Cálculo 3 - 2024.1

Aulas 1 e 2: introdução ao curso

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C3.html

Links

3iQ1 Quadros da aula de 18/mar/2024
3iQ3 Quadros da aula de 20/mar/2024

"Links pra hoje" de 20/mar/2024:
3hT10 Uma trajetória em três partes
3hT11 Uma trajetória em três partes (2)
3iQ1 Quadros da aula de 18/mar/2024
2iQ7 Quadros da aula de C2 de 20/mar/2024
3hT8 Pontos mais fáceis de calcular
3fT1 Introdução a trajetórias

"Links pra hoje" de 18/mar/2024:
Mpg8 Set comprehensions
2hT4 "Releia a Dica 7"
3dT6 Vetores em Álgebra Linear e em GA
3dT7 Vetores como setas
3hT6 Seja seu próprio GeoGebra: links
3hT8 Pontos mais fáceis de calcular
3fT1 Introdução a trajetórias
2hT129 Um jogo colaborativo

Pontos mais fáceis de calcular

Muito importante:
Se você for uma pessoa pra quem
$12345+9675$ é tão fácil de calcular de cabeça quanto $12000+345$,
e $4+5x=6$ é tão fácil de resolver de cabeça quanto $1+x=2$,

...então tente pensar como uma pessoa pra quem
$12345+9675$ é muito mais difícil de calcular que $12000+345$,
e $4+5x=6$ é muito mais difícil de resolver quanto $1+x=2$...

...e além disso considere que somas são mais fáceis de calcular de cabeça do que subtrações – e que, por exemplo, dá pra calcular $34+45$ de cabeça mas dá um trabalhão, e que calcular $34-45$ de cabeça é quase impossível.

Sejam:

$$\begin{array}{rcl}
f_1(t) &=& 34+t\cdot 45 \\
f_2(t) &=& 34+(t-56)\cdot 45 \\
f_3(t) &=& 34+(t+56)\cdot 45 \\
f_4(t) &=& 34+((t-56)/4)\cdot 45 \\
f_5(t) &=& 34+((t+56)/4)\cdot 45 \\
P_1(t) &=& (12,23)+t\overrightarrow{(4,5)} \\
P_2(t) &=& (12,23)+(t-8)\overrightarrow{(4,5)} \\
P_3(t) &=& (12,23)+(t+8)\overrightarrow{(4,5)} \\
P_4(t) &=& (12,23)+((t-8)/34)\overrightarrow{(4,5)} \\
P_5(t) &=& (12,23)+((t+8)/34)\overrightarrow{(4,5)}
\end{array}$$

Os pontos mais fáceis de calcular do $f_4(t)$ são estes aqui. O caso mais fácil de todos é este,

$$34+\underbrace{((t-56)/4)}_{0}\cdot 45$$

em que temos:

$$f(56) \;=\; \underbrace{34+\underbrace{\underbrace{((\underbrace{\underbrace{t}_{56}-56}_{0})/4)}_{0}\cdot 45}_{0}}_{34}$$

E o segundo caso mais fácil é este,

$$34+\underbrace{((t-56)/4)}_{1}\cdot 45$$

em que temos:

$$f(56+4) \;=\; \underbrace{34+\underbrace{\underbrace{((\underbrace{\underbrace{t}_{60}-56}_{4})/4)}_{1}\cdot 45}_{45}}_{34+45}$$

Pontos mais fáceis de calcular (2)

Sejam:

$$
\begin{array}{rcl}
f_1(t) & = & 34 + t \cdot 45 \\
f_2(t) & = & 34 + (t-56) \cdot 45 \\
f_3(t) & = & 34 + (t+56) \cdot 45 \\
f_4(t) & = & 34 + ((t-56)/4) \cdot 45 \\
f_5(t) & = & 34 + ((t+56)/4) \cdot 45 \\
P_1(t) & = & (12,23) + t\overrightarrow{(4,5)} \\
P_2(t) & = & (12,23) + (t-8)\overrightarrow{(4,5)} \\
P_3(t) & = & (12,23) + (t+8)\overrightarrow{(4,5)} \\
P_4(t) & = & (12,23) + ((t-8)/34)\overrightarrow{(4,5)} \\
P_5(t) & = & (12,23) + ((t+8)/34)\overrightarrow{(4,5)}
\end{array}
$$

