dv \\
d(uv) &=& u\,dv+v\,du \\
d(\frac{u}{v}) &=& \frac{v\,du-u\,dv}{v^2} \\
d(u^n) &=& nu^{n-1}du
\end{array}
$$

quando eu seguia a ordem dos livros e ensinava diferenciais em C2 as pessoas cometiam tantos, tantos, tantos erros nas provas – principalmente na mudança de variável na integral, que vamos ver na próxima página – que as provas eram um massacre...
...aí eu resolvi $\boxed{\text{PROIBIR}}$ diferenciais em C2. A gente vai usar elas só em alguns pontos muito específicos da matéria de C2, e vai deixar pra ver elas direito em C3.

Introdução

A fórmula mais difícil de justificar de Cálculo 2 é essa aqui – a fórmula da mudança de variável na integral indefinida ("MVI"):

$$\int f'(\underbrace{g(x)}_{u})\,\underbrace{\underbrace{g'(x)}_{\frac{du}{dx}}\,dx}_{du} = \int f'(u)\,du$$

Tem dois modos da gente acreditar nela. O primeiro é assim: os livros dizem que a MVI é verdade, então se a gente decorar ela e algumas demonstrações curtas dela e a gente aprender a recitá-las com muita, muita, *muita* convicção então a gente

- vai se convencer de que ela é verdade,
- vai ser capaz de usar ela na prova sem errar,
- e a gente vai ser capaz de convencer outras pessoas de que ela é verdade.

Tem uma demonstração da MVI aqui,

StewPtCap5p48 (p.369) 5.5 A Regra da Substituição

mas eu até hoje não consigo acreditar direito nessa demonstração – me parece que faltam muitos detalhes nela, *e eu não sei completar esses detalhes*.

O segundo modo da gente acreditar na MVI é a gente aprender a usar isso aqui,

$$[\text{MVD4}] = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx &=& f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ &=& f(g(b)) - f(g(a)) \\ &=& f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ &=& \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right)$$

onde "MVD" quer dizer "mudança de variável na integral definida", e o "4" quer dizer "versão com 4 igualdades". Note que esse [MVD4] é uma demonstração – em que cada passo é fácil de justificar! – e não uma fórmula... a fórmula da MVD é essa aqui,

$$[\text{MVD1}] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \quad = \quad \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \right)$$

e a fórmula da MVI é esta:

$$[\text{MVI1}] = \left(\int f'(g(x))g'(x)\,dx \quad = \quad \int f'(u)\,du \right)$$

as abreviações são estas,

$$\begin{array}{ccc} [\text{MVD4}] & \to & [\text{MVI3}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\text{MVD1}] & \to & [\text{MVI1}] \end{array}$$

e a gente vai aprender a expandir cada aplicação da [MVI1] pra uma aplicação da [MVD4] – em que cada passo vai ser fácil de justificar.

“Meu objetivo é...” (2)

Você já deve ter relido os slides da “Introdução ao curso”
http://anggtwu.net/LATEX/2024-1-C2-intro.pdf
várias vezes. A introdução tem um slide chamado “Meu objetivo é...”, que tem esse trecho aqui:

> Cálculo 2 tem vários assuntos que funcionam assim: se você tentar aprender o assunto B direto ele é muito, muito, muito difícil, e você vai gastar – digamos – 200 horas de estudo pra aprender ele... mas se você aprender o assunto A primeiro você consegue aprender os dois assuntos, A e B, em 20 horas ao invés de 200.

e ela tem vários slides que falam de atividades que exercitam músculos mentais bem diferentes. O que importa agora é que “entender de cabeça” e “entender escrevendo as subtituições por extenso no papel” são atividades que exercitam músculos mentais beeem diferentes, e o modo rápido de aprender Cálculo 2 é nessa ordem aqui:

A. aprender a fazer as substituições no papel

B. aprender a fazer as substituições de cabeça

C. entender o que os livros dizem

Você só vai conseguir aprender o B (“...de cabeça”) treinando bastante o A (“...no papel”), e pra conseguir entender o que os livros dizem (“C”) você muitas vezes vai ter que expandir uma frase misteriosa do livro em MUITOS passos mais simples. Aqui tem alguns exemplos de coisas super complicadas que os livros que nós estamos usando escreveram em poucas frases cada uma:

StewPtCap5p51 (p.372) Seja F uma primitiva de f...
Miranda193 ...que possui tanto um x e um u...

