Cálculo 3 - 2024.1

Aula 17: séries de Taylor e Maclaurin
(para funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C3.html

Links

StewPtCap3p73 (p.226) 3.10 Aproximações Lineares e Diferenciais
StewPtCap11p61 (p.679) 11.10 Séries de Taylor e Maclaurin
StewPtCap11p63 (p.681) polinômio de Taylor de n-ésimo grau
StewPtCap11p67 (p.685) Exemplo 7: ...em colunas

Leit3p9 (p.145) Notações para “at”: $f'(x_1)$ e $\frac{d}{dx}\Big]_{x=x1}$
Leit11p29 (p.677) 11.5. A fórmula de Taylor
Leit11p32 (p.680) Figura 6: seno ... MacLaurin de graus 1, 3, 5 e 7

Miranda117 4.7 Aproximações Lineares e Diferencial
Miranda168 5.9 Polinômio de Taylor

```
http://anggtwu.net/MAXIMA/mkmatrix1.mac.pyg.html
http://anggtwu.net/e/maxima.e.html#2024.1-taylor-1
(find-angg "MAXIMA/mkmatrix1.mac")
(find-es "maxima" "2024.1-taylor-1")
```

A idéia básica

Digamos que $f(x)$ é um polinômio.
Digamos que o grau dele é 4, pra simplificar.
Digamos que $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$.
Então:

$$\begin{array}{rcl}
f(x) & = & a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \\
f'(x) & = & b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 \\
f''(x) & = & 2c + 6dx + 12ex^2 \\
f'''(x) & = & 6d + 24ex \\
f''''(x) & = & 24e
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
f(0) & = & a \\
f'(0) & = & b \\
f''(0) & = & 2c \\
f'''(0) & = & 6d \\
f''''(0) & = & 24e
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
a & = & f(0) \\
b & = & f'(0) \\
c & = & f''(0)/2 \\
d & = & f'''(0)/6 \\
e & = & f''''(0)/24
\end{array}$$

E portanto:

$$f(x) \;=\; f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f''''(0)}{24}x^4$$

A idéia básica (2)

Agora vamos tentar generalizar isso.
Digamos que $f(x)$ é um polinômio.
Digamos que o grau dele é k, e que por enquanto $k = 4$.
Digamos que $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$.
A notação $f^{(k)}$, como o (k) entre parênteses, quer dizer
"f derivada k vezes". Por exemplo, $f^{(4)} = f''''$, e $f^{(0)} = f$.
Então:

$$\begin{array}{rclllll}
f^{(0)}(x) & = & a_0 & + \; a_1x & + \; a_2x^2 & + \; a_3x^3 & + \; a_4x^4 \\
f^{(1)}(x) & = & a_1 & + \; 2a_2x & + 3a_3x^2 & + 4a_4x^3 & \\
f^{(2)}(x) & = & 2a_2 & + \; 6a_3x & +12a_4x^2 & & \\
f^{(3)}(x) & = & 6a_3 & +24a_4x & & & \\
f^{(4)}(x) & = & 24a_4 & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
f^{(0)}(0) & = & 0!\,a_0 \\
f^{(1)}(0) & = & 1!\,a_1 \\
f^{(2)}(0) & = & 2!\,a_2 \\
f^{(3)}(0) & = & 3!\,a_3 \\
f^{(4)}(0) & = & 4!\,a_4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
a_0 & = & f^{(0)}(0)/0! \\
a_1 & = & f^{(1)}(0)/1! \\
a_2 & = & f^{(2)}(0)/2! \\
a_3 & = & f^{(3)}(0)/3! \\
a_4 & = & f^{(4)}(0)/4!
\end{array}$$

E portanto:

$$f(x) \;=\; \frac{f^{(0)}(0)}{0!}x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 \;=\; \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

Exercício 1.
A fórmula do slide anterior também funciona pra polinômios com grau menor que 4. Verifique o que ela faz quando

$$f(x) = 42x^2 + 99x + 200.$$

Lembre que no ensino médio você era obrigado a "simplificar" $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 999$ para 119880, mas em Cálculo 2 você tem que encontrar jeitos de escrever que sejam mais simples de ler e de verificar... pra gente em certos contextos $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 999$ é mais "simples" que 119880.

