Cálculo 3 - 2024.1

Todos os PDFs do semestre
juntados num PDFzão só

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C3.html

Cálculo 3 - 2024.1

Aulas 1 e 2: introdução ao curso

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C3.html

Links

3iQ1 Quadros da aula de 18/mar/2024
3iQ3 Quadros da aula de 20/mar/2024

"Links pra hoje" de 20/mar/2024:
3hT10 Uma trajetória em três partes
3hT11 Uma trajetória em três partes (2)
3iQ1 Quadros da aula de 18/mar/2024
2iQ7 Quadros da aula de C2 de 20/mar/2024
3hT8 Pontos mais fáceis de calcular
3fT1 Introdução a trajetórias

"Links pra hoje" de 18/mar/2024:
Mpg8 Set comprehensions
2hT4 "Releia a Dica 7"
3dT6 Vetores em Álgebra Linear e em GA
3dT7 Vetores como setas
3hT6 Seja seu próprio GeoGebra: links
3hT8 Pontos mais fáceis de calcular
3fT1 Introdução a trajetórias
2hT129 Um jogo colaborativo

Pontos mais fáceis de calcular

Muito importante:

Se você for uma pessoa pra quem
$12345 + 9675$ é tão fácil de calcular de cabeça quanto $12000 + 345$,
e $4 + 5x = 6$ é tão fácil de resolver de cabeça quanto $1 + x = 2$,

...então tente pensar como uma pessoa pra quem
$12345 + 9675$ é muito mais difícil de calcular que $12000 + 345$,
e $4 + 5x = 6$ é muito mais difícil de resolver quanto $1 + x = 2$...

...e além disso considere que somas são mais fáceis de calcular de cabeça do que subtrações – e que, por exemplo, dá pra calcular $34+45$ de cabeça mas dá um trabalhão, e que calcular $34 - 45$ de cabeça é quase impossível.

Sejam:

$$\begin{array}{rcl}
f_1(t) &=& 34 + t \cdot 45 \\
f_2(t) &=& 34 + (t - 56) \cdot 45 \\
f_3(t) &=& 34 + (t + 56) \cdot 45 \\
f_4(t) &=& 34 + ((t - 56)/4) \cdot 45 \\
f_5(t) &=& 34 + ((t + 56)/4) \cdot 45 \\
P_1(t) &=& (12, 23) + t\overrightarrow{(4, 5)} \\
P_2(t) &=& (12, 23) + (t - 8)\overrightarrow{(4, 5)} \\
P_3(t) &=& (12, 23) + (t + 8)\overrightarrow{(4, 5)} \\
P_4(t) &=& (12, 23) + ((t - 8)/34)\overrightarrow{(4, 5)} \\
P_5(t) &=& (12, 23) + ((t + 8)/34)\overrightarrow{(4, 5)}
\end{array}$$

Os pontos mais fáceis de calcular do $f_4(t)$ são estes aqui.
O caso mais fácil de todos é este,

$$34 + \underbrace{((t - 56)/4)}_{0} \cdot 45$$

em que temos:

$$f(56) = \underbrace{34 + \underbrace{\underbrace{((\underbrace{\underbrace{t}_{56} - 56}_{0})/4)}_{0} \cdot 45}_{0}}_{34}$$

E o segundo caso mais fácil é este,

$$34 + \underbrace{((t - 56)/4)}_{1} \cdot 45$$

em que temos:

$$f(56+4) = \underbrace{34 + \underbrace{\underbrace{((\underbrace{\underbrace{t}_{60} - 56}_{4})/4)}_{1} \cdot 45}_{45}}_{34+45}$$

Pontos mais fáceis de calcular (2)

Sejam:

$$
\begin{array}{rcl}
f_1(t) &=& 34 + t \cdot 45 \\
f_2(t) &=& 34 + (t-56) \cdot 45 \\
f_3(t) &=& 34 + (t+56) \cdot 45 \\
f_4(t) &=& 34 + ((t-56)/4) \cdot 45 \\
f_5(t) &=& 34 + ((t+56)/4) \cdot 45 \\
P_1(t) &=& (12,23) + t\overrightarrow{(4,5)} \\
P_2(t) &=& (12,23) + (t-8)\overrightarrow{(4,5)} \\
P_3(t) &=& (12,23) + (t+8)\overrightarrow{(4,5)} \\
P_4(t) &=& (12,23) + ((t-8)/34)\overrightarrow{(4,5)} \\
P_5(t) &=& (12,23) + ((t+8)/34)\overrightarrow{(4,5)}
\end{array}
$$

Exercício
Complete a tabela à direita com os dois pontos mais fáceis de calcular de cada uma das 10 funções acima. *Faça todas as contas de cabeça e escreva só os resultados finais!* O segundo ponto mais fácil de calcular sempre pode ser escrito nestes dois formatos, $f_4(56+4) = 34+45$ e $f_4(60) = 79$ – e você pode escolher qual dos formatos usar.

$$
\begin{array}{rcl}
f_1(\_\_\_\_\_\_) &=& \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
f_1(\_\_\_\_\_\_) &=& \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
f_2(\_\_\_\_\_\_) &=& \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
f_2(\_\_\_\_\_\_) &=& \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
f_3(\_\_\_\_\_\_) &=& \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
f_3(\_\_\_\_\_\_) &=& \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
f_4(\_\_\_\_\_\_) &=& \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
f_4(\_\_\_\_\_\_) &=& \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
f_5(\_\_\_\_\_\_) &=& \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
f_5(\_\_\_\_\_\_) &=& \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
P_1(\_\_\_\_\_\_) &=& \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
P_1(\_\_\_\_\_\_) &=& \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
P_2(\_\_\_\_\_\_) &=& \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
P_2(\_\_\_\_\_\_) &=& \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
P_3(\_\_\_\_\_\_) &=& \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
P_3(\_\_\_\_\_\_) &=& \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
P_4(\_\_\_\_\_\_) &=& \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
P_4(\_\_\_\_\_\_) &=& \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
P_5(\_\_\_\_\_\_) &=& \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
P_5(\_\_\_\_\_\_) &=& \_\_\_\_\_\_\_\_
\end{array}
$$

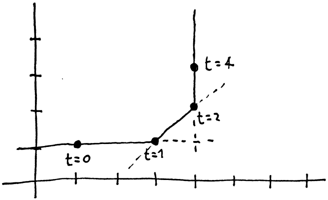
Uma trajetória em três partes

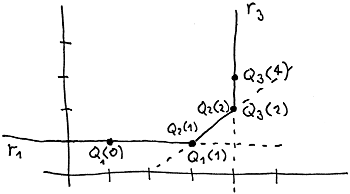
Agora você vai tentar encontrar uma descrição "formal", "algébrica", da trajetória $P(t)$ que eu desenhei à direita. Uma descrição informal dela seria assim: um corpo (pra usar terminologia de físicos...) se move em movimento retilíneo uniforme na horizonal pra direita desde $t = -\infty$ até $t = 1$, depois ele muda pra um outro movimento retilíneo uniforme e anda em diagonal na direção nordeste até $t = 2$, e a partir de $t = 3$ ele muda pra um outro movimento retilíneo uniforme, dessa vez na vertical. Temos $P(0) = (1,1)$, $P(1) = (3,1)$, $P(2) = (4,2)$, e $P(3) = (4,3)$ – dá pra ver isso pelo gráfico – e a gente pode começar definindo três trajetórias mais simples, $Q_1(t)$, $Q_2(t)$, e $Q_3(t)$, que são movimentos retilíneos uniformes, e depois montar a definição da trajetória $P(t)$ a partir delas.

Note que:

$$\begin{array}{l}
(1,1) = P(0) = Q_1(0) \\
(3,1) = P(1) = Q_1(1) = Q_2(1) \\
(4,2) = P(2) = Q_2(2) = Q_3(2) \\
(4,3) = P(4) = Q_3(4)
\end{array}$$

$P(t) \;=$





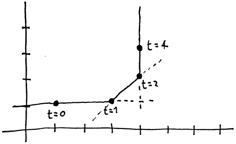
Uma trajetória em três partes (2)

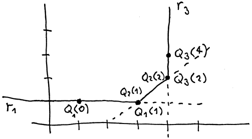
Agora complete todas as lacunas abaixo:

$$\begin{array}{rcl}
Q_1(t) & = & (\underline{\quad},\underline{\quad}) + t\overrightarrow{(\underline{\quad},\underline{\quad})} \\
Q_2(t) & = & (\underline{\quad},\underline{\quad}) + (t-\underline{\quad})\overrightarrow{(\underline{\quad},\underline{\quad})} \\
Q_3(t) & = & (\underline{\quad},\underline{\quad}) + ((t-\underline{\quad})/\underline{\quad})\overrightarrow{(\underline{\quad},\underline{\quad})} \\
r_1 & = & \{\, Q_1(t) \mid t \in \mathbb{R} \,\} \\
r_2 & = & \{\, Q_2(t) \mid t \in \mathbb{R} \,\} \\
r_3 & = & \{\, Q_3(t) \mid t \in \mathbb{R} \,\}
\end{array}$$

$$P(t) = \begin{cases}
(\underline{\quad},\underline{\quad}) + t\overrightarrow{(\underline{\quad},\underline{\quad})} & \text{quando } t \le 1, \\
(\underline{\quad},\underline{\quad}) + (t-\underline{\quad})\overrightarrow{(\underline{\quad},\underline{\quad})} & \text{quando } 1 \le t \le 2, \\
(\underline{\quad},\underline{\quad}) + ((t-\underline{\quad})/\underline{\quad})\overrightarrow{(\underline{\quad},\underline{\quad})} & \text{quando } 2 \le t,
\end{cases}$$

$P(t) \;=$





Importante: faça todas as contas de cabeça e calcule só os “pontos mais fáceis de calcular” que eu expliquei alguns slides atrás. Você pode fazer quantos chutes-e-testes você precisar, desde que você marque eles com “se” e “então”. *Não apague nenhum dos seus chutes-e-testes!*

Dê uma olhada em como as pessoas fizeram isso no quadro na aula 2:
3hQ5 Quadros de 01/set/2023

Parâmetros e casos degenerados

Sejam:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} & := & \{\,\{\,(1,1),(2,1)\,\},\{\,(2,1),(2,2)\,\}\,\} \\ \mathcal{B} & := & \{\,a,b\in\mathbb{R}\;;\;\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=ax+b\,\}\,\} \\ \mathcal{C} & := & \{\,a,b,c\in\mathbb{R}\;;\;\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by=c\,\}\,\} \\ \mathcal{D} & := & \{\,a,b,c,d\in\mathbb{R}\;;\;\{\,t\in\mathbb{R}\;;\;(a,b)+t\overrightarrow{(c,d)}\,\}\,\} \\ r_1 & := & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0x+0y=0\,\} \\ r_2 & := & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0x+0y=2\,\} \\ r_3 & := & \{\,t\in\mathbb{R}\;;\;(2,3)+t\overrightarrow{(0,0)}\,\} \\ r_4 & := & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=12x+23\,\} \end{array}$$

Children:
IDARCTp2
ZHAsP3
MissingP6

Então:
$\mathcal{A}$ é [desenho],
$\mathcal{B}$ é o conjunto de todas as retas não-verticais,
$\mathcal{C}$ é o conjunto de todas as retas e mais o $\mathbb{R}^2$ e o $\emptyset$,
$\mathcal{D}$ é o conjunto de todas as retas e mais todos os pontos de $\mathbb{R}^2$,
$r_1 = \mathbb{R}^2$,
$r_2 = \emptyset$,
$r_3 = \{(2,3)\}$,
r_4 é uma reta difícil de desenhar.