A matéria desse curso é gigantesca e nós temos muito pouco tempo. Se você ficar insistindo em tentar entender “de cabeça” o que os livros dizem sem tentar escrever as substituições no papel eu vou ter que usar esse slogan daqui,

MEU OBJETIVO É REPROVAR
PESSOAS COMO VOCÊ!!!

que na verdade é uma versão abreviada de uma idéia bem maior – releia os slides da “Introdução ao curso” pra entender ela direito.

MVDs e MVIs

$$
[\text{MVD4}] \;=\; \left(\begin{array}{rcl}
\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\
 & = & f(g(b)) - f(g(a)) \\
 & = & f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\
 & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du
\end{array}\right)
$$

$$
[\text{MVD1}] \;=\; \left(\; \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \;\right)
$$

$$
[\text{MVI3}] \;=\; \left(\begin{array}{rcl}
\int f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x)) \\
 & = & f(u) \\
 & = & \int f'(u)\,du
\end{array}\right)
$$

$$
[\text{MVI1}] \;=\; \left(\; \int f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int f'(u)\,du \;\right)
$$

MVDs e MVIs, versão colorida

$$[\text{MVD4}] = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & f(g(b)) - f(g(a)) \\ & = & f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD1}] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI3}] = \left(\begin{array}{rcl} \int f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x)) \\ & = & f(u) \\ & = & \int f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI1}] = \left(\int f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int f'(u)\,du \right)$$

Um caso particular: $\int \cos(2x) \cdot 2\,dx$

$$[\mathrm{MVD4}] \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & f(g(b)) - f(g(a)) \\ & = & f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\mathrm{MVD4}] \begin{bmatrix} f(x):=\mathrm{sen}(x) \\ f'(x):=\cos(x) \\ g(x):=2\cdot x \\ g'(x):=2 \\ a:=3 \\ b:=4 \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=3}^{x=4} \cos(2\cdot x)\cdot 2\,dx & = & \mathrm{sen}(2\cdot x)\big|_{x=3}^{x=4} \\ & = & \mathrm{sen}(2\cdot 4) - \mathrm{sen}(2\cdot 3) \\ & = & \mathrm{sen}(u)\big|_{u=2\cdot 3}^{u=2\cdot 4} \\ & = & \int_{u=2\cdot 3}^{u=2\cdot 4} \cos(u)\,du \end{array} \right)$$

Exercício 1

Lembre que:

$$
\begin{array}{rcl}
[\text{MVD4}] & = & \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & f(g(b)) - f(g(a)) \\ & = & f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right) \\
[\text{MVD1}] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \right) \\
[\text{MVI1}] & = & \left(\int f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int f'(u)\,du \right)
\end{array}
$$

Sejam $[\text{S1}] = \begin{bmatrix} f'(u){:=}u^{10} \\ f(u){:=}\frac{1}{11}u^{11} \\ g(x){:=}x^2{+}4 \\ g'(x){:=}2x \end{bmatrix}$ e $[\text{S2}] = \begin{bmatrix} f'(x){:=}\tan(x) \\ g(x){:=}x^2 \\ g'(x){:=}2x \end{bmatrix}$.

Complete:
a) [MVI1][S1] = ?
b) [MVD4][S1] = ?
c) [MVI1][S2] = ?
d) [MVD1][S2] = ?
e) [MVD4][S2] = ?

O item (e) vai ajudar a gente a entender isso aqui:
StewPtCap5p51 (p.372) Demonstração. Seja F uma primitiva de f...

