Cálculo 2 - 2024.1

Aula 24: volumes

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C2.html

Links

StewPtCap6p12 (p.389) 6.2 Volumes
StewPtCap6p13 (p.390) volume da esfera
StewPtCap6p18 (p.395) pirâmide de base quadrada
StewPtCap6p20 (p.397) Exercícios: façam do 1 ao 5!
StewPtCap8p17 (p.500) trombeta de Gabriel
StewPtCap13p18 (p.768) 13.3 Comprimento de Arco e Curvatura
StewPtCap15p6 (p.874) 15.1 Integrais múltiplas sobre retângulos
StewPtCap15p9 (p.877) aproximações do volume
Miranda285 9.3 Volume
Miranda288 O volume da esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$
Miranda285 9.3.1 Secções transversais
Miranda289 9.3.2 Sólidos de revolução
Miranda292 Façam os exercícios 2, 3, 4 e 5!
Leit6p3 (p.374) 6.1 Volumes de sólidos por cortes
Leit6p17 (p.388) 6.3 Comprimento de arco

3cT75 Pirâmide (3D)
2gT105 Um jogo colaborativo
2gT137 P2 de 2023.1, questão sobre volumes

Quadros de 2023.2:
2hQ47 Quadros da aula 19 (09/out/2023)
2hQ49 Quadros da aula 21 (11/out/2023)

Quadros de 2023.1:
2gQ59 Quadros da aula 27 (4/julho/2023)

Exercício 1

Sejam:

$$\begin{array}{rcl}
A &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\,\}\\
B &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le x\,\}\\
C &=& \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1\,\}\\
D &=& \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le x\,\}\\
E &=& \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le x, 0\le z\le x\,\}\\
[x=\alpha] &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=\alpha\,\}\\
[y=\beta] &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=\beta\,\}\\
[[x=\alpha]] &=& \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=\alpha\,\}\\
[[y=\beta]] &=& \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=\beta\,\}\\
[[z=\gamma]] &=& \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=\gamma\,\}
\end{array}$$

Lembre das técnicas do “jogo colaborativo”, e:

a) Represente graficamente A.
b) Represente graficamente B.
c) Represente graficamente C.
d) Represente graficamente D.
e) Represente graficamente E.
f) Represente num gráfico só A e $A\cap[x=0.5]$. Qual é o comprimento de $A\cap[x=0.5]$?
g) Represente num gráfico só B e $B\cap[x=0.5]$. Qual é o comprimento de $B\cap[x=0.5]$?
h) Represente num gráfico só D e $D\cap[[x=0.5]]$. Qual é a área de $D\cap[[x=0.5]]$?
i) Represente num gráfico só D e $D\cap[[y=0.5]]$. Qual é a área de $D\cap[[y=0.5]]$?
j) Represente num gráfico só D e $D\cap[[z=0.5]]$. Qual é a área de $D\cap[[z=0.5]]$?
k) Represente num gráfico só E e $E\cap[[x=0.5]]$. Qual é a área de $E\cap[[x=0.5]]$?
l) Represente num gráfico só E e $E\cap[[y=0.5]]$. Qual é a área de $E\cap[[y=0.5]]$?
m) Represente num gráfico só E e $E\cap[[z=0.5]]$. Qual é a área de $E\cap[[z=0.5]]$?

Calcule:
n) $\mathsf{área}(E\cap[[x=0.2]])$
o) $\mathsf{área}(E\cap[[x=0.8]])$
p) $\displaystyle\int_{t=0}^{t=1}\mathsf{área}(E\cap[[x=t]])\,dt$

Dicas pro exercício 1

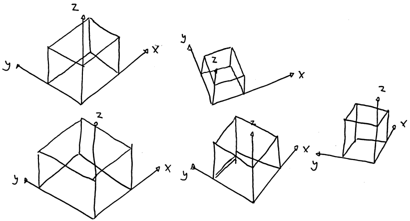
O conjunto C é um cubo e os conjuntos D e E vão ser pedaços do cubo C.

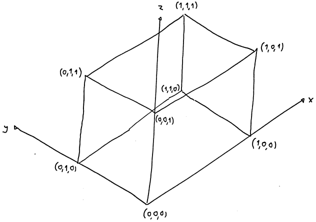
Existem 8 pontos de $\mathbb{R}^3$ que obedecem isto aqui: $x, y, z \in \{0, 1\}$. Vou inventar um nome pra eles: eles vão ser os pontos "simples". O conjunto C contém todos os pontos simples mas os conjuntos D e E só contém alguns pontos simples cada um... quais?

Pra fazer os itens que envolvem os conjuntos D e E comece fazendo um MONTE de desenhos de cubos à mão, SEM USAR RÉGUA – como eu fiz na figura de cima à direita. Se você não usar régua o seu ganho de velocidade vai ser tão grande que você não vai se incomodar muito pra descartar os desenhos que ficarem tortos demais, e você vai poder escolher quais são os desenhos nos quais os eixos estão numa posição melhor pra desenhar o conjunto E, que é meio complicado.

Quando você encontrar uma posição pros eixos que você ache que está boa faça uma versão ampliada do seu cubo naquela posição ocupando uma folha inteira, e depois escreva do lado de cada um dos pontos "simples" as coordenadas dele – como eu fiz na figura de baixo à direita. Use essa figura pra tentar entender os conjuntos D e E.

A melhor posição pra desenhar o conjunto E não é a da figura de baixo à direita.





Aviso

Na aula 19 – que era pra ser a única aula sobre volumes – as pessoas tiveram tanta dificuldade pra desenhar os conjuntos C, D e E em 3D que eu preferi considerar que elas não teriam condições de entender os trechos do Stewart em que ele faz cortes em figuras 3D e depois calcula as áreas desses cortes... então nós vamos ter uma segunda aula sobre isso.
Slogans