Cálculo 3 - 2024.1

Aulas 3 a 7: mais trajetórias

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C3.html

Links

Felipe Acker:
AckerGA1p53 9. Equações paramétricas

AckerGA1, AckerGA2, AckerGA3, AckerGA4
`http://anggtwu.net/acker/README.html`

Bortolossi:
Bort6 6. curvas parametrizadas

Stewart:
StewPtCap10p5 10. Equações paramétricas e coordenadas polares
StewPtCap10p9 (p.579) Figuras 10, 11 e 12

Leithold:
Leit10 10. Seções cônicas e coordenadas polares
Leit10p43 (p.618) Limaçon

Introdução antiga (2021.2)

Desta vez um dos objetivos principais do curso vai ser a gente aprender a visualizar muitas coisas em 3D ou de cabeça ou fazendo umas pouquinhas contas e desenhos no papel. Pra isso a gente vai treinar fazer "desenhos tortos que todo mundo entenda" – porque fazer desenhos à mão livre medindo tudo no olhômetro costuma ser bem mais rápido do que fazer desenhos com régua – e em TODOS os exercícios que eu vou passar durante o curso as contas são simples o suficiente pra poderem ser feitas meio de cabeça e meio no papel.

Em Cálculo 2 você muitas vezes teve que desenhar figuras feitas de 4, 8, ou 16 retângulos, e aí você levava 5 minutos pra entender como desenhar o primeiro retângulo, depois só um minuto pra desenhar o segundo, e aos poucos você entendia o padrão, e no final você desenhava cada retângulo em menos de 5 segundos – e aí você conseguia *visualizar* como seria a figura correspondente com 256, 512 ou 1024 retângulos, e você passava a conseguir visualizar certos somatórios a partir das fórmulas deles, sem precisar desenhar as figuras correspondentes a eles.

Nos exercícios deste PDF você vai desenhar parábolas a partir de 5 pontos delas, e você vai tentar "adivinhar" o resto da parábola a partir destes poucos pontos. O modo matematicamente correto de fazer isto seria como o Bortolossi faz em alguns exercícios; dê uma olhada nas páginas 113 e 114 dele. O exercício [24] da página 113 dá seis fórmulas e seis gráficos – os gráficos estão na página seguinte – e ele pede pra você descobrir qual fórmula corresponde a qual gráfico...

Bort3p35 (p.113) Exercício [24]
Bort3p37 (p.114) Figuras pro exercício 24

Neste curso eu vou passar um monte de exercícios com enunciados como "tente adivinhar o gráfico da equação tal". Eu vou usar a expressão "tente adivinhar" pra enfatizar que o que a gente vai fazer não é totalmente formal: a partir de 5 pontos a gente consegue fazer uma "hipótese razoável" de como é o formato de uma parábola, a partir de 20 pontos dessa parábola a gente conseguiria fazer uma hipótese melhor de como ela é, e calculando um milhão de pontos dela a gente conseguiria fazer um desenho bem mais preciso dela... só que a gente quer aprender a fazer desenhos bons o suficiente a partir de contas que a gente possa fazer na mão!...

Introdução ao curso

Cálculo 3 é principalmente sobre:

1. funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$ – que o Bortolossi costuma chamar de curvas parametrizadas, mas nós vamos chamar de trajetórias, e

2. funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, que vão gerar superfícies.

Depois que nós aprendermos o suficiente sobre (1) e (2) nós vamos poder lidar com coisas um pouco mais gerais, como funções $F : A \to \mathbb{R}^n$, onde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto.

Nossos primeiros objetivos vão ser:

1. Aprender a representar graficamente algumas trajetórias, usando a idéia de traço do Bortolossi (cap.6, p.188), mas escrevendo algumas informações a mais, como "$t = 0$" e "$t = 1$" em alguns pontos,

2. Calcular e representar graficamente vetores tangentes a trajetórias ("vetores velocidade"),

3. Entender vetores secantes (cap.6, p.199),

4. Entender aproximações de primeira ordem pra trajetórias, que dão retas parametrizadas, e depois aproximações de segunda ordem, que vão dar parábolas parametrizadas.

...mas hoje nós vamos fazer uma revisão de algumas idéias de GA.

Você já deve ter visto estas duas convenções diferentes para representar pontos e vetores... am Álgebra Linear tanto pontos quanto vetores em $\mathbb{R}^2$ são representados como matrizes-coluna de altura 2:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 53 \end{pmatrix}$$

e em Geometria Analítica pontos e vetores são escritos de forma diferente – vetores têm uma seta em cima – e representados graficamente de formas diferentes...

$$(2,3) + \overrightarrow{(40,50)} = (42,53)$$

Vetores como setas

Um ponto (a, b) é interpretado graficamente como um ponto (a, b) de $\mathbb{R}^2$, e um vetor $\overrightarrow{(c, d)}$ é interpretado como um deslocamento, e desenhado como uma seta.

Se o vetor $\overrightarrow{(c, d)}$ aparece sozinho a representação gráfica dele é qualquer seta que anda c unidades pra direita e d unidades pra cima. Às vezes a gente pensa que $\overrightarrow{(c, d)}$ é o conjunto de *todas* as setas assim – o conjunto de todas as setas "equipolentes" a esta; veja a p.9 do livro do CEDERJ.

Link:

DFES1p10 CEDERJ, Geometria Analítica 1 (p.9)

Uma convenção (temporária)

O resultado da expressão $(a,b) + \overrightarrow{(c,d)}$ é o ponto $(a+c, b+d)$, mas a representação gráfica dele vai ser:

1) o ponto (a,b),

2) uma seta indo de (a,b) para $(a+c, b+d)$,

3) o ponto $(a+c, b+d)$,

4) anotações dos lados dos pontos (a,b) e $(a+c, b+d)$ dizendo os "nomes" destes pontos e uma anotação do lado da seta $\overrightarrow{(c,d)}$ dizendo o seu "nome" — como nos dois exemplos abaixo (oops! Falta fazer os desenhos!):

(pôr o desenho aqui)

Nesta aula vai ser obrigatório pôr todos os nomes, mas nas outras não.

A representação gráfica de

$$((1,1)+\overrightarrow{(2,0)})+\overrightarrow{(1,2)} = (1,1)+(\overrightarrow{(2,0)}+\overrightarrow{(1,2)})$$

Vai ser um triângulo feito de três pontos e três setas – os que estão em vermelho aqui:

$$\underbrace{(\underbrace{(1,1)+\overrightarrow{(2,0)}}_{(3,1)})+\overrightarrow{(1,2)}}_{(4,3)} = \underbrace{(1,1)+(\underbrace{\overrightarrow{(2,0)}+\overrightarrow{(1,2)}}_{\overrightarrow{(3,2)}})}_{(4,3)}$$

O objetivo do próximo exercício é você relembrar como representar graficamente certas expressões com pontos e vetores usando quase só o olhômetro, quase sem fazer contas.

Desenhando parábolas (quase) no olhômetro

Digamos que conhecemos A, $\vec{v}$, e $\vec{w}$. Então a trajetória

$$P(t) = A + t\vec{v} + t^2\vec{w}$$

é uma parábola – e queremos aprender a desenhar os 5 pontos mais fáceis dela, que são $P(0)$, $P(1)$, $P(-1)$, $P(2)$, $P(-2)$, usando o máximo de olhômetro e o mínimo possível de contas...

Exercício: desenhando parábolas (quase) no olhômetro

1) Sejam $A = (3, 1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1, 0)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(0, 1)}$.

Represente graficamente num gráfico só:

a) A

b) $(A + \vec{v}) + \vec{w}$

c) $(A + \vec{w}) + \vec{v}$

d) $(A + 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

e) $(A + 4\vec{w}) + 2\vec{v}$

f) $(A - \vec{v}) + \vec{w}$

g) $(A + \vec{w}) - \vec{v}$

h) $(A - 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

i) $(A + 4\vec{w}) - 2\vec{v}$

Exercício: desenhando parábolas (quase) no olhômetro (2)

2) Sejam $A=(1,1)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(1,-1)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(1,1)}$.

Represente graficamente num gráfico só:

a) A

b) $(A+\vec{v})+\vec{w}$

c) $(A+\vec{w})+\vec{v}$

d) $(A+2\vec{v})+4\vec{w}$

e) $(A+4\vec{w})+2\vec{v}$

f) $(A-\vec{v})+\vec{w}$

g) $(A+\vec{w})-\vec{v}$

h) $(A-2\vec{v})+4\vec{w}$

i) $(A+4\vec{w})-2\vec{v}$

Exercício: desenhando parábolas (quase) no olhômetro (3)

3) Sejam $A = (1, 1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1, -1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(-1, 1)}$.

Represente graficamente num gráfico só:

a) A

b) $(A + \vec{v}) + \vec{w}$

c) $(A + \vec{w}) + \vec{v}$

d) $(A + 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

e) $(A + 4\vec{w}) + 2\vec{v}$

f) $(A - \vec{v}) + \vec{w}$

g) $(A + \vec{w}) - \vec{v}$

h) $(A - 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

i) $(A + 4\vec{w}) - 2\vec{v}$

Exercício: desenhando parábolas (quase) no olhômetro (4)

4) Sejam $A = (2,6)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1,1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(2,-1)}$.

