Cálculo 2 - 2024.1

Aula 2: expressões e árvores

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C2.html

Links

2hT4 "Releia a dica 7"
2iQ1 Quadros da aula 1 (18/mar/2023)
2iQ3 Quadros da aula 2 (19/mar/2023)
2hT39 Justificativas no formato "... por ... com ..."
2hT127 Músculos mentais, jogo colaborativo
Leit1p37 $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Introdução

Na primeira aula nós fizemos um monte de exercícios de "set comprehensions", e vocês viram – por exemplo, na página Mpg10, nestes itens daqui,

$$\begin{array}{rcl} G & := & \{x \in \{3,4\}, y \in \{1,2,3\}; (y,x)\} \\ H & := & \{x \in \{3,4\}, y \in \{1,2,3\}; (x,2)\} \end{array}$$

que às vezes pra resolver um exercício a gente precisa "pensar como um computador".

Maxima vs. SymPy

$$\int_{x=a}^{x=b} f'(g(u))g'(u)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du$$

```
=___________________.
|                   |
integrate__.__.__.  integrate__.__.__.
|          |  |  |  |          |  |  |
*___.      x  a  b  fp         u  g  g
|   |               |             |  |
fp  gp              u             a  b
|   |
g   x
|
x
```

```
Equality_______________.
|                      |
Integral__.            Integral__.
|         |            |         |
Mul__.    Tuple__.__.  fp        Tuple__.__.
|    |    |      |  |  |         |      |  |
fp   gp   x      a  b  u         u      g  g
|    |                                  |  |
g    x                                  a  b
|
x
```

```
(%i1) eq1 : 1*x + 2*y = 3;
```
(%o1)
$$2\,y+x=3$$

```
(%i2) eq2 : 4*x + 5*y = 6;
```
(%o2)
$$5\,y+4\,x=6$$

```
(%i3)            4*eq1;
```
(%o3)
$$4\,\left(2\,y+x\right)=12$$

```
(%i4)       expand(4*eq1);
```
(%o4)
$$8\,y+4\,x=12$$

```
(%i5) eq3 : expand(4*eq1);
```
(%o5)
$$8\,y+4\,x=12$$

```
(%i6) eq4 : eq2 - eq3;
```
(%o6)
$$-\left(3\,y\right)=-6$$

```
(%i7) eq5 : eq4 / -3;
```
(%o7)
$$y=2$$

```
(%i8)              eq5;
```
(%o8)
$$y=2$$

```
(%i9)                   eq1;
```
(%o9)
$$2\,y+x=3$$

```
(%i10) eq6 : subst(eq5, eq1);
```
(%o10)
$$x+4=3$$

```
(%i11) eq7 : eq6 - 4;
```
(%o11)
$$x=-1$$

```
(%i12)             [eq7,eq5];
```
(%o12)
$$\left[x=-1,y=2\right]$$

```
(%i13)                          eq1;
```
(%o13)
$$2\,y+x=3$$

```
(%i14)                                eq2;
```
(%o14)
$$5\,y+4\,x=6$$

```
(%i15) eq8 : subst([eq7,eq5], eq1);
```
(%o15)
$$3=3$$

```
(%i16) eq9 : subst([eq7,eq5],      eq2);
```
(%o16)
$$6=6$$

```
(%i17) matrix(['eq1, ":", eq1],
              ['eq2, ":", eq2],
              ['eq3, ":", eq3],
              ['eq4, ":", eq4],
              ['eq5, ":", eq5],
              ['eq6, ":", eq6],
              ['eq7, ":", eq7],
              ['eq8, ":", eq8],
              ['eq9, ":", eq9]);
```
(%o17)
$$\begin{pmatrix}\mathrm{eq1} & : & 2\,y+x=3\\ \mathrm{eq2} & : & 5\,y+4\,x=6\\ \mathrm{eq3} & : & 8\,y+4\,x=12\\ \mathrm{eq4} & : & -\left(3\,y\right)=-6\\ \mathrm{eq5} & : & y=2\\ \mathrm{eq6} & : & x+4=3\\ \mathrm{eq7} & : & x=-1\\ \mathrm{eq8} & : & 3=3\\ \mathrm{eq9} & : & 6=6\end{pmatrix}$$

```
(%i18)
```

```
(%i1) eq1 : 1*x + 2*y = 3;
(%o1)
```