Exercício 2.

Tente aplicar a fórmula $(*)$ abaixo

$$f(x) \quad = \quad \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad\qquad (*)$$

a esta f aqui: $f(x) = 200x^5$.

a) O que acontece?

b) Tente escrever em detalhes o que dá errado.
Você vai precisar de notação matemática E português.
Tente aprender as convenções que eu usei nos PDFs
e as convenções que os livros usam, e lembre que se
você começar escrevendo uma igualdade qualquer leitor
que não seja muito seu amigo vai interpretá-la
como uma afirmação.

As operações derivs e derivs_0

Sejam derivs e derivs_0 as seguintes operações –
que vão nos ajudar muito nas contas:

$$\begin{array}{rcl}
\mathsf{derivs}(f) & = & (f, f', f'', f''', \ldots) \\
\mathsf{derivs}_0(f) & = & (f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), \ldots)
\end{array}$$

Repare que $\mathsf{derivs}(f)$ retorna uma sequência infinita de funções
e $\mathsf{derivs}_0(f)$ retorna uma sequência infinita de números.

Um exemplo: se $f(x) = ax^2 + bx + c$, então:

$$\begin{array}{rclcrcl}
f(x) & = & ax^2 + bx + c, & & f(0) & = & c, \\
f'(x) & = & 2ax + b, & & f'(0) & = & b, \\
f''(x) & = & 2a, & & f''(0) & = & 2a, \\
f'''(x) & = & 0, & & f'''(0) & = & 0,
\end{array}$$

e:

$$\begin{array}{rcl}
\mathsf{derivs}(f) & = & (ax^2 + bx + c,\ 2ax + b,\ 2a,\ 0, 0, 0, \ldots) \\
\mathsf{derivs}_0(f) & = & (c, b, 2a, 0, 0, 0, \ldots)
\end{array}$$

Algumas definições

Isto aqui

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

é a *série de Taylor da função f no ponto 0 truncada até grau n*, e isto aqui

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

ou:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

é a *série de Taylor da função f no ponto 0.*

Exercício 3.
Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$.

a) Calcule as 8 primeiras componentes de $\mathsf{derivs}(f)$.

b) Calcule as 8 primeiras componentes de $\mathsf{derivs}_0(f)$.

c) Calcule a série de Taylor de $\operatorname{sen} x$ truncada até grau 7.

d) Seja $g(x)$ a série de Taylor de $\operatorname{sen} x$ truncada até grau 7; Calcule $g(0.1)$ na mão e compare o seu resultado com o resultado de calcular $\operatorname{sen} 0.1$ na calculadora ou no computador.

Exercício 4.
Calcule $\mathsf{derivs}(f)$ e $\mathsf{derivs}_0(f)$ para cada uma das ‘f’s abaixo, até o grau pedido.

a) $f(x) = e^x$, até grau 4
b) $f(x) = e^{2x}$, até grau 4
c) $f(x) = e^{ix}$, até grau 8
d) $f(x) = \cos x$, até grau 8
e) $f(x) = \operatorname{sen} x$, até grau 8
f) $f(x) = i \operatorname{sen} x$, até grau 8
g) $f(x) = \cos x + i \operatorname{sen} x$, até grau 8

A notação com '≈'

O sinal '≈' que dizer "é aproximadamente igual a",
mas ele não diz quão boa é a aproximação...
Estas duas afirmações são ambas verdadeiras:

$$\begin{array}{rcl} f(0.42) & \approx & f(0) + f'(0) \cdot 0.42 + \frac{f''(0)}{2}(0.42)^2 \\ f(0.42) & \approx & f(0) + f'(0) \cdot 0.42 + \frac{f''(0)}{2}(0.42)^2 + \frac{f'''(0)}{6}(0.42)^3 \end{array}$$

Até dé pra formalizar essa igualdade aqui embaixo
usando um limite - veja a página 4 deste PDF:
https://people.math.sc.edu/girardi/m142/handouts/10sTaylorPolySeries.pdf

$$f(x) \quad = \quad f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

Mas eu não sei como formalizar precisamente
a versão com 0.42 no lugar do x... =(

As versões truncadas de derivs, derivs_0 e derivs_p

Vamos definir derivs^n e derivs_0^n como as versões "truncadas até grau n" de derivs e derivs_0...