Represente graficamente num gráfico só:

a) A

b) $(A + \vec{v}) + \vec{w}$

c) $(A + \vec{w}) + \vec{v}$

d) $(A + 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

e) $(A + 4\vec{w}) + 2\vec{v}$

f) $(A - \vec{v}) + \vec{w}$

g) $(A + \vec{w}) - \vec{v}$

h) $(A - 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

i) $(A + 4\vec{w}) - 2\vec{v}$

Obs: você vai precisar de um gráfico que contenha os pontos (0,0) e (12,8).

Introdução (2022.2)

Sobre a aula 1
Na aula 1 nós usamos as idéias dos 8 primeiros slides daqui,

3dT2 Aulas 4 e 5: introdução ao curso

e do slide 10 daqui,

3bT93 ...usam um caso particular disfarçado

...pra desenhar casos particulares das figuras das seções 7.4 e 7.5 do "GA1" do Felipe Acker:

AckerGA1p43 (p.27) 7.4 Soma de vetores

Introdução ao vetor velocidade
Em cursos de Cálculo 3 "pra matemáticos" a gente normalmente começa definindo o vetor velocidade como um limite. O Felipe Acker faz isso muito bem nos capítulos 2 e 3 do "GA4",

AckerGA4p21 (p.13) Capítulo 2: Velocidade
AckerGA4p27 (p.19) Capítulo 3: Aceleração

Eu costumava fazer mais ou menos isso no curso de Cálculo 3, e a gente gastava uma aula inteira aprendendo a decifrar a fórmula daquele limite e visualizar o que ela queria dizer.

Dessa vez vamos tentar fazer algo diferente. Vamos começar com exemplos e animações. Assista este vídeo aqui até o 9:00,

3dT25 Aula 7: um vídeo sobre curvas de Bézier
`https://www.youtube.com/watch?v=aVwxzDHniEw`

...mas considere que tudo no vídeo até o 6:34 são idéias avançadas que a gente só vai entender nuns exercícios que a gente vai fazer daqui a algumas aulas. Por enquanto reserve praticamente toda a sua atenção pro trecho entre 6:34 e 9:00, que é o trecho que a Freya Holmér mostra os vetores velocidade e aceleração pra algumas curvas de Bézier.

A gente vai fazer o seguinte. Nós vamos acreditar que *em geral* quando temos uma trajetória $P(t) = (x(t), y(t))$ o vetor velocidade dessa trajetória é $P'(t) = (x'(t), y'(t))$. Nós vamos ver vários exemplos disso, e vamos deixar pra entender os detalhes desse "em geral" quando formos entender a definição "pra matemáticos" do vetor velocidade.

Traço

Comece entendendo a definição de traço de uma curva parametrizada do Bortolossi:
Bort6p2 (p.188) Definição 6.1
Agora sejam:

$$\begin{array}{rcl} P(t) & = & (4,0) + t\overrightarrow{(0,1)}, \\ Q(u) & = & (0,3) + u\overrightarrow{(2,0)}. \end{array}$$

Exercício 5

a) Represente num gráfico só o traço de $P(t)$ e o de $Q(u)$.

b) Marque o ponto $P(0)$ e escreva '$t = 0$' do lado dele.

c) Faça o mesmo para os pontos $P(1)$ ('$t = 1$') e $Q(0)$ e $Q(1)$ ('$u = 0$' e '$u = 1$').

d) Seja r o traço de $P(t)$ e s o traço de $Q(u)$.
Seja X o ponto de interseção de r e s.
Quais são as coordenadas de X?

e) Cada ponto de r está "associado" a um valor de t e cada ponto de s a um valor de u. Quais são os valores de t e u associados ao ponto X? Chame-os de t_0 e u_0 e indique-os no seu gráfico – por exemplo, se $t_0 = 99$ e $u_0 = 200$ você vai escrever '$t = 99$' e '$u = 200$' do lado do ponto X. Note que "$t_0 = 99$" e "t_{99}" são coisas totalmente diferentes!

Dica:
MpgP17

Agora releia as dicas 1, 2 e 7 daqui:
2gT4 "Releia a dica 7"
e entenda a notação de "set comprehensions" daqui:
MpgP8 "Set comprehensions"

Se você aprender a definir os seus objetos em linguagem matemática você vai conseguir aprender (e fazer!) muitas coisas do curso MUITO mais rápido, e vai ter muito mais facilidade pra escrever elas de um jeito legível. Então:

Exercício 5 (cont.)

f) No item (d) a gente definiu r, s e X usando muitas palavras em português. Dá pra definir r, s e X com bem menos português se a gente usar a notação de "set comprehensions". Aprenda a usar essa notação e complete as lacunas abaixo:

Sejam:

$$\begin{array}{rcl} P(t) & = & (4,0) + t\overrightarrow{(0,1)}, \\ Q(u) & = & (0,3) + u\overrightarrow{(2,0)}. \\ r & = & \{\_\_\_\_ \mid \_\_\_\_\}, \\ s & = & \{\_\_\_\_ \mid \_\_\_\_\}, \\ X & = & r \cap s \end{array}$$

Um círculo

Seja:

$$P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t).$$

Exercício 6.
Represente num gráfico só:

a) o traço de $P(t)$,

b) $P(\frac{\pi}{2}) + P'(\frac{\pi}{2})$, escrevendo '$P(\frac{\pi}{2})$' ao lado do ponto e '$P'(\frac{\pi}{2})$' ao lado da seta,

c) Idem para estes outros valores de t: $0, \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \pi$.

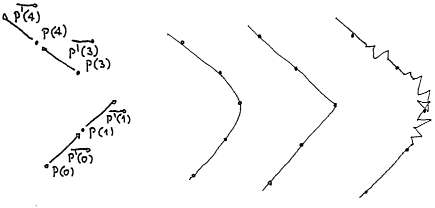
d) Seja $Q(u) = P(\pi) + uP'(\pi)$. Desenhe o traço de $Q(u)$ e anote '$Q(0)$' e '$Q(1)$' nos pontos adequados.

e) O traço de $Q(u)$ é uma reta tangente ao traço de $P(t)$ no ponto $P(\pi)$? Encontre no livro ou no resto da internet uma definição formal de reta tangente e descubra se isto é verdade ou não.

Sobre "adivinhar trajetórias"

Nos próximos dois exercícios nós vamos *começar* a fazer uma coisa que vai ser muito comum aqui nesse curso de Cálculo 3, e que geralmente é inadmissível nos cursos de Cálculo 1: nós vamos tentar "advinhar" como certas trajetórias são a partir de umas poucas informações sobre elas.

Esse "adivinhar" na verdade é "fazer hipóteses razoáveis", e às vezes a gente precisa de mais informações pra descobrir qual hipótese é mais razoável. Na figura do próximo slide eu desenhei à esquerda $P(t) + P'(t)$ para a trajetória de um personagem de videogame em $t = 0, 1, 3, 4$, mas existem muitas trajetórias que se passam por esses pontos com essas velocidades. Na primeira figura à direita eu desenhei uma trajetória de uma nave no espaço; na segunda eu desenhei a trajetória de um personagem de um videogame do meu tempo — naquela época nada nos videogames obedecia as leis da Física, e nos meus jogos preferidos o meu personagem era um quadradinho — e na terceira o personagem é atingido por um raio em $t = 1.05$ e ele adquire superpoderes.



Lissajous

Os exercícios desta página vão dar curvas de Lissajous, como as daqui:
https://en.wikipedia.org/wiki/Lissajous_curve

Exercício 7
Seja $P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} 2t)$.
Represente graficamente $P(t) + P'(t)$ para os seguintes valores de t:
$0, \frac{1}{4}\pi, \frac{2}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \ldots, 2\pi$.
Faça as anotações adequadas nos seu pontos e vetores pra lembrar qual é o t associado a cada um.

Tente usar as informações deste gráfico pra desenhar o traço de $P(t)$. Isto não é nada óbvio – se inspire nas figuras das páginas 208 e 209 do capítulo 6 do Bortolossi e tente conseguir uma hipótese razoável.

Você pode pensar que $P(t)$ é a posição do Super Mario Kart no instante t e $P'(t)$ é o *vetor velocidade* dele no instante t (lembre que um vetor tem "direção", "orientação" e "módulo"!)... você só sabe a posição e a velocidade dele em alguns instantes, isto é, em alguns valores de t, e você vai ter que encontrar uma aproximação razoável, olhométrica, pra pista onde ele está correndo.

Exercício 8
Seja $P(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} t)$.
Represente graficamente $P(t) + P'(t)$ para os seguintes valores de t:
$0, \frac{1}{4}\pi, \frac{2}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \ldots, 2\pi$.
Faça as anotações adequadas nos seu pontos e vetores pra lembrar qual é o t associado a cada um.

Tente usar as informações deste gráfico pra desenhar o traço de $P(t)$. Isto não é nada óbvio – se inspire nas figuras das páginas 208 e 209 do capítulo 6 do Bortolossi e tente conseguir uma hipótese razoável.

Links:
Bort6p22 Bortolossi, cap.6, p.208
Bort6p23 Bortolossi, cap.6, p.209

Órbita

Este exercício vai dar uma figura que é a órbita de uma lua.
O resultado vai ser algo como a figura da última página daqui,
http://anggtwu.net/LATEX/2022-1-C3-orbita.pdf
mas olhe pra essa figura durante só uns poucos segundos.

Neste exercício você vai tentar redescobrir essa figura sozinho, e você vai tentar descobrir como desenhar uma aproximação bem razoável pra ela só somando uns vetores no olhômetro e sem fazer nenhuma conta complicada — por exemplo, você vai evitar usar uma aproximação numérica pra $(\cos(\frac{1}{12}\cdot 2\pi), \operatorname{sen}(\frac{1}{12}\cdot 2\pi))$; ao invés disso você vai usar a representação gráfica deste ponto no $\mathbb{R}^2$.

Seja $h = \frac{1}{12}\cdot 2\pi$.
Esse h vai ser uma "hora". Vou explicar isso no quadro.
Sejam:

$$\begin{array}{rcl} P(t) & = & (\cos t, \operatorname{sen} t), \\ Q(t) & = & (\cos 4t, \operatorname{sen} 4t), \\ R(t) & = & \frac{1}{2}(\cos 4t, \operatorname{sen} 4t) = (\frac{1}{2}\cos 4t, \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4t), \\ S(t) & = & P(t) + R(t). \end{array}$$

Exercício 9.
Representе graficamente:

a) $P(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.
b) $P(t) + P'(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.

c) $Q(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.
d) $Q(t) + Q'(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.

e) $R(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.
f) $R(t) + R'(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.

g) $S(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.
h) $S(t) + S'(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.