Exercício
Complete a tabela à direita com os dois pontos mais fáceis de calcular de cada uma das 10 funções acima. *Faça todas as contas de cabeça e escreva só os resultados finais!* O segundo ponto mais fácil de calcular sempre pode ser escrito nestes dois formatos, $f_4(56+4) = 34+45$ e $f_4(60) = 79$ – e você pode escolher qual dos formatos usar.

$$
\begin{array}{rcl}
f_1(\_\_\_\_\_\_) & = & \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
f_1(\_\_\_\_\_\_) & = & \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
f_2(\_\_\_\_\_\_) & = & \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
f_2(\_\_\_\_\_\_) & = & \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
f_3(\_\_\_\_\_\_) & = & \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
f_3(\_\_\_\_\_\_) & = & \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
f_4(\_\_\_\_\_\_) & = & \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
f_4(\_\_\_\_\_\_) & = & \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
f_5(\_\_\_\_\_\_) & = & \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
f_5(\_\_\_\_\_\_) & = & \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
P_1(\_\_\_\_\_\_) & = & \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
P_1(\_\_\_\_\_\_) & = & \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
P_2(\_\_\_\_\_\_) & = & \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
P_2(\_\_\_\_\_\_) & = & \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
P_3(\_\_\_\_\_\_) & = & \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
P_3(\_\_\_\_\_\_) & = & \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
P_4(\_\_\_\_\_\_) & = & \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
P_4(\_\_\_\_\_\_) & = & \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
P_5(\_\_\_\_\_\_) & = & \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
P_5(\_\_\_\_\_\_) & = & \_\_\_\_\_\_\_\_
\end{array}
$$

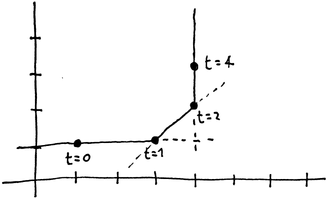
Uma trajetória em três partes

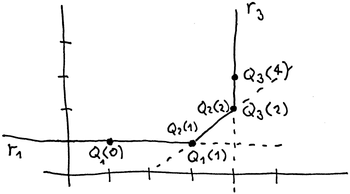
Agora você vai tentar encontrar uma descrição "formal", "algébrica", da trajetória $P(t)$ que eu desenhei à direita. Uma descrição informal dela seria assim: um corpo (pra usar terminologia de físicos...) se move em movimento retilíneo uniforme na horizonal pra direita desde $t = -\infty$ até $t = 1$, depois ele muda pra um outro movimento retilíneo uniforme e anda em diagonal na direção nordeste até $t = 2$, e a partir de $t = 3$ ele muda pra um outro movimento retilíneo uniforme, dessa vez na vertical. Temos $P(0) = (1, 1)$, $P(1) = (3, 1)$, $P(2) = (4, 2)$, e $P(3) = (4, 3)$ – dá pra ver isso pelo gráfico – e a gente pode começar definindo três trajetórias mais simples, $Q_1(t)$, $Q_2(t)$, e $Q_3(t)$, que são movimentos retilíneos uniformes, e depois montar a definição da trajetória $P(t)$ a partir delas.