Expanda as justificativas

Na figura abaixo o [A] é um caso particular do [MVD4] *com justificativas*:

$$\begin{array}{rcl}
[\mathrm{TFC2}] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
[\mathrm{defdif}] & = & \left(F(x)\big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a) \right) \\
[\mathrm{A}] & = & \left(\begin{array}{rcll}
\int_{x=3}^{x=4} \cos(2\cdot x)\cdot 2\,dx & = & \mathrm{sen}(2\cdot x)\big|_{x=3}^{x=4} & \text{por } [\mathrm{TFC2}] \begin{bmatrix} F(x):=\mathrm{sen}(2\cdot x) \\ F'(x):=\cos(2\cdot x)\cdot 2 \\ a:=3 \\ b:=4 \end{bmatrix} \\
& = & \mathrm{sen}(2\cdot 4) - \mathrm{sen}(2\cdot 3) & \text{por } [\mathrm{defdif}] \begin{bmatrix} F(x):=\mathrm{sen}(2\cdot x) \\ a:=3 \\ b:=4 \end{bmatrix} \\
& = & \mathrm{sen}(u)\big|_{u=2\cdot 3}^{u=2\cdot 4} & \text{por } [\mathrm{defdif}] \begin{bmatrix} x:=u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(u):=\mathrm{sen}(u) \\ a:=2\cdot 3 \\ b:=2\cdot 4 \end{bmatrix} \\
& = & \int_{u=2\cdot 3}^{u=2\cdot 4} \cos(u)\,du & \text{por } [\mathrm{TFC2}] \begin{bmatrix} x:=u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(u):=\mathrm{sen}(u) \\ F'(u):=\cos(u) \\ a:=2\cdot 3 \\ b:=2\cdot 4 \end{bmatrix}
\end{array} \right)
\end{array}$$

Exercício 2.
Expanda cada uma das justificativas,

a) $[\mathrm{TFC2}] \begin{bmatrix} F(x):=\mathrm{sen}(2\cdot x) \\ F'(x):=\cos(2\cdot x)\cdot 2 \\ a:=3 \\ b:=4 \end{bmatrix} = ?$

b) $[\mathrm{defdif}] \begin{bmatrix} F(x):=\mathrm{sen}(2\cdot x) \\ a:=3 \\ b:=4 \end{bmatrix} = ?$

c) $[\mathrm{defdif}] \begin{bmatrix} x:=u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(u):=\mathrm{sen}(u) \\ a:=2\cdot 3 \\ b:=2\cdot 4 \end{bmatrix} = ?$

d) $[\mathrm{TFC2}] \begin{bmatrix} x:=u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(u):=\mathrm{sen}(u) \\ F'(u):=\cos(u) \\ a:=2\cdot 3 \\ b:=2\cdot 4 \end{bmatrix} = ?$

e veja que nem sempre a justificativa dá exatamente a igualdade à esquerda dela – às vezes ela dá só algo que, arrãm, *justifica* a igualdade.

Complete as justificativas

Na figura abaixo o [B] é um outro caso particular do [MVD4] com justificativas,

$$\begin{array}{rcl}
\text{[TFC2]} & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\big|_{x=a}^{x=b}\right) \\
\text{[defdif]} & = & \left(F(x)\big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)\right) \\
\text{[B]} & = & \left(\begin{array}{rcll}
\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & \text{por } ?_1 \\
& = & f(g(b)) - f(g(a)) & \text{por } ?_2 \\
& = & f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & \text{por } ?_3 \\
& = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du & \text{por } ?_4
\end{array}\right)
\end{array}$$

Exercício 3.
Encontre justificativas que podem ser postas nas posições $?_1$, $?_2$, $?_3$ e $?_4$.

Dica:
É BEEEM difícil encontrar os $?_1$, $?_2$, $?_3$ e $?_4$ direto de cabeça...
Use o chutar e testar e não apague nenhum dos seus chutes e testes!