(Continua...)

Órbita (cont.)

Nos itens a até f você deve ter obtido pontos sobre círculos e vetores tangentes aos círculos apoiados nestes pontos. Nos itens g e h você deve ter obtido algo bem mais complicado: pontos e vetores apoiados nestes pontos, mas você ainda não sabe direito sobre que curva eles estão.

Reveja o trecho entre 6:34 e 9:00 do vídeo da Freya Holmér. A trajetória que ela analisa é bem "suave", no sentido de que ela não bicos ou teleportes, e a derivada da aceleração dela é constante.

No item h você obteve alguns pontos e vetores velocidade *de uma trajetória que você não sabe direito qual é...* você só tem uma lembrança vaga do "traço" dessa trajetória, porque você viu a figura-spoiler durante uns poucos segundos.

i) Desenhe uma trajetória bem suave que nos instantes $t = 0h$, $1h$, $\ldots$, $12h$ passe pelos pontos que você obteve no item g. Aqui você vai conseguir uma aproximação bem tosca pro "traço" da trajetória $S(t)$.

j) Desenhe uma trajetória bem suave que nos instantes $t = 0h$, $1h$, $\ldots$, $12h$ passe pelos pontos que você obteve no item h, e que naqueles instantes tenha exatamente os vetores velocidade que você também desenhou no item h. Aqui você provavelmente vai conseguir uma aproximação bastante boa pro "traço" da trajetória $S(t)$.

k) Refaça o desenho do item j pra ele ficar mais caprichado e simétrico e tal. Quando você achar que conseguiu fazer uma versão caprichada boa olhe de novo a figura-spoiler e compare o seu desenho com ela.

Bico e teleporte

Exercício 10: uma trajetória com um bico
Dê uma olhada no item 1e daqui:

3eT70 VS extra de 2022.1 - questão 1

Faça o que essa questão pede e represente graficamente $Q(t) + Q'(t)$ pra um monte de outros valores de t também — até você entender como essa trajetória se comporta. *Dica:* ela é um movimento retilíneo uniforme até um determinado instante, aí ela muda de vetor velocidade subitamente e vira um outro movimento retilíneo uniforme.

Exercício 11: um trajetória com teleporte
Represente graficamente a trajetória abaixo. Ela é parecida com a anterior, mas nessa tem um momento em que a partícula desaparece do ponto em que em estava e se teleporta pra outro lugar.

$$R(t) = \begin{cases} (t, 4) & \text{quando } t \leq 6, \\ (5, 11 - t) & \text{quando } 6 < t. \end{cases}$$

Dicas pro exercícios 10 e 11
Este vídeo aqui tem algumas figuras sobre como desenhar trajetórias:

http://www.youtube.com/watch?v=3yWLubqHsic
http://anggtwu.net/eev-videos/2020.2-C3-intro.mp4

Quase todo mundo achou muito difícil desenhar a trajetória do exercício 11 — se a gente calcula $R(t)$ só pra valores inteiros de t a gente não consegue descobrir como a $R(t)$ se comporta entre $t = 6$ e $t = 7$...

Um jeito de resolver isso é calcular $R(t)$ para $t = 6.1$, $t = 6.2$, ..., $t = 6.9$, desenhar esses pontos no gráfico, e aí tentar descobrir qual é o comportamento da $R(t)$ pra todos os valores em $[6, 7]$.

Um outro jeito é considerar que $R(t) = (x(t), y(t))$ e tentar entender as funções $x(t)$ e $y(t)$, que são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Cálculo 3 - 2024.1

Aula 6: tipos e limites

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C3.html

Links

Bort5p2 (p.164) Fig. 5.1: Interpretação geométrica da derivada
StewPtCap10 Cap.10: Equações Paramétricas e Coordenadas Polares

C

Em `C` cada subexpressão retorna um valor, e cada valor tem um tipo. Por exemplo, depois destas declarações

```
char c = 100;
float a = 2.34;
```

Temos os dois diagramas à direita. Repare que o primeiro diz o tipo de cada subexpressão e o segundo diz o valor, ou o resultado, daquela subexpressão.

Esses dois diagramas *se complementam*. A maioria dos exercícios deste PDF vai pedir que você faça o diagrama de tipos, e alguns deles vão ter sugestões tipo "se você estiver completamente perdido considere o caso particular tal e faça o diagrama de valores dele... e depois tente fazer o diagrama de tipos".

$$\underbrace{\texttt{printf}(\underbrace{\text{"\%f"}}_{\texttt{char *}},\ \underbrace{\underbrace{\texttt{c}}_{\texttt{char}} + \underbrace{\texttt{a}}_{\texttt{float}}}_{\texttt{float}})}_{\texttt{int}}$$

$$\underbrace{\texttt{printf}(\underbrace{\text{"\%f"}}_{\text{"\%f"}},\ \underbrace{\underbrace{\texttt{c}}_{\texttt{100}} + \underbrace{\texttt{a}}_{\texttt{2.34}}}_{\texttt{102.34}})}_{\texttt{6}}$$

Funções

Em `C` o "valor" do `printf` é um número de 64 bits — o endereço do código da função `printf` — com um tipo complicado... quando eu rodei o GDB no programa da página anterior e perguntei pra ele o tipo e o valor do `printf` ele respondeu isso aqui:

```
(gdb) p printf
$1 = {int (const char *, ...)}
       0x7ffff7e3bcf0 <__printf>
(gdb)
```

Livros de Matemática geralmente consideram que funções são conjuntos. Por exemplo, se

$$\begin{array}{rcrcl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

então f — ou: o "valor" de f — é o gráfico da função f, que é uma párabola em $\mathbb{R}^2$, e é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ contendo infinitos pontos... ou seja: nesse caso o valor de $f(3)$ é 9, que é um número, mas o "valor" de f é um conjunto infinito!!! Cuidado! =(

Dica: leia as páginas 31–33 do capítulo 1 do Leithold pra ver como ele define funções. A gente só vai entender *direito* o conceito de "variável dependente", que ele menciona na página 32, quando a gente começar a entender "notação de físicos", daqui a algumas aulas... pra resumir *muito*: "variáveis dependentes" existem em "notação de físicos" e não existem em "notação de matemáticos", e a gente vai ver como traduzir entre as duas notações.

Tipos

TUDO que nós vamos fazer em Cálculo 3 pode ser *visualizado* e *tipado*. Você já viu um pouco de tipos em `C` e em Física; em Física os "tipos" são parcialmente determinados pelas unidades — metros são distância, segundos são tempo, metros/segundo é uma unidade de velocidade, e assim por diante... em `C` um `char`, um `int`, um `float` e um `(void *)` são coisas bem diferentes.

Obs: o jeito como nós vamos usar tipos em Cálculo 3 vai ser bastante improvisado. Se você googlar por "Type Theory" você vai encontrar montes de referências a teorias de tipos que podem ser totalmente formalizadas, mas os tipos que nós vamos usar em C3 são muito mais "intuitivos" do que "formais".

Dê uma olhada nas páginas 164 a 166 do capítulo 5 do Bortolossi:

Bort5p2 (p.164) 5.2 Definições e exemplos

Todas as expressões que aparecem lá podem ser "tipadas" e interpretadas como posições no eixo x (ou no eixo y, ou no eixo y), ou como distâncias no eixo x (ou no eixo y, ou z), ou como *inclinações*... vamos ver os detalhes disto aos poucos.

Nos próximos exercícios você vai tentar "tipar" cada subexpressão deles. Escreva os seus tipos nos lugares em que eu pus as '?'s. Use português, improvise o quanto precisar, invente abreviações – mas tente encontrar as melhores abreviações possíveis – e compare o seu modo de escrever os tipos com os dos seus colegas. Lembre que aqui nós estamos tentando fazer explicitamente, num diagrama, algo que os livros fazem em poucas frases de texto fingindo que é algo óbvio.
Se você tiver dificuldade de fazer o caso geral faça um caso particular primeiro.

Exercício 1

Digamos que $f(x) = x^2$ e que $y = f(x)$.
Se você tiver dificuldade de pensar no caso geral
faça $x_0 = 1$ e $\Delta x = 0.1$.

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{\underbrace{f}_{?}(\underbrace{\underbrace{x_0}_{?}+\underbrace{\Delta x}_{?}}_{?})}_{?} - \underbrace{\underbrace{f}_{?}(\underbrace{x_0}_{?})}_{?})}_{?} / \underbrace{\Delta x}_{?}}_{?}$$

Exercício 2

Digamos que $f(t) = \cos t$, $g(t) = \operatorname{sen} t$, e $P(t) = (f(t), g(t))$.
Se você tiver dificuldade de pensar no caso geral
faça $t_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\Delta t = 0.1$.

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{\underbrace{P}_{?}(\underbrace{\underbrace{t_0}_{?}+\underbrace{\Delta t}_{?}}_{?})}_{?} - \underbrace{\underbrace{P}_{?}(\underbrace{t_0}_{?})}_{?})}_{?} \,/\, \underbrace{\Delta t}_{?}}_{?}$$

Exercício 3

Digamos que $f(t) = \cos t$, $g(t) = \operatorname{sen} t$, e $P(t) = (f(t), g(t))$.
Se você tiver dificuldade de pensar no caso geral
faça $t_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\Delta t = 0.1$.

$$\underbrace{\underbrace{P}_{?}(\underbrace{\underbrace{t_0}_{?}+\underbrace{\Delta t}_{?}}_{?})}_{?} = \underbrace{(\underbrace{\underbrace{f}_{?}(\underbrace{\underbrace{t_0}_{?}+\underbrace{\Delta t}_{?}}_{?})}_{?}, \underbrace{\underbrace{g}_{?}(\underbrace{\underbrace{t_0}_{?}+\underbrace{\Delta t}_{?}}_{?})}_{?})}_{?}$$

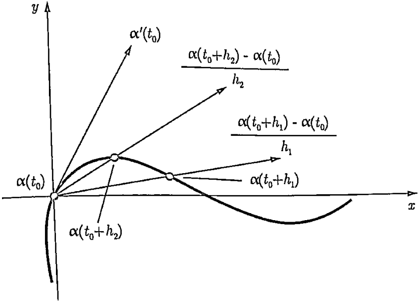
Agora nós vamos começar a ver como decifrar definições como a das páginas 197–198 do capítulo 6 do Bortolossi:

Bort6p11 (p.197) 6.2 O vetor tangente a uma curva parametrizada

Ele faz tudo de um jeito bem geral, e ele usa $\mathbb{R}^m$ ao invés de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Exercício 4
Reescreva a conta grande no meio da página 198 do Bortolossi substituindo t_0 por $\frac{\pi}{2}$, h_j por ε, $x_1(t)$ por $\cos t$, $x_2(t)$ por $\operatorname{sen} t$, e m por 2. Obs: os '...' vão sumir.