$\mathsf{derivs}^n(f)$ vai ser a lista com as primeiras $n+1$ entradas de $\mathsf{derivs}^n(f)$, e $\mathsf{derivs}_0^n(f)$ vai ser a lista com as primeiras $n+1$ entradas de $\mathsf{derivs}_0^n(f)$.

Além disso $\mathsf{derivs}_p(f)$ vai ser a lista infinita $(f(p), f'(p), f''(p), \ldots)$, e $\mathsf{derivs}_p^n(f)$ vai ser a lista com as primeiras $n+1$ entradas de $\mathsf{derivs}_p^n(f)$.

Exemplo:

$$\mathsf{derivs}_{42}^2(f) \quad = \quad (f(42), f'(42), f''(42)).$$

Vamos nos referir a $\mathsf{derivs}_p^n(f)$ como "as derivadas de f até grau n no ponto p". Repare que $f(42)$ é a "derivada de f de grau 0 no ponto 42", $f'(42)$ é a "derivada de f de grau 1 no ponto 42", etc...

Antes o termo "grau" não servia pra falar de número de vezes que uma função foi derivada, mas agora passou a servir. $=)$

Notação de físicos: introdução

Links:

https://people.math.sc.edu/girardi/m142/handouts/10sTaylorPolySeries.pdf
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-5.pdf (páginas 171–173)
https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf "Calculus Made Easy" (1914)
http://angg.twu.net/mathologer-calculus-easy.html
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C3-notacao-de-fisicos.pdf (p.5: linearizações)
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-notacao-de-fisicos.pdf
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=117

Na aula de 2022sep23 a gente usou os links acima
e eu escrevi um montão de coisas no quadro –
que eu vou digitar assim que der!!!

Exercício 5.

Leia a seção 4.7 do livro do Daniel Miranda:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=117

Os livros mais modernos:
i) distinguem dx e Δx,
ii) escrevem $y = f(x)$ ao invés de $y = y(x)$,
iii) evitam a convenção $x_1 = x_0 + \Delta x$.

a) Traduza o início da seção 4.7 do Miranda - até o fim da página 118 - pra notação do Thompson. Dicas:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \approx & f(p) + f'(p)(x-p) \\ L(x) & = & f(p) + f'(p)(x-p) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} f(x_1) & \approx & f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \\ L(x_1) & = & f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \end{array}$$

e a função L é exatamente a série de Taylor da função f truncada até grau 1... lembre que nós quase só vimos séries de Taylor no caso em que x_0 era 0, mas ficamos de ver depois o caso em que o "ponto base" não precisava mais ser 0...

Alguns truques de tradução

Truque 1: quando a gente escreve fórmulas "com o mesmo formato" perto uma da outra o leitor tende a ler a segunda ou como uma tradução da primeira pra outra notação ou como um caso particular da primeira...

Isto aqui é uma tradução de duas das fórmulas da p.117 do D. Miranda pra "notação de físicos":

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \approx & f(p) + f'(p)(x-p) \\ L(x) & = & f(p) + f'(p)(x-p) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} f(x_1) & \approx & f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \\ L(x_1) & = & f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \end{array}$$

E isto aqui é um caso particular da primeira fórmula:

$$f(4.02) \approx f(4) + f'(4)(4.02-4) \qquad (*)$$

Repare que a fórmula $(*)$ fica mais clara se escrevermos isto explicitamente:

$$x_1 = 4.02 \qquad x_0 = 4$$

...e repare que se a gente tentar escrever isto aqui direto

$$\sqrt{4.02} \approx \sqrt{4} + \sqrt{4}'(4.02-4)$$

fica confuso e péssimo — não existe uma notação padrão pra derivada de $\sqrt{x}$ em $x = 4$!!! Aqui a gente TEM que usar um truque novo — a gente tem que dar um nome pra função $\sqrt{x}$. Por exemplo...