Dica 2:
"Resolver por chutar e testar" e "resolver de cabeça" são técnicas que usam músculos mentais diferentes, e quase sempre quando a gente encontra um problema "com cara de Cálculo 2" o modo mais rápido de descobrir como resolver ele "de cabeça" é começar tentando resolver ele "por chutar e testar"! Vou tentar fazer umas animações explicando a idéia geral por trás disso quando der. Isso tem a ver com uma das minhas áreas de pesquisa... um link:

`http://anggtwu.net/math-b.html#2022-md`

Resumindo: *treine chutar e testar!!!*

Mais um exemplo de chutar e testar

Isto é uma versão melhorada de...
2iQ34 um quadro da aula de 9/abril/2024.
Lembre que:

$$[\text{RC}] = \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

Digamos que queremos resolver isto,

$$\int \frac{2}{3x+4} + \frac{5}{6x+7}\,dx \;=\; ?$$

mas nós vamos começar por este problema mais simples,

$$\int \frac{2}{3x+4}\,dx \;=\; ?$$

que é equivalente a:

$$\frac{d}{dx}\,? \;=\; \frac{2}{3x+4}$$

Tente entender a solução por chutar e testar da direita. Muita gente acha que não pode fazer chutes e testes com números – porque, sei lá, talvez o Reginaldo tenha dito pra elas que isso é coisa de gente burra... mas repare que à direita eu fiz alguns chutes e testes usando números, e logo depois *eu transformei esses chutes e testes com números em chutes e testes com variáveis, que viraram fórmulas novas...* e acho que todo mundo concorda que inventar fórmulas e demonstrá-las é algo bem chique.

$$\begin{array}{rcll}
\frac{d}{dx}\ln x & = & \frac{1}{x} & \\
\frac{d}{dx}2\ln x & = & \frac{1}{x} & \\
\frac{d}{dx}\ln(g(x)) & \overset{(1)}{=} & \frac{1}{g(x)}g'(x) & \text{por [RC]} \left[\begin{smallmatrix} f(x):=\ln x \\ f'(x)=1/x \end{smallmatrix}\right] \\
 & \overset{(2)}{=} & \frac{g'(x)}{g(x)} & \\
\frac{d}{dx}\ln(g(x)) & \overset{(3)}{=} & \frac{g'(x)}{g(x)} & \text{por (1) e (2)} \\
\frac{d}{dx}\ln(6x+7) & = & \frac{6}{6x+7} & \text{por (3)} \left[\begin{smallmatrix} f(x):=6x+7 \\ f'(x):=6 \end{smallmatrix}\right] \\
\frac{d}{dx}\ln(ax+b) & \overset{(4)}{=} & \frac{a}{ax+b} & \text{por (3)} \\
\frac{d}{dx}(c\ln(ax+b)) & \overset{(5)}{=} & c\frac{a}{ax+b} & \text{por (4)} \\
\frac{d}{dx}(c\ln(3x+4)) & \overset{(6)}{=} & c\frac{3}{3x+4} & \text{por (5)} \\
\frac{d}{dx}(\frac{1}{3}\ln(3x+4)) & \overset{(6)}{=} & \frac{1}{3}\frac{3}{3x+4} & \\
\frac{d}{dx}(\frac{1}{3}\ln(3x+4)) & = & \frac{1}{3x+4} & \\
\frac{d}{dx}(\frac{2}{3}\ln(3x+4)) & = & \frac{2}{3x+4} & \\
\frac{d}{dx}(\frac{a}{b}\ln(bx+c)) & = & \frac{a}{b}\frac{b}{bx+c} & \text{por (5)} \\
 & = & \frac{a}{bx+c} & \\
\frac{d}{dx}(\frac{a}{b}\ln(bx+c)) & \overset{(7)}{=} & \frac{a}{bx+c} & \\
\int \frac{a}{bx+c}\,dx & \overset{(8)}{=} & \frac{a}{b}\ln(bx+c) & \text{por (7)} \\
\int \frac{2}{3x+4}\,dx & \overset{(9)}{=} & \frac{2}{3}\ln(3x+4) & \text{por (8)} \\
\int \frac{5}{6x+7}\,dx & \overset{(10)}{=} & \frac{5}{6}\ln(6x+7) & \text{por (8)} \\
\int \frac{2}{3x+4} + \frac{5}{6x+7}\,dx & \overset{(11)}{=} & \frac{2}{3}\ln(3x+4) + \frac{5}{6}\ln(6x+7) &
\end{array}$$