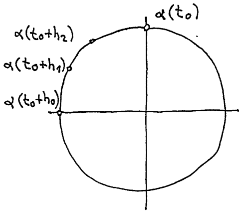
O livro do Bortolossi tem essa figura daqui na página 199:
Bort6p13 (p.199) Figura 6.8: o vetor tangente...



Isso é um desenho de vetor velocidade como limite de retas secantes num caso geral – o Bortolossi não nos diz quem são $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, nem t_0, nem a sequência $(h_1, h_2, h_3, \ldots)$, e isso sugere que essa figura vai valer pra quaisquer α, t_0 e $(h_1, h_2, \ldots)$, com as devidas adaptações...

Exercício 5

Aqui nós vamos tentar fazer uma figura parecida com a do caso anterior, mas com $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$, $h_0 = \frac{\pi}{2}$, $0 < \ldots < h_3 < h_2 < h_1 < h_0$, $\lim_{j\to\infty} h_j = 0$. Comece com esta figura aqui,



e encontre valores razoáveis para h_1, h_2 e h_3 que te permitam completar o desenho no olhômetro fazendo as contas de cabeça com aproximações bem grosseiras.

Introdução à "notação de físicos"

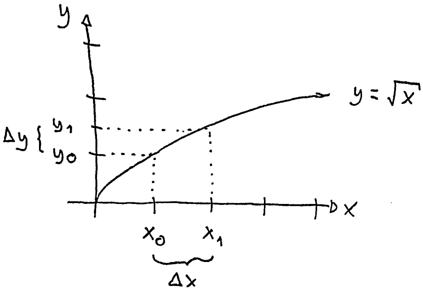
Nós vamos aprender a usar duas convenções de notação matemática no curso – ou, pra encurtar, duas "notações". O Bortolossi usa uma notação muito mais precisa, que eu vou chamar de "notação de matemáticos", e o Silvanus Thompson usa uma notação mais intuitiva mas bem mais difícil de formalizar, que eu vou chamar de "notação de físicos".

Na "notação de físicos" muitos símbolos vão ser *abreviações* e as regras pra expandir essas abreviações vão depender do contexto. Vão existir algumas convenções pra expandir essas abreviações que vão ser seguidas *quase* sempre, mas vão existir muitas exceções – e muitos casos ambíguos...

Um primeiro exemplo

Digamos que $y = \sqrt{x}$.

Podemos considerar que x e y “variam juntos”, “obedecendo certas restrições”. O conjunto dos pontos (x, y) que obedecem essas restrições é $\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{x} \,\}$ e o gráfico é:



$$\begin{array}{rcl} x_0, x_1 & \in & \mathbb{R} \\ y_0 & = & \sqrt{x_0} \\ y_1 & = & \sqrt{x_1} \\ \Delta x & = & x_1 - x_0 \\ \Delta y & = & y_1 - y_0 \end{array}$$

Cálculo 3 - 2024.1

Aula 7: diferenciais e
derivação implícita

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C3.html

Links

3iQ16 Quadros da aula 7 (8/abril/2024)
3hT56 “Notação de físicos” (2023.2)
Leit4p61 (p.275) Regras para a notação de Leibniz
Leit3p59 (p.195) Derivação implícita
ThompsonP77 (p.66) IX. introducing a Useful Dodge

Cálculo 3 - 2024.1

Aulas 10 e 11: Introdução a superfícies

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C3.html

Links

3iQ20 Quadros da aula 10 (17/abr/2024)

StewPtCap14p5 (p.791) 14 Derivadas Parciais
StewPtCap14p6 (p.792) 14.1 Funções de Várias Variáveis
StewPtCap14p10 (p.796)   Curvas de nível
StewPtCap14p18 (p.804) 14.2 Limites e Continuidade
StewPtCap14p25 (p.811) 14.3 Derivadas Parciais
StewPtCap14p34 (p.820) 14.3 Exercícios
StewPtCap14p35 (p.821)   10. Um mapa de contorno...
StewPtCap14p47 (p.833) [4] A regra da cadeia (versão geral)

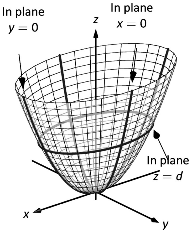
ThompsonP77 (p.66) IX. Introducing a useful dodge
ThompsonP183 (p.172) XVI. Partial differentiation
ThompsonP188 (p.177) Exercises

MpgP24 Visualizando $F(x,y)$ (diagramas de numerozinhos)
MpgP45 Retas e planos em $\mathbb{R}^3$
MpgP46 Retas e planos em $\mathbb{R}^3$ (2)
3hT77 Low poly
3hT84 Exercício 15 (sobre a pirâmide)

Bort5p1 (p.163) 5 Derivadas parciais
Apexcap12p23 (p.700) 12.3 Partial Derivatives

Introdução

Isso aqui é a superfície $z = \frac{1}{4}x^2 + y^2$ (a figura é do APEX Calculus):



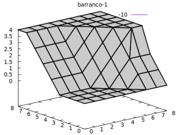
Essa superfície é um parabolóide – que é uma das superfícies quádricas mais simples. Superfícies quádricas são o último assunto da matéria de GA, só que como os alunos têm entrado na universidade com muito pouca base há anos nenhum professor de GA consegue chegar até quádricas direito, e aí os alunos vêem quádricas muito superfícialmente em GA...

Dê uma olhada nas figuras do capítulo 14 do Stewart:

StewPtCap14p5 (p.791) 14 Derivadas Parciais

exceto pelas figuras 6, 7, 9, 16 e 17 todas as outras superfícies que ele usa como exemplos supõem que os leitores têm muita prática com quádricas... como lidar com isso?

Uma opção seria o “Método Reginaldo”: eu diria “Isso é matéria de GA! Vocês já deveriam saber!”, e eu seguiria o Stewart à risca... outra opção, que eu acho bem mais legal, é a gente começar com superfícies que são formadas por pedaços de planos, como esta aqui...



Introdução (2)

...que são chamadas de “Low Poly” – superfícies 3D formadas por polígonos, em baixa resolução... e “Low Resolution” acaba querendo dizer “poucos polígonos”.

Então a gente vai começar com superfícies “Low Poly”, em que as contas são simples e quase todos os números que vão aparecer nas contas vão ser inteiros pequenos, pra vocês treinarem bastante o olhômetro de vocês e entenderem visualmente o que são curvas de nível, derivadas parciais e gradientes, e só depois a gente vai pras superfícies “suaves” do Stewart.

Exercícios da aula 10

3iQ16 Quadros da aula 10 (17/abr/2024)

Exercício 1
Faça o exercício 1 desta página do MPG,
Mpg24 Visualizando $F(x, y)$
mas só desenhe $F(x, y)$ para os pontos com:

$$x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

ou seja, em cada um dos 7 itens – de (a) até (g) – você só vai desenhar 25 numerozinhos.

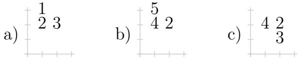
Exercício 2
Dê uma olhada nesta seção do Stewart,
StewPtCap14p10 (p.796) Curvas de nível
e entenda o que são curvas de nível e mapas de contorno.
Depois veja a figura do exercício 10 daqui,
StewPtCap14p35 (p.821) 10. Um mapa de contorno...
e discuta com os seus colegas quais são valores razoáveis para:

a) $f(1, 3)$
b) $f(1.5, 3)$
c) $f(1, 0)$
d) $f(-1, 2)$

Exercício 3
Volte pros diagramas de numerozinhos do exercício 1 de hoje e desenhe pelo menos 4 curvas de nível em cada um dos diagramas.

Exercício 4
Em alguns casos as curvas de nível vão ser retas. Em cada um desses casos descubra um vetor diretor para estas retas.

Exercício 5
Lembre que "três pontos não colineares determinam um plano"...
Descubra como fazer o diagrama de numerozinhos do plano que contém os três pontos do primeiro diagrama abaixo. Depois faça o mesmo para os outros dois diagramas.



Exercício 6
Faça os itens (a) até (h) desta página:
3hT84 Exercício 15
Ignore a "fórmula da aproximação linear" no topo dela.

Algumas provas com superfícies Low Poly

A nossa P1 vai ter uma questão grande sobre superfícies Low Poly – “barrancos” – parecida com as destas provas daqui:

3eT52 (2022.1) P1
3eT65 (2022.1) VS
3eT69 (2022.1) VS extra
3fT80 (2022.2) P1
3hT122 (2023.2) P1

Todas elas têm gabarito exceto a última.

Entenda como funciona o item de dividir a superfície em faces e projetar estas faces no plano e faça a mesma coisa pra prova que não tem gabarito.

Cálculo 3 - 2024.1

Aula 15: dois métodos

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2024.1-C3.html

Links

Método 1

Digamos que queremos encontrar $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ que obedeçam isto aqui:

$$\begin{aligned} f(t) &= a + ((t-b)/c) \cdot d, \\ f(12) &= 34, \\ f(12+23) &= 34+56, \end{aligned}$$

O "método 1" é encontrarmos a, b, c, d "algebricamente", fazendo contas como estas daqui...