$$2\,y+x=3$$

```
(%i2) eq2 : 4*x + 8*y = 6;
(%o2)
```

$$8\,y+4\,x=6$$

```
(%i3)                 4*eq1;
(%o3)
```

$$4\,(2\,y+x)=12$$

```
(%i4)         expand(4*eq1);
(%o4)
```

$$8\,y+4\,x=12$$

```
(%i5) eq3 : expand(4*eq1);
(%o5)
```

$$8\,y+4\,x=12$$

```
(%i6) eq4 : eq2 - eq3;
(%o6)
```

$$0=-6$$

```
(%i7) matrix(['eq1, ":", eq1],
             ['eq2, ":", eq2],
             ['eq3, ":", eq3],
             ['eq4, ":", eq4]);
(%o7)
```

$$\begin{pmatrix} \mathrm{eq1} & : & 2\,y+x=3 \\ \mathrm{eq2} & : & 8\,y+4\,x=6 \\ \mathrm{eq3} & : & 8\,y+4\,x=12 \\ \mathrm{eq4} & : & 0=-6 \end{pmatrix}$$

```
(%i8)
```

Subárvores

Cada bolinha de uma árvore “gera” uma subárvore – a subárvore formada por essa bolinha e todas as outras bolinhas abaixo dela.

A gente quer que cada subárvore corresponda a uma *subexpressão*. A definição formal de subexpressão é bem complicada, mas tente se virar usando só essas idéias daqui:

- subexpressões são trechos da expressão original que são expressões completas – por exemplo, ‘$2/(x$’ não é uma expressão completa,

- se a nossa expressão original for toda “horizontal” – como $2/(x+y)$, mas não como $\frac{2}{x+y}$ – então a gente pode usar diagramas de “underbraces” pra indicar quais são as subexpressões, como nestes dois exemplos (que dão árvores diferentes):

$$\underbrace{\underbrace{f(\underbrace{a}_{},\underbrace{b}_{})}_{}+\underbrace{c}_{}}_{}$$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{f}_{}(\underbrace{a}_{},\underbrace{b}_{})}_{}+\underbrace{c}_{}}_{}$$

Exercício
Encontre uma boa representação em árvore para cada uma das expressões abaixo. Faça os diagramas de underbraces quando precisar, e lembre que você vai ter que improvisar em vários lugares, principalmente pra decidir que nomes pôr nas bolinhas!

a) $2/5$
b) $\frac{2}{5}$
c) $2/(x+y)$
d) $3x+4y$
e) $3x+4y=z$
f) $f(x)+g(x)$
g) $2+3x$
h) $2+3\cdot x$
i) $2+(3\cdot x)$
j) $G:=\{x\in\{3,4\},y\in\{1,2,3\};(y,x)\}$
k) $\{1,2,3\}$

Lembre que em Cálculo 1 você aprendeu a chegar direto na resposta certa, mas C2 é bem diferente de C1... aqui você vai ter que escrever várias idéias, e se você ficar apagando, rasgando e jogando fora os papéis em que você escreveu idéias que depois você achou ruins você vai progredir muito mais devagar do que as pessoas que têm coragem de guardar tudo!

Subárvores (2)

Tente encontrar uma boa representação em árvore para esta expressão aqui:

$$\text{Seja } f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{quando } x < 2, \\ 2 & \text{quando } 2 \leq x \end{cases}$$

Depois releia a dica 3 e veja se cada bolinha da sua árvore corresponde a um símbolo específico da expressão acima, e se quando você aponta pra esse símbolo os seus colegas conseguem entender qual é a menor subárvore – e a menor subexpressão – que contém esse símbolo.