Alguns truques de tradução (2)

Seja $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$.
Então $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, e

$$\begin{array}{rrcl} & f(4.02) & \approx & f(4) + f'(4)(4.02-4) \\ \Rightarrow & \sqrt{4.02} & \approx & \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4.02-4) \end{array}$$

Repare que acima eu só fiz as subtituições $f(x) := \sqrt{x}$ e $f'(x) := \frac{1}{2\sqrt{x}}$ — eu acho que as contas mais mais fáceis de entender se a gente fizer as substituições e as simplificações em passos separados:

$$\begin{array}{rrcl} & f(4.02) & \approx & f(4) + f'(4)(4.02-4) \\ \Rightarrow & \sqrt{4.02} & \approx & \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4.02-4) \\ & & = & 2 + \frac{1}{4}(0.02) \\ & & = & 2 + 0.005 \\ & & = & 2.005 \\ & \sqrt{4.02} & = & 2.004993765576342... \end{array}$$

A última linha acima tem um '=' ao invés de um '≈', e eu calculei o resultado dela com a calculadora.

A tradução pra notação de físicos

Temos:

$$f(x) \;\approx\; f(0) + f'(0)x + \tfrac{f''(0)}{2}x^2$$

Acho que vocês devem conseguir acreditar nisso aqui...
(a gente pode checar os detalhes depois!)

$$\begin{array}{rcl} g(x_0+\Delta x) & \approx & g(x_0) + g'(x_0)\Delta x + \tfrac{g''(x_0)}{2}(\Delta x)^2 \\ h(x+\Delta x) & \approx & h(x) + h'(x)\Delta x + \tfrac{h''(x)}{2}(\Delta x)^2 \end{array}$$

E se $y = y(x)$ então:

$$\begin{array}{rcl} y(x+\Delta x) & \approx & y + y_x\Delta x + \tfrac{y_{xx}}{2}(\Delta x)^2 \\ y(x+\Delta x) & \approx & y + y_x\Delta x + \tfrac{y_{xx}}{2}(\Delta x)^2 + \tfrac{y_{xxx}}{6}(\Delta x)^3 \end{array}$$

Exercício 5.

Digamos que $x_0 = 10$, $f(x) = x^3$, $y_0 = f(x_0)$, $g(y) = \operatorname{sen} y$.

a) Calcule $\mathsf{derivs}^1_{x_0}(f(x))$.

b) Calcule $\mathsf{derivs}^1_{y_0}(g(y))$.

c) Calcule $\mathsf{derivs}^1_{x_0}(g(f(x)))$.

Seja $h(x) = g(f(x))$ — ou seja, $h = g \circ f$.

d) Calcule $\mathsf{derivs}^2_{x_0}(h(x))$.

Exercício 6.
Este exercício é uma versão mais geral do exercício 4.
Digamos que f e g são funções suaves de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.
(Uma função é "suave" quando ela pode ser derivada infinitas vezes. A função $|x|$ não é suave).
Digamos que $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = f(x_0)$, e $h = g \circ f$.

a) Calcule $\mathsf{derivs}^2_{x_0}(h(x))$.

Repare que neste caso "calcule" quer dizer algo como "expanda e simplifique a expressão que você obtiver"...
Existem vários tipos de expansão e simplificação, e os programas de computação simbólica dão um nome pra cada tipo e permitem que você escolha quais vão ser aplicadas.

Exercício 7

Agora sejam $y = y(x) = f(x)$ e $z = z(y) = g(y)$.

b) Traduza o seu $\mathsf{derivs}^2_{x_0}(h(x))$ do item (a)
pra notação de físicos.

Dica (pequena): $\frac{d}{dx}g(f(x_0)) = z_y y_x$.