(%i1) `f(t) := a + (t-b)/c * d;`
(%o1)
$$f(t) := a + \frac{t-b}{c} d$$

(%i2) `eq1 : f(12)    = 34;`
(%o2)
$$\frac{(12-b)\ d}{c} + a = 34$$

(%i3) `eq2 : f(12+23) = 34+56;`
(%o3)
$$\frac{(35-b)\ d}{c} + a = 90$$

(%i4) `solve([eq1, eq2], [a,c]);`
(%o4)
$$\left[\left[a = \frac{56\,b + 110}{23}, c = \frac{23\,d}{56}\right]\right]$$

(%i5) `solve([eq1, eq2], [a,d]);`
(%o5)
$$\left[\left[a = \frac{56\,b + 110}{23}, d = \frac{56\,c}{23}\right]\right]$$

(%i6) `solve([eq1, eq2], [b,c]);`
(%o6)
$$\left[\left[b = \frac{23\,a - 110}{56}, c = \frac{23\,d}{56}\right]\right]$$

(%i7) `solve([eq1, eq2], [b,d]);`
(%o7)
$$\left[\left[b = \frac{23\,a - 110}{56}, d = \frac{56\,c}{23}\right]\right]$$

...ou fazendo contas como estas, que dão fórmulas mais gerais:

(%i8) `eq3 : f(x0) = y0;`
(%o8)
$$\frac{d\ (\mathrm{x0}-b)}{c} + a = \mathrm{y0}$$

(%i9) `eq4 : f(x1) = y1;`
(%o9)
$$\frac{d\ (\mathrm{x1}-b)}{c} + a = \mathrm{y1}$$

(%i10) `solve([eq3, eq4], [a,c]);`
(%o10)
$$\left[\left[a = -\left(\frac{(\mathrm{x0}-b)\ \mathrm{y1} + (b-\mathrm{x1})\ \mathrm{y0}}{\mathrm{x1}-\mathrm{x0}}\right), c = \frac{d\,\mathrm{x1} - d\,\mathrm{x0}}{\mathrm{y1}-\mathrm{y0}}\right]\right]$$

(%i11) `solve([eq3, eq4], [a,d]);`
(%o11)
$$\left[\left[a = \frac{\mathrm{x0}\,\mathrm{y1} - b\,\mathrm{y1} + (b-\mathrm{x1})\ \mathrm{y0}}{\mathrm{x0}-\mathrm{x1}}, d = \frac{c\,\mathrm{y0} - c\,\mathrm{y1}}{\mathrm{x0}-\mathrm{x1}}\right]\right]$$

(%i12) `solve([eq3, eq4], [b,c]);`
(%o12)
$$\left[\left[b = \frac{\mathrm{x0}\ (a-\mathrm{y1}) + \mathrm{x1}\,\mathrm{y0} - a\,\mathrm{x1}}{\mathrm{y0}-\mathrm{y1}}, c = \frac{d\,\mathrm{x0} - d\,\mathrm{x1}}{\mathrm{y0}-\mathrm{y1}}\right]\right]$$

(%i13) `solve([eq3, eq4], [b,d]);`
(%o13)
$$\left[\left[b = \frac{\mathrm{x0}\,\mathrm{y1} - \mathrm{x1}\,\mathrm{y0} + a\,\mathrm{x1} - a\,\mathrm{x0}}{\mathrm{y1}-\mathrm{y0}}, d = \frac{c\,\mathrm{y1} - c\,\mathrm{y0}}{\mathrm{x1}-\mathrm{x0}}\right]\right]$$

(%i14)

Método 2

...mas Cálculo 3 é um curso sobre *aprender a visualizar*, não um curso sobre *fazer contas*. Nos exemplos que a gente vai trabalhar no curso *quase sempre* o Método 1 vai nos atrapalhar bem mais do que nos ajudar.

A gente fez um monte de exercícios sobre o "Método 2" antes da greve, e eu vou precisar que vocês refaçam eles em casa pra lembrar como o Método 2 funciona.

Alguns links:
3iT4 Pontos mais fáceis de calcular
3iT7 Uma trajetória em três partes (2)
3iT50 Exercícios da aula 10 - exercício 5
3hT78 Regiões
3hT79 Regiões (2)

...e essa animação daqui, que é novidade:
http://anggtwu.net/LATEX/2024-1-C3-anim-rp1.gif

Exercício
Reescreva as definições para F_N, F_W, F_E, F_S que você obteve aqui
3hT79 Regiões (2)
neste formato:

$$\begin{array}{rcl}
F_N(x,y) & = & ___ + ___(x-4) + ___(y-3) \\
F_S(x,y) & = & ___ + ___(x-4) + ___(y-5) \\
F_W(x,y) & = & ___ + ___(x-3) + ___(y-4) \\
F_E(x,y) & = & ___ + ___(x-5) + ___(y-4) \\
F_E(x,y) & = & ___ + ___(x-6) + ___(y-4)
\end{array}$$

Cálculo 3 - 2024.1

Aula 17: séries de Taylor e Maclaurin
(para funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C3.html

Links

StewPtCap3p73 (p.226) 3.10 Aproximações Lineares e Diferenciais
StewPtCap11p61 (p.679) 11.10 Séries de Taylor e Maclaurin
StewPtCap11p63 (p.681) polinômio de Taylor de n-ésimo grau
StewPtCap11p67 (p.685) Exemplo 7: ...em colunas

Leit3p9 (p.145) Notações para "at": $f'(x_1)$ e $\frac{d}{dx}\big]_{x=x1}$
Leit11p29 (p.677) 11.5. A fórmula de Taylor
Leit11p32 (p.680) Figura 6: seno ... MacLaurin de graus 1, 3, 5 e 7

Miranda117 4.7 Aproximações Lineares e Diferencial
Miranda168 5.9 Polinômio de Taylor

```
http://anggtwu.net/MAXIMA/mkmatrix1.mac.pyg.html
http://anggtwu.net/e/maxima.e.html#2024.1-taylor-1
(find-angg "MAXIMA/mkmatrix1.mac")
(find-es "maxima" "2024.1-taylor-1")
```

A idéia básica

Digamos que $f(x)$ é um polinômio.
Digamos que o grau dele é 4, pra simplificar.
Digamos que $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$.
Então:

$$\begin{array}{rcl} f(x) &=& a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \\ f'(x) &=& b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 \\ f''(x) &=& 2c + 6dx + 12ex^2 \\ f'''(x) &=& 6d + 24ex \\ f''''(x) &=& 24e \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f(0) &=& a \\ f'(0) &=& b \\ f''(0) &=& 2c \\ f'''(0) &=& 6d \\ f''''(0) &=& 24e \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} a &=& f(0) \\ b &=& f'(0) \\ c &=& f''(0)/2 \\ d &=& f'''(0)/6 \\ e &=& f''''(0)/24 \end{array}$$

E portanto:

$$f(x) \;=\; f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f''''(0)}{24}x^4$$

A idéia básica (2)

Agora vamos tentar generalizar isso.
Digamos que $f(x)$ é um polinômio.
Digamos que o grau dele é k, e que por enquanto $k = 4$.
Digamos que $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$.
A notação $f^{(k)}$, como o (k) entre parênteses, quer dizer "f derivada k vezes". Por exemplo, $f^{(4)} = f''''$, e $f^{(0)} = f$.
Então:

$$\begin{array}{rcl}
f^{(0)}(x) &=& a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \\
f^{(1)}(x) &=& a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 \\
f^{(2)}(x) &=& 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 \\
f^{(3)}(x) &=& 6a_3 + 24a_4x \\
f^{(4)}(x) &=& 24a_4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
f^{(0)}(0) &=& 0!\,a_0 \\
f^{(1)}(0) &=& 1!\,a_1 \\
f^{(2)}(0) &=& 2!\,a_2 \\
f^{(3)}(0) &=& 3!\,a_3 \\
f^{(4)}(0) &=& 4!\,a_4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
a_0 &=& f^{(0)}(0)/0! \\
a_1 &=& f^{(1)}(0)/1! \\
a_2 &=& f^{(2)}(0)/2! \\
a_3 &=& f^{(3)}(0)/3! \\
a_4 &=& f^{(4)}(0)/4!
\end{array}$$

E portanto:

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(0)}{0!}x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

Exercício 1.
A fórmula do slide anterior também funciona pra polinômios com grau menor que 4. Verifique o que ela faz quando

$$f(x) = 42x^2 + 99x + 200.$$

Lembre que no ensino médio você era obrigado a "simplificar" $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 999$ para 119880, mas em Cálculo 2 você tem que encontrar jeitos de escrever que sejam mais simples de ler e de verificar... pra gente em certos contextos $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 999$ é mais "simples" que 119880.

Exercício 2.

Tente aplicar a fórmula $(*)$ abaixo

$$f(x) \quad = \quad \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad\qquad (*)$$

a esta f aqui: $f(x) = 200x^5$.

a) O que acontece?

b) Tente escrever em detalhes o que dá errado.
Você vai precisar de notação matemática E português.
Tente aprender as convenções que eu usei nos PDFs
e as convenções que os livros usam, e lembre que se
você começar escrevendo uma igualdade qualquer leitor
que não seja muito seu amigo vai interpretá-la
como uma afirmação.

As operações derivs e derivs_0

Sejam derivs e derivs_0 as seguintes operações –
que vão nos ajudar muito nas contas:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{derivs}(f) &=& (f, f', f'', f''', \ldots) \\ \mathsf{derivs}_0(f) &=& (f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), \ldots) \end{array}$$

Repare que $\mathsf{derivs}(f)$ retorna uma sequência infinita de funções
e $\mathsf{derivs}_0(f)$ retorna uma sequência infinita de números.

Um exemplo: se $f(x) = ax^2 + bx + c$, então:

$$\begin{array}{rclcrcl} f(x) &=& ax^2 + bx + c, & \quad & f(0) &=& c, \\ f'(x) &=& 2ax + b, & & f'(0) &=& b, \\ f''(x) &=& 2a, & & f''(0) &=& 2a, \\ f'''(x) &=& 0, & & f'''(0) &=& 0, \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{derivs}(f) &=& (ax^2 + bx + c,\ 2ax + b,\ 2a,\ 0, 0, 0, \ldots) \\ \mathsf{derivs}_0(f) &=& (c, b, 2a, 0, 0, 0, \ldots) \end{array}$$

Algumas definições

Isto aqui

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

é a *série de Taylor da função f no ponto 0 truncada até grau n*, e isto aqui

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

ou:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

é a *série de Taylor da função f no ponto 0.*

Exercício 3.
Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$.

a) Calcule as 8 primeiras componentes de $\mathsf{derivs}(f)$.

b) Calcule as 8 primeiras componentes de $\mathsf{derivs}_0(f)$.

c) Calcule a série de Taylor de $\operatorname{sen} x$ truncada até grau 7.

d) Seja $g(x)$ a série de Taylor de $\operatorname{sen} x$ truncada até grau 7; Calcule $g(0.1)$ na mão e compare o seu resultado com o resultado de calcular $\operatorname{sen} 0.1$ na calculadora ou no computador.