Note que:

$$\begin{aligned}
(1,1) &= P(0) = Q_1(0) \\
(3,1) &= P(1) = Q_1(1) = Q_2(1) \\
(4,2) &= P(2) = Q_2(2) = Q_3(2) \\
(4,3) &= P(4) = Q_3(4)
\end{aligned}$$

$P(t) \; =$



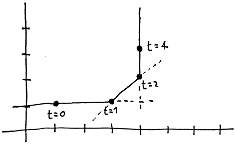


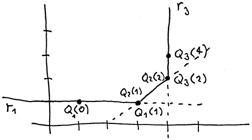
Uma trajetória em três partes (2)

Agora complete todas as lacunas abaixo:

$$\begin{array}{rcl}
Q_1(t) & = & (\underline{\quad},\underline{\quad}) + t\overrightarrow{(\underline{\quad},\underline{\quad})} \\
Q_2(t) & = & (\underline{\quad},\underline{\quad}) + (t-\underline{\quad})\overrightarrow{(\underline{\quad},\underline{\quad})} \\
Q_3(t) & = & (\underline{\quad},\underline{\quad}) + ((t-\underline{\quad})/\underline{\quad})\overrightarrow{(\underline{\quad},\underline{\quad})} \\
r_1 & = & \{\, Q_1(t) \mid t \in \mathbb{R} \,\} \\
r_2 & = & \{\, Q_2(t) \mid t \in \mathbb{R} \,\} \\
r_3 & = & \{\, Q_3(t) \mid t \in \mathbb{R} \,\}
\end{array}$$

$P(t) =$





$$P(t) = \begin{cases}
(\underline{\quad},\underline{\quad}) + t\overrightarrow{(\underline{\quad},\underline{\quad})} & \text{quando } t \le 1, \\
(\underline{\quad},\underline{\quad}) + (t-\underline{\quad})\overrightarrow{(\underline{\quad},\underline{\quad})} & \text{quando } 1 \le t \le 2, \\
(\underline{\quad},\underline{\quad}) + ((t-\underline{\quad})/\underline{\quad})\overrightarrow{(\underline{\quad},\underline{\quad})} & \text{quando } 2 \le t,
\end{cases}$$

Importante: faça todas as contas de cabeça e calcule só os "pontos mais fáceis de calcular" que eu expliquei alguns slides atrás. Você pode fazer quantos chutes-e-testes você precisar, desde que você marque eles com "se" e "então". *Não apague nenhum dos seus chutes-e-testes!*

Dê uma olhada em como as pessoas fizeram isso no quadro na aula 2:
3hQ5 Quadros de 01/set/2023

Parâmetros e casos degenerados

Sejam:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{A} & := & \{\, \{\, (1,1), (2,1) \,\}, \{\, (2,1), (2,2) \,\} \,\} \\
\mathcal{B} & := & \{\, a, b \in \mathbb{R} \; ; \; \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b \,\} \,\} \\
\mathcal{C} & := & \{\, a, b, c \in \mathbb{R} \; ; \; \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c \,\} \,\} \\
\mathcal{D} & := & \{\, a, b, c, d \in \mathbb{R} \; ; \; \{\, t \in \mathbb{R} \; ; \; (a,b) + t\overrightarrow{(c,d)} \,\} \,\} \\
r_1 & := & \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0x + 0y = 0 \,\} \\
r_2 & := & \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0x + 0y = 2 \,\} \\
r_3 & := & \{\, t \in \mathbb{R} \; ; \; (2,3) + t\overrightarrow{(0,0)} \,\} \\
r_4 & := & \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 12x + 23 \,\}
\end{array}
$$

Children:
IDARCTp2
ZHAsP3
MissingP6

Então:
$\mathcal{A}$ é [desenho],
$\mathcal{B}$ é o conjunto de todas as retas não-verticais,
$\mathcal{C}$ é o conjunto de todas as retas e mais o $\mathbb{R}^2$ e o $\emptyset$,
$\mathcal{D}$ é o conjunto de todas as retas e mais todos os pontos de $\mathbb{R}^2$,
$r_1 = \mathbb{R}^2$,
$r_2 = \emptyset$,
$r_3 = \{(2,3)\}$,
r_4 é uma reta difícil de desenhar.