c) Calcule $\mathsf{derivs}^{3}_{x_0}(z)$ usando notação de físicos.

```
(%i1) load       ("~/MAXIMA/mkmatrix1.mac")$
(%i2) derivs    (maxn, f) := mklist    ([n,0,maxn],    diff(f, x, n))$
(%i3) derivs_h  (maxn, f) := mkhmatrix([n,0,maxn],    diff(f, x, n))$
(%i4) derivs_v  (maxn, f) := mkvmatrix([n,0,maxn],    diff(f, x, n))$
(%i5) derivs0   (maxn, f) := mklist    ([n,0,maxn], at(diff(f, x, n), x=0))$
(%i6) derivs0_h (maxn, f) := mkhmatrix([n,0,maxn], at(diff(f, x, n), x=0))$
(%i7) derivs0_v (maxn, f) := mkvmatrix([n,0,maxn], at(diff(f, x, n), x=0))$
(%i8) derivsx0  (maxn, f) := mklist    ([n,0,maxn], at(diff(f, x, n), x=x0))$
(%i9) derivsx0_h(maxn, f) := mkhmatrix([n,0,maxn], at(diff(f, x, n), x=x0))$
(%i10) derivsx0_v(maxn, f) := mkvmatrix([n,0,maxn], at(diff(f, x, n), x=x0))$

(%i11) derx           (k, f) :=    diff(f, x, k)$
(%i12) derxat0        (k, f) := at(diff(f, x, k), x=0)$
(%i13) derxatx0       (k, f) := at(diff(f, x, k), x=x0)$
(%i14) derxat0div     (k, f) := at(diff(f, x, k), x=0)  / k!$
(%i15) derxatx0div    (k, f) := at(diff(f, x, k), x=x0) / k!$
(%i16) derxat0divmul  (k, f) := at(diff(f, x, k), x=0)  / k! * x^k$
(%i17) derxatx0divmul (k, f) := at(diff(f, x, k), x=x0) / k! * (x-x0)^k$
(%i18) at0reconstruct (n, f) := sum(derxat0divmul (k, f), k,0,n)$
(%i19) atx0reconstruct(n, f) := sum(derxatx0divmul(k, f), k,0,n)$

(%i20)
       derivs   (5, f(x));
```

(%o20)

$$\left[f\left(x\right),\frac{d}{d\,x}\,f\left(x\right),\frac{d^2}{d\,x^2}\,f\left(x\right),\frac{d^3}{d\,x^3}\,f\left(x\right),\frac{d^4}{d\,x^4}\,f\left(x\right),\frac{d^5}{d\,x^5}\,f\left(x\right)\right]$$

```
(%i21) derivs_h (5, f(x));
```

(%o21)

$$\begin{pmatrix}f\left(x\right) & \frac{d}{d\,x}\,f\left(x\right) & \frac{d^2}{d\,x^2}\,f\left(x\right) & \frac{d^3}{d\,x^3}\,f\left(x\right) & \frac{d^4}{d\,x^4}\,f\left(x\right) & \frac{d^5}{d\,x^5}\,f\left(x\right)\end{pmatrix}$$

```
(%i22) derivs_h (5, sin(x));
```

(%o22)

$$\begin{pmatrix}\sin x & \cos x & -\sin x & -\cos x & \sin x & \cos x\end{pmatrix}$$

```
(%i23) derivs0_h(5, sin(x));
```

(%o23)

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

```
(%i24)
       derivs_v (5, f(x));
```

(%o24)

$$\begin{pmatrix}f\left(x\right)\\ \frac{d}{d\,x}\,f\left(x\right)\\ \frac{d^2}{d\,x^2}\,f\left(x\right)\\ \frac{d^3}{d\,x^3}\,f\left(x\right)\\ \frac{d^4}{d\,x^4}\,f\left(x\right)\\ \frac{d^5}{d\,x^5}\,f\left(x\right)\end{pmatrix}$$

```
(%i25) p(x) := a + b*x + c*x^2 + d*x^3 + e*x^4;
```

(%o25)

$$p\left(x\right):=a+b\,x+c\,x^2+d\,x^3+e\,x^4$$

```
(%i26) derx          (3, p(x));
```

(%o26)

$$24\,e\,x+6\,d$$

```
(%i27) derxat0       (3, p(x));
```

(%o27)

$$6\,d$$

```
(%i28) derxat0div    (3, p(x));
```

(%o28)

$$d$$

```
(%i29) derxat0divmul (3, p(x));
```

(%o29)

$$d\,x^3$$

```
(%i30) derxat0divmul (4, p(x));
```

(%o30)

$$e\,x^4$$

```
(%i31)        at0reconstruct(4, p(x));
```

(%o31)

$$e\,x^4+d\,x^3+c\,x^2+b\,x+a$$

```
(%i32)        at0reconstruct(3, p(x));
```

(%o32)

$$d\,x^3+c\,x^2+b\,x+a$$

```
(%i33) p(x) - at0reconstruct(3, p(x));
```

(%o33)

$$e\,x^4$$

```
(%i34)
       at0reconstruct(7, sin(x));
```

(%o34)

$$-\left(\frac{x^7}{5040}\right)+\frac{x^5}{120}-\frac{x^3}{6}+x$$

```
(%i35) q(x) := a + b*(x-x0) + c*(x-x0)^2 + d*(x-x0)^3 + e*(x-x0)^4;
```