Exercício 4.
Calcule $\mathsf{derivs}(f)$ e $\mathsf{derivs}_0(f)$ para cada uma das 'f's abaixo, até o grau pedido.

a) $f(x) = e^x$, até grau 4
b) $f(x) = e^{2x}$, até grau 4
c) $f(x) = e^{ix}$, até grau 8
d) $f(x) = \cos x$, até grau 8
e) $f(x) = \operatorname{sen} x$, até grau 8
f) $f(x) = i \operatorname{sen} x$, até grau 8
g) $f(x) = \cos x + i \operatorname{sen} x$, até grau 8

A notação com ‘$\approx$’

O sinal ‘$\approx$’ que dizer “é aproximadamente igual a”,
mas ele não diz quão boa é a aproximação...
Estas duas afirmações são ambas verdadeiras:

$$\begin{array}{rcl} f(0.42) & \approx & f(0) + f'(0) \cdot 0.42 + \frac{f''(0)}{2}(0.42)^2 \\ f(0.42) & \approx & f(0) + f'(0) \cdot 0.42 + \frac{f''(0)}{2}(0.42)^2 + \frac{f'''(0)}{6}(0.42)^3 \end{array}$$

Até dé pra formalizar essa igualdade aqui embaixo
usando um limite - veja a página 4 deste PDF:
https://people.math.sc.edu/girardi/m142/handouts/10sTaylorPolySeries.pdf

$$f(x) \quad = \quad f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

Mas eu não sei como formalizar precisamente
a versão com 0.42 no lugar do x...   =(

As versões truncadas de derivs, derivs_0 e derivs_p

Vamos definir derivs^n e derivs_0^n como as versões "truncadas até grau n" de derivs e derivs_0...

$\mathsf{derivs}^n(f)$ vai ser a lista com as primeiras $n+1$ entradas de $\mathsf{derivs}^n(f)$, e $\mathsf{derivs}_0^n(f)$ vai ser a lista com as primeiras $n+1$ entradas de $\mathsf{derivs}_0^n(f)$.

Além disso $\mathsf{derivs}_p(f)$ vai ser a lista infinita $(f(p), f'(p), f''(p), \ldots)$, e $\mathsf{derivs}_p^n(f)$ vai ser a lista com as primeiras $n+1$ entradas de $\mathsf{derivs}_p^n(f)$.

Exemplo:

$$\mathsf{derivs}_{42}^2(f) \quad = \quad (f(42), f'(42), f''(42)).$$

Vamos nos referir a $\mathsf{derivs}_p^n(f)$ como "as derivadas de f até grau n no ponto p". Repare que $f(42)$ é a "derivada de f de grau 0 no ponto 42", $f'(42)$ é a "derivada de f de grau 1 no ponto 42", etc...

Antes o termo "grau" não servia pra falar de número de vezes que uma função foi derivada, mas agora passou a servir. =)

Notação de físicos: introdução

Links:

https://people.math.sc.edu/girardi/m142/handouts/10sTaylorPolySeries.pdf
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-5.pdf (páginas 171–173)
https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf "Calculus Made Easy" (1914)
http://angg.twu.net/mathologer-calculus-easy.html
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C3-notacao-de-fisicos.pdf (p.5: linearizações)
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-notacao-de-fisicos.pdf
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=117

Na aula de 2022sep23 a gente usou os links acima
e eu escrevi um montão de coisas no quadro –
que eu vou digitar assim que der!!!

Exercício 5.

Leia a seção 4.7 do livro do Daniel Miranda:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=117

Os livros mais modernos:
i) distinguem dx e Δx,
ii) escrevem $y = f(x)$ ao invés de $y = y(x)$,
iii) evitam a convenção $x_1 = x_0 + \Delta x$.

a) Traduza o início da seção 4.7 do Miranda - até o fim da página 118 - pra notação do Thompson. Dicas:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \approx & f(p) + f'(p)(x-p) \\ L(x) & = & f(p) + f'(p)(x-p) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} f(x_1) & \approx & f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \\ L(x_1) & = & f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \end{array}$$

e a função L é exatamente a série de Taylor da função f truncada até grau 1... lembre que nós quase só vimos séries de Taylor no caso em que x_0 era 0, mas ficamos de ver depois o caso em que o "ponto base" não precisava mais ser 0...

Alguns truques de tradução

Truque 1: quando a gente escreve fórmulas "com o mesmo formato" perto uma da outra o leitor tende a ler a segunda ou como uma tradução da primeira pra outra notação ou como um caso particular da primeira...

Isto aqui é uma tradução de duas das fórmulas da p.117 do D. Miranda pra "notação de físicos":

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \approx & f(p) + f'(p)(x-p) \\ L(x) & = & f(p) + f'(p)(x-p) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} f(x_1) & \approx & f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \\ L(x_1) & = & f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \end{array}$$

E isto aqui é um caso particular da primeira fórmula:

$$f(4.02) \approx f(4) + f'(4)(4.02-4) \qquad (*)$$

Repare que a fórmula $(*)$ fica mais clara se escrevermos isto explicitamente:

$$x_1 = 4.02 \qquad x_0 = 4$$

...e repare que se a gente tentar escrever isto aqui direto

$$\sqrt{4.02} \approx \sqrt{4} + \sqrt{4}'(4.02-4)$$

fica confuso e péssimo — não existe uma notação padrão pra derivada de $\sqrt{x}$ em $x=4$!!! Aqui a gente TEM que usar um truque novo — a gente tem que dar um nome pra função $\sqrt{x}$. Por exemplo...

Alguns truques de tradução (2)

Seja $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$.
Então $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, e

$$\begin{array}{rrcl} & f(4.02) & \approx & f(4) + f'(4)(4.02-4) \\ \Rightarrow & \sqrt{4.02} & \approx & \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4.02-4) \end{array}$$

Repare que acima eu só fiz as subtituições $f(x) := \sqrt{x}$ e $f'(x) := \frac{1}{2\sqrt{x}}$ — eu acho que as contas mais mais fáceis de entender se a gente fizer as substituições e as simplificações em passos separados:

$$\begin{array}{rrcl} & f(4.02) & \approx & f(4) + f'(4)(4.02-4) \\ \Rightarrow & \sqrt{4.02} & \approx & \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4.02-4) \\ & & = & 2 + \frac{1}{4}(0.02) \\ & & = & 2 + 0.005 \\ & & = & 2.005 \\ & \sqrt{4.02} & = & 2.004993765576342\ldots \end{array}$$

A última linha acima tem um '$=$' ao invés de um '$\approx$', e eu calculei o resultado dela com a calculadora.

A tradução pra notação de físicos

Temos:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \tfrac{f''(0)}{2}x^2$$

Acho que vocês devem conseguir acreditar nisso aqui...
(a gente pode checar os detalhes depois!)

$$\begin{aligned} g(x_0 + \Delta x) &\approx g(x_0) + g'(x_0)\Delta x + \tfrac{g''(x_0)}{2}(\Delta x)^2 \\ h(x + \Delta x) &\approx h(x) + h'(x)\Delta x + \tfrac{h''(x)}{2}(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

E se $y = y(x)$ então:

$$\begin{aligned} y(x + \Delta x) &\approx y + y_x\Delta x + \tfrac{y_{xx}}{2}(\Delta x)^2 \\ y(x + \Delta x) &\approx y + y_x\Delta x + \tfrac{y_{xx}}{2}(\Delta x)^2 + \tfrac{y_{xxx}}{6}(\Delta x)^3 \end{aligned}$$

Exercício 5.

Digamos que $x_0 = 10$, $f(x) = x^3$, $y_0 = f(x_0)$, $g(y) = \operatorname{sen} y$.

a) Calcule $\mathsf{derivs}^1_{x_0}(f(x))$.

b) Calcule $\mathsf{derivs}^1_{y_0}(g(y))$.

c) Calcule $\mathsf{derivs}^1_{x_0}(g(f(x)))$.

Seja $h(x) = g(f(x))$ — ou seja, $h = g \circ f$.

d) Calcule $\mathsf{derivs}^2_{x_0}(h(x))$.

Exercício 6.
Este exercício é uma versão mais geral do exercício 4.
Digamos que f e g são funções suaves de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.
(Uma função é "suave" quando ela pode ser derivada infinitas vezes. A função $|x|$ não é suave).
Digamos que $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = f(x_0)$, e $h = g \circ f$.

a) Calcule $\mathsf{derivs}^2_{x_0}(h(x))$.

Repare que neste caso "calcule" quer dizer algo como "expanda e simplifique a expressão que você obtiver"...
Existem vários tipos de expansão e simplificação, e os programas de computação simbólica dão um nome pra cada tipo e permitem que você escolha quais vão ser aplicadas.

Exercício 7

Agora sejam $y = y(x) = f(x)$ e $z = z(y) = g(y)$.

b) Traduza o seu $\mathsf{derivs}^2_{x_0}(h(x))$ do item (a)
pra notação de físicos.