Leithold, p.302

Leit5p19 (p.302) Exercícios 5.2

```
(%i1) items : [
        ["1.", sqrt(1-4*y),          u=1-4*y],
        ["2.", (3*x - 1/4)^(1/3),    u=3*x-1/4],
        ["3.", (6   - 2*x)^(1/3),    u=6-2*x],
        ["4.", sqrt(5*r + 1),        u=5*r+1],
        ["5.", x*sqrt(x^2 - 9),      u=x^2-9],
        ["6.", 3*x*sqrt(4 - x^2),    u=4-x^2],
        ["7.", x^2*(x^3-1)^10,       u=x^3-1],
        ["8.", x*(2*x^2+1)^6,        u=2*x^2+1],
        ["9.", 5*x*(9-4*x^2)^(2/3), u=9-4*x^2],
        ["10.", x/(x^2+1)^3,         u=x^2+1]
       ]$
(%i2) lfc_solve_m (items);
```

(%o2)

$$\begin{pmatrix}
1. & \int \sqrt{1-4\,y}\;dy & = & -\left(\frac{(1-4\,y)^{\frac{3}{2}}}{6}\right) \\
2. & \int \left(3\,x-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\;dx & = & \frac{\left(3\,x-\frac{1}{4}\right)^{\frac{4}{3}}}{4} \\
3. & \int (6-2\,x)^{\frac{1}{3}}\;dx & = & -\left(\frac{3\,(6-2\,x)^{\frac{4}{3}}}{8}\right) \\
4. & \int \sqrt{5\,r+1}\;dr & = & \frac{2\,(5\,r+1)^{\frac{3}{2}}}{15} \\
5. & \int x\,\sqrt{x^2-9}\;dx & = & \frac{(x^2-9)^{\frac{3}{2}}}{3} \\
6. & 3\int x\,\sqrt{4-x^2}\;dx & = & -(4-x^2)^{\frac{3}{2}} \\
7. & \int x^2\,(x^3-1)^{10}\;dx & = & \frac{(x^3-1)^{11}}{33} \\
8. & \int x\,(2\,x^2+1)^6\;dx & = & \frac{(2\,x^2+1)^7}{28} \\
9. & 5\int x\,(9-4\,x^2)^{\frac{2}{3}}\;dx & = & -\left(\frac{3\,(9-4\,x^2)^{\frac{5}{3}}}{8}\right) \\
10. & \int \frac{x}{(x^2+1)^3}\;dx & = & -\left(\frac{1}{4\,(x^2+1)^2}\right)
\end{pmatrix}$$

```
(%i3) lfc_change_m(items);
```

(%o3)

$$\begin{pmatrix}
1. & \int \sqrt{1-4\,y}\;dy & = & -\left(\frac{\int \sqrt{u}\;du}{4}\right) & u=1-4\,y \\
2. & \int \left(3\,x-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\;dx & = & \frac{\int u^{\frac{1}{3}}\;du}{3} & u=3\,x-\frac{1}{4} \\
3. & \int (6-2\,x)^{\frac{1}{3}}\;dx & = & -\left(\frac{\int u^{\frac{1}{3}}\;du}{2}\right) & u=6-2\,x \\
4. & \int \sqrt{5\,r+1}\;dr & = & \frac{\int \sqrt{u}\;du}{5} & u=5\,r+1 \\
5. & \int x\,\sqrt{x^2-9}\;dx & = & \frac{\int \sqrt{u}\;du}{2} & u=x^2-9 \\
6. & 3\int x\,\sqrt{4-x^2}\;dx & = & -\left(\frac{3\int \sqrt{u}\;du}{2}\right) & u=4-x^2 \\
7. & \int x^2\,(x^3-1)^{10}\;dx & = & \frac{\int u^{10}\;du}{3} & u=x^3-1 \\
8. & \int x\,(2\,x^2+1)^6\;dx & = & \frac{\int u^6\;du}{4} & u=2\,x^2+1 \\
9. & 5\int x\,(9-4\,x^2)^{\frac{2}{3}}\;dx & = & -\left(\frac{5\int u^{\frac{2}{3}}\;du}{8}\right) & u=9-4\,x^2 \\
10. & \int \frac{x}{(x^2+1)^3}\;dx & = & \frac{\int \frac{1}{u^3}\;du}{2} & u=x^2+1
\end{pmatrix}$$

```
(%i4)
```