(%o35)

$$q(x) := a + b\,(x - \mathrm{x0}) + c\,(x - \mathrm{x0})^2 + d\,(x - \mathrm{x0})^3 + e\,(x - \mathrm{x0})^4$$

```
(%i36) derivs_v  (5, q(x));
```

(%o36)

$$\begin{pmatrix} b\,(x - \mathrm{x0}) + e\,(x - \mathrm{x0})^4 + d\,(x - \mathrm{x0})^3 + c\,(x - \mathrm{x0})^2 + a \\ 2\,c\,(x - \mathrm{x0}) + 4\,e\,(x - \mathrm{x0})^3 + 3\,d\,(x - \mathrm{x0})^2 + b \\ 6\,d\,(x - \mathrm{x0}) + 12\,e\,(x - \mathrm{x0})^2 + 2\,c \\ 24\,e\,(x - \mathrm{x0}) + 6\,d \\ 24\,e \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i37) derivsx0_v(5, q(x));
```

(%o37)

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 2\,c \\ 6\,d \\ 24\,e \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i38)        atx0reconstruct(4, q(x));
```

(%o38)

$$b\,(x - \mathrm{x0}) + e\,(x - \mathrm{x0})^4 + d\,(x - \mathrm{x0})^3 + c\,(x - \mathrm{x0})^2 + a$$

```
(%i39)        atx0reconstruct(3, q(x));
```

(%o39)

$$b\,(x - \mathrm{x0}) + d\,(x - \mathrm{x0})^3 + c\,(x - \mathrm{x0})^2 + a$$

```
(%i40) q(x) - atx0reconstruct(3, q(x));
```

(%o40)

$$e\,(x - \mathrm{x0})^4$$

```
(%i1) load("~/MAXIMA/mkmatrix1.mac")$
(%i2) mkhmatrix([x,2,5],    x);
```
(%o2)
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
(%i3) mkvmatrix([y,2,5],    y);
```
(%o3)
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

```
(%i4) mkvmatrix([y,5,2,-1], y);
```
(%o4)
$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

```
(%i5) mkmatrix ([x,0,2], [y,5,4,-1], [x,y]);
```
(%o5)
$$\begin{pmatrix} [0,5] & [1,5] & [2,5] \\ [0,4] & [1,4] & [2,4] \end{pmatrix}$$

```
(%i6) diffxnyn(f, xn, yn) := diff(diff(f, x, xn), y, yn)$
(%i7) mkmatrix([xn,0,4], [yn,3,0,-1], [xn,yn]);
```
(%o7)
$$\begin{pmatrix} [0,3] & [1,3] & [2,3] & [3,3] & [4,3] \\ [0,2] & [1,2] & [2,2] & [3,2] & [4,2] \\ [0,1] & [1,1] & [2,1] & [3,1] & [4,1] \\ [0,0] & [1,0] & [2,0] & [3,0] & [4,0] \end{pmatrix}$$

```
(%i8) mkmatrix([xn,0,2], [yn,2,0,-1],    diffxnyn(F(x,y),  xn, yn));
```
(%o8)
$$\begin{pmatrix} \frac{d^2}{dy^2} F(x,y) & \frac{d^3}{dx\,dy^2} F(x,y) & \frac{d^4}{dx^2\,dy^2} F(x,y) \\ \frac{d}{dy} F(x,y) & \frac{d^2}{dx\,dy} F(x,y) & \frac{d^3}{dx^2\,dy} F(x,y) \\ F(x,y) & \frac{d}{dx} F(x,y) & \frac{d^2}{dx^2} F(x,y) \end{pmatrix}$$