Dica (pequena): $\frac{d}{dx}g(f(x_0)) = z_y y_x$.

c) Calcule $\mathsf{derivs}^3_{x_0}(z)$ usando notação de físicos.

```
(%i1) load       ("~/MAXIMA/mkmatrix1.mac")$
(%i2) derivs    (maxn, f) := mklist   ([n,0,maxn],    diff(f, x, n))$
(%i3) derivs_h  (maxn, f) := mkhmatrix([n,0,maxn],    diff(f, x, n))$
(%i4) derivs_v  (maxn, f) := mkvmatrix([n,0,maxn],    diff(f, x, n))$
(%i5) derivs0   (maxn, f) := mklist   ([n,0,maxn], at(diff(f, x, n), x=0))$
(%i6) derivs0_h (maxn, f) := mkhmatrix([n,0,maxn], at(diff(f, x, n), x=0))$
(%i7) derivs0_v (maxn, f) := mkvmatrix([n,0,maxn], at(diff(f, x, n), x=0))$
(%i8) derivsx0  (maxn, f) := mklist   ([n,0,maxn], at(diff(f, x, n), x=x0))$
(%i9) derivsx0_h(maxn, f) := mkhmatrix([n,0,maxn], at(diff(f, x, n), x=x0))$
(%i10) derivsx0_v(maxn, f) := mkvmatrix([n,0,maxn], at(diff(f, x, n), x=x0))$

(%i11) derx           (k, f) :=    diff(f, x, k)$
(%i12) derxat0        (k, f) := at(diff(f, x, k), x=0)$
(%i13) derxatx0       (k, f) := at(diff(f, x, k), x=x0)$
(%i14) derxat0div     (k, f) := at(diff(f, x, k), x=0)  / k!$
(%i15) derxatx0div    (k, f) := at(diff(f, x, k), x=x0) / k!$
(%i16) derxat0divmul  (k, f) := at(diff(f, x, k), x=0)  / k! * x^k$
(%i17) derxatx0divmul (k, f) := at(diff(f, x, k), x=x0) / k! * (x-x0)^k$
(%i18) at0reconstruct (n, f) := sum(derxat0divmul (k, f), k,0,n)$
(%i19) atx0reconstruct(n, f) := sum(derxatx0divmul(k, f), k,0,n)$

(%i20)
       derivs   (5, f(x));
(%o20)
```

$$\left[f(x), \frac{d}{d\,x} f(x), \frac{d^2}{d\,x^2} f(x), \frac{d^3}{d\,x^3} f(x), \frac{d^4}{d\,x^4} f(x), \frac{d^5}{d\,x^5} f(x)\right]$$

```
(%i21) derivs_h (5, f(x));
(%o21)
```

$$\begin{pmatrix} f(x) & \frac{d}{d\,x} f(x) & \frac{d^2}{d\,x^2} f(x) & \frac{d^3}{d\,x^3} f(x) & \frac{d^4}{d\,x^4} f(x) & \frac{d^5}{d\,x^5} f(x) \end{pmatrix}$$

```
(%i22) derivs_h (5, sin(x));
(%o22)
```

$$\begin{pmatrix} \sin x & \cos x & -\sin x & -\cos x & \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

```
(%i23) derivs0_h(5, sin(x));
(%o23)
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i24)
       derivs_v (5, f(x));
(%o24)
```

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ \frac{d}{d\,x} f(x) \\ \frac{d^2}{d\,x^2} f(x) \\ \frac{d^3}{d\,x^3} f(x) \\ \frac{d^4}{d\,x^4} f(x) \\ \frac{d^5}{d\,x^5} f(x) \end{pmatrix}$$

```
(%i25) p(x) := a + b*x + c*x^2 + d*x^3 + e*x^4;
(%o25)
```

$$p(x) := a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3 + e\,x^4$$

```
(%i26) derx          (3, p(x));
(%o26)
```

$$24\,e\,x + 6\,d$$

```
(%i27) derxat0       (3, p(x));
(%o27)
```

$$6\,d$$

```
(%i28) derxat0div    (3, p(x));
(%o28)
```

$$d$$

```
(%i29) derxat0divmul (3, p(x));
(%o29)
```

$$d\,x^3$$

```
(%i30) derxat0divmul (4, p(x));
(%o30)
```

$$e\,x^4$$

```
(%i31)       at0reconstruct(4, p(x));
(%o31)
```

$$e\,x^4 + d\,x^3 + c\,x^2 + b\,x + a$$

```
(%i32)       at0reconstruct(3, p(x));
(%o32)
```

$$d\,x^3 + c\,x^2 + b\,x + a$$

```
(%i33) p(x) - at0reconstruct(3, p(x));
(%o33)
```

$$e\,x^4$$

```
(%i34)
       at0reconstruct(7, sin(x));
(%o34)
```

$$-\left(\frac{x^7}{5040}\right) + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x$$

```
(%i35) q(x) := a + b*(x-x0) + c*(x-x0)^2 + d*(x-x0)^3 + e*(x-x0)^4;
```

(%o35)

$$q(x) := a + b\,(x - \mathrm{x0}) + c\,(x - \mathrm{x0})^2 + d\,(x - \mathrm{x0})^3 + e\,(x - \mathrm{x0})^4$$

```
(%i36) derivs_v  (5, q(x));
```

(%o36)

$$\begin{pmatrix} b\,(x - \mathrm{x0}) + e\,(x - \mathrm{x0})^4 + d\,(x - \mathrm{x0})^3 + c\,(x - \mathrm{x0})^2 + a \\ 2\,c\,(x - \mathrm{x0}) + 4\,e\,(x - \mathrm{x0})^3 + 3\,d\,(x - \mathrm{x0})^2 + b \\ 6\,d\,(x - \mathrm{x0}) + 12\,e\,(x - \mathrm{x0})^2 + 2\,c \\ 24\,e\,(x - \mathrm{x0}) + 6\,d \\ 24\,e \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i37) derivsx0_v(5, q(x));
```

(%o37)

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 2\,c \\ 6\,d \\ 24\,e \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i38)        atx0reconstruct(4, q(x));
```

(%o38)

$$b\,(x - \mathrm{x0}) + e\,(x - \mathrm{x0})^4 + d\,(x - \mathrm{x0})^3 + c\,(x - \mathrm{x0})^2 + a$$

```
(%i39)        atx0reconstruct(3, q(x));
```

(%o39)

$$b\,(x - \mathrm{x0}) + d\,(x - \mathrm{x0})^3 + c\,(x - \mathrm{x0})^2 + a$$

```
(%i40) q(x) - atx0reconstruct(3, q(x));
```

(%o40)

$$e\,(x - \mathrm{x0})^4$$

```
(%i1) load("~/MAXIMA/mkmatrix1.mac")$
(%i2) mkhmatrix([x,2,5],    x);
```

(%o2)
$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$$

```
(%i3) mkvmatrix([y,2,5],    y);
```

(%o3)
$$\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$$

```
(%i4) mkvmatrix([y,5,2,-1], y);
```

(%o4)
$$\begin{pmatrix}5\\4\\3\\2\end{pmatrix}$$

```
(%i5) mkmatrix ([x,0,2], [y,5,4,-1], [x,y]);
```

(%o5)
$$\begin{pmatrix}[0,5] & [1,5] & [2,5]\\ [0,4] & [1,4] & [2,4]\end{pmatrix}$$

```
(%i6) diffxnyn(f, xn, yn) := diff(diff(f, x, xn), y, yn)$
(%i7) mkmatrix([xn,0,4], [yn,3,0,-1], [xn,yn]);
```

(%o7)
$$\begin{pmatrix}[0,3] & [1,3] & [2,3] & [3,3] & [4,3]\\ [0,2] & [1,2] & [2,2] & [3,2] & [4,2]\\ [0,1] & [1,1] & [2,1] & [3,1] & [4,1]\\ [0,0] & [1,0] & [2,0] & [3,0] & [4,0]\end{pmatrix}$$

```
(%i8) mkmatrix([xn,0,2], [yn,2,0,-1],    diffxnyn(F(x,y),  xn, yn));
```

(%o8)
$$\begin{pmatrix}\frac{d^2}{d\,y^2}\,F(x,y) & \frac{d^3}{d\,x\,d\,y^2}\,F(x,y) & \frac{d^4}{d\,x^2\,d\,y^2}\,F(x,y)\\ \frac{d}{d\,y}\,F(x,y) & \frac{d^2}{d\,x\,d\,y}\,F(x,y) & \frac{d^3}{d\,x^2\,d\,y}\,F(x,y)\\ F(x,y) & \frac{d}{d\,x}\,F(x,y) & \frac{d^2}{d\,x^2}\,F(x,y)\end{pmatrix}$$

```
(%i9) mkmatrix([xn,0,3], [yn,3,0,-1],    diffxnyn(x^2*y^2, xn, yn));
```

(%o9)
$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 2\,x^2 & 4\,x & 4 & 0\\ 2\,x^2\,y & 4\,x\,y & 4\,y & 0\\ x^2\,y^2 & 2\,x\,y^2 & 2\,y^2 & 0\end{pmatrix}$$

```
(%i10) mkmatrix([xn,0,3], [yn,3,0,-1], at(diffxnyn(x^2*y^2, xn, yn), [x=0,y=0]));
```

(%o10)
$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

```
(%i11) mkmatrix([xn,0,3], [yn,3,0,-1],    diffxnyn((x-x0)^2*(y-y0)^2, xn, yn));
```

(%o11)
$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 2\,(x-\mathrm{x0})^2 & 4\,(x-\mathrm{x0}) & 4 & 0\\ 2\,(x-\mathrm{x0})^2\,(y-\mathrm{y0}) & 4\,(x-\mathrm{x0})\,(y-\mathrm{y0}) & 4\,(y-\mathrm{y0}) & 0\\ (x-\mathrm{x0})^2\,(y-\mathrm{y0})^2 & 2\,(x-\mathrm{x0})\,(y-\mathrm{y0})^2 & 2\,(y-\mathrm{y0})^2 & 0\end{pmatrix}$$

```
(%i12) mkmatrix([xn,0,3], [yn,3,0,-1], at(diffxnyn((x-x0)^2*(y-y0)^2, xn, yn), [x=x0,y=y0]));
```

(%o12)
$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

```
(%i13)
       aroundx0y0(expr) ::= mkmatrix0([x,2,4], [y,3,1,-1], expr);
```

(%o13)
$$\mathrm{aroundx0y0}\,(\mathrm{expr}) ::= \mathrm{mkmatrix0}\,([x,2,4],[y,3,1,-1],\mathrm{expr})$$

```
(%i14) aroundx0y0([x,y]);
```

(%o14)
$$\begin{pmatrix}[2,3] & [3,3] & [4,3]\\ [2,2] & [3,2] & [4,2]\\ [2,1] & [3,1] & [4,1]\end{pmatrix}$$

```
(%i15)
       [x0,y0] : [3, 2];
```

(%o15)
$$[3,2]$$

```
(%i16) [Dx,Dy] : [x-x0, y-y0];
```

(%o16)
$$[x-3,y-2]$$

```
(%i17) aroundx0y0(ev(Dx));
```

(%o17)
$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

```
(%i18)
       mkmatrix([x,0,4], [y,3,0,-1], [x,y]);
```

(%o18)
$$\begin{pmatrix}[0,3] & [1,3] & [2,3] & [3,3] & [4,3]\\ [0,2] & [1,2] & [2,2] & [3,2] & [4,2]\\ [0,1] & [1,1] & [2,1] & [3,1] & [4,1]\\ [0,0] & [1,0] & [2,0] & [3,0] & [4,0]\end{pmatrix}$$

