Cálculo 3 - 2024.1

P2 (segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C3.html

Links

http://anggtwu.net/e/maxima.e.html#2024.1-C3-P2
(find-es "maxima" "2024.1-C3-P2")

Questão 1.

(Total: 10.0 pts)

Lembre que $\mathrm{Int}(A)$ é o interior de A, $\overline{A}$ é o fecho de A, ∂A é a fronteira de A, e que se f é uma função de A em B então f^{-1} é a "imagem inversa de F", que é definida de um jeito quando o argumento é um número e de outro jeito quando o argumento é um conjunto. Se $b \in A$ e $C \subset B$, então:

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(b) & = & \{\, a \in A \mid f(a) = b \,\} \\ f^{-1}(C) & = & \{\, a \in A \mid f(a) \in C \,\} \end{array}$$

Sejam:

$$\begin{array}{rcl} C_1 & = & \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \{0,1,2\}, y \in \{0,1,2,3,4\} \,\} \\ C_2 & = & \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,2], y \in [0,4] \,\} \\ C_N & = & \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,2], y \in [2,4] \,\} \\ C_S & = & \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,2], y \in [0,2] \,\} \\ F_{PN}(x,y) & = & y + x^2 \\ F_{CS}(x,y) & = & x^2 + (y-2)^2 \\ D_N & = & \{\, (x,y) \in C_N \mid F_{PN}(x,y) \le 4 \,\} \\ D_S & = & \{\, (x,y) \in C_S \mid F_{CS}(x,y) \le 4 \,\} \\ D & = & D_N \cup D_S \\ D' & = & D \backslash \{(2,2)\} \\ G(x,y) & = & (x-1)^2 + y^2 \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{rrcl} H : & D & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & G(x,y) \end{array}$$

As letras N, S, P e C às vezes querem dizer "norte", "sul", "parábola" e "círculo", e C e D às vezes querem dizer "conjunto" e "domínio".

a) **(0.3 pts)** Faça os diagramas de numerozinhos das funções F_{PN}, F_{CS} e G nos pontos de C_1. Cada diagrama vai ter $3 \times 5 = 15$ numerozinhos.

b) **(1.2 pts)** Desenhe as curvas de nível das funções F_{PN}, F_{CS} e G em C_2. Note que C_2 é um retângulo 2×4.

c) **(0.5 pts)** Desenhe os conjuntos C_N, C_S, D_N, D_S e D.

d) **(1.0 pts)** A fronteira ∂D tem quatro "vértices". Chame-os de $V_1, \ldots, V_4$ e dê as coordenadas – exatas ou aproximadas – de cada um deles. Nos casos em que for difícil encontrar as coordenadas exatas use a notação '$\approx$' – por exemplo, escreva $P_{42} \approx (1.2, 3.4)$ ao invés de $P_{42} = (1.2, 3.4)$.

e) **(2.0 pts)** Faça um desenho bem grande com o conjunto D e as curvas de nível da função H; desenhe as curvas de nível pelo menos para $z=1$, $z=4$ e $z=9$. Use esse desenho para determinar – no olhômetro mesmo – quais são os pontos de máximos e mínimos locais da função H. Chame esses pontos de $M_1, M_2, \ldots$ e dê as coordenadas exatas ou aproximadas de cada um deles, como no item anterior.

f) **(1.0 pts)** Defina uma função contínua $H_{\mathrm{IL}} : D' \to \mathbb{R}$ tal que $H_{\mathrm{IL}}(D')$ seja um conjunto ilimitado.

O ponto (1,3) não é um máximo local da função H, e nos próximos itens você vai fazer o *início* de uma prova formal disto. Sejam:

$$\begin{array}{rcl} (x_0,y_0) & = & (1,3) \\ P_0 & = & (x_0,y_0) \\ \vec{u} & = & \nabla F_{PN}(x_0,y_0) \\ \vec{v} & = & \nabla G(x_0,y_0) \\ \vec{w} & = & \vec{v} - 3\vec{u} \\ P(t) & = & P_0 + t\vec{w} \\ r & = & \{\, P(t) \mid t \in \mathbb{R} \,\} \end{array}$$

g) **(0.5 pts)** Calcule $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

h) **(1.5 pts)** Faça um desenho – grande, mas pode ser meio torto – que mostre ∂D, P_0, $P_0 + \vec{u}/10$, $P_0 + \vec{v}/10$, $P_0 + \vec{w}/10$ e a reta r. Lembre que como r é uma reta parametrizada a gente costuma pôr anotações como '$t=0$', '$t=1$', '$t=0.1$' em alguns pontos dela.

i) **(2.0 pts)** Encontre no olhômetro um $\varepsilon > 0$ tal que isto seja verdade,

$$P([0,\varepsilon)) \subset D$$

e faça um outro desenho que pode ser meio torto, e que mostre ∂D e $P([0,\varepsilon))$. Diga qual ε você escolheu!