```
(%i9) mkmatrix([xn,0,3], [yn,3,0,-1],    diffxnyn(x^2*y^2, xn, yn));
```
(%o9)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2x^2 & 4x & 4 & 0 \\ 2x^2 y & 4xy & 4y & 0 \\ x^2 y^2 & 2xy^2 & 2y^2 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i10) mkmatrix([xn,0,3], [yn,3,0,-1], at(diffxnyn(x^2*y^2, xn, yn), [x=0,y=0]));
```
(%o10)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i11) mkmatrix([xn,0,3], [yn,3,0,-1],    diffxnyn((x-x0)^2*(y-y0)^2, xn, yn));
```
(%o11)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\,(x-\mathrm{x0})^2 & 4\,(x-\mathrm{x0}) & 4 & 0 \\ 2\,(x-\mathrm{x0})^2\,(y-\mathrm{y0}) & 4\,(x-\mathrm{x0})\,(y-\mathrm{y0}) & 4\,(y-\mathrm{y0}) & 0 \\ (x-\mathrm{x0})^2\,(y-\mathrm{y0})^2 & 2\,(x-\mathrm{x0})\,(y-\mathrm{y0})^2 & 2\,(y-\mathrm{y0})^2 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i12) mkmatrix([xn,0,3], [yn,3,0,-1], at(diffxnyn((x-x0)^2*(y-y0)^2, xn, yn), [x=x0,y=y0]));
```
(%o12)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i13)
      aroundx0y0(expr) ::= mkmatrix0([x,2,4], [y,3,1,-1], expr);
```
(%o13)
$$\mathrm{aroundx0y0}\,(\mathrm{expr}) ::= \mathrm{mkmatrix0}\,([x,2,4],[y,3,1,-1],\mathrm{expr})$$

```
(%i14) aroundx0y0([x,y]);
```
(%o14)
$$\begin{pmatrix} [2,3] & [3,3] & [4,3] \\ [2,2] & [3,2] & [4,2] \\ [2,1] & [3,1] & [4,1] \end{pmatrix}$$

```
(%i15)
       [x0,y0] : [3, 2];
```
(%o15)
$$[3,2]$$

```
(%i16) [Dx,Dy] : [x-x0, y-y0];
```
(%o16)
$$[x-3, y-2]$$

```
(%i17) aroundx0y0(ev(Dx));
```
(%o17)
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i18)
       mkmatrix([x,0,4], [y,3,0,-1], [x,y]);
```
(%o18)
$$\begin{pmatrix} [0,3] & [1,3] & [2,3] & [3,3] & [4,3] \\ [0,2] & [1,2] & [2,2] & [3,2] & [4,2] \\ [0,1] & [1,1] & [2,1] & [3,1] & [4,1] \\ [0,0] & [1,0] & [2,0] & [3,0] & [4,0] \end{pmatrix}$$

```
(%i19) mkmatrix([x,2,4], [y,3,1,-1], [x,y]);
```
(%o19)
$$\begin{pmatrix} [2,3] & [3,3] & [4,3] \\ [2,2] & [3,2] & [4,2] \\ [2,1] & [3,1] & [4,1] \end{pmatrix}$$

```
(%i20) aroundx0y0(ev([x,y]));
```
(%o20)
$$\begin{pmatrix} [2,3] & [3,3] & [4,3] \\ [2,2] & [3,2] & [4,2] \\ [2,1] & [3,1] & [4,1] \end{pmatrix}$$

```
(%i21) aroundx0y0(ev(Dx^2));
(%o21)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i22) aroundx0y0(ev(Dy^2));
(%o22)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i23) aroundx0y0(ev(Dx^2+Dy^2));
(%o23)
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
(%i24) aroundx0y0(ev(Dx^2-Dy^2));
(%o24)
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i25) aroundx0y0(ev(Dx*Dy));
(%o25)
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```
(%i26) aroundx0y0(ev(2+Dx^2));
(%o26)
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

```
(%i27) aroundx0y0(ev(2+Dy^2));
(%o27)
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

```
(%i28) aroundx0y0(ev(2+Dx^2+Dy^2));
(%o28)
```

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

```
(%i29) aroundx0y0(ev(2+Dx^2-Dy^2));
(%o29)
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
(%i30) aroundx0y0(ev(2+Dx*Dy));
(%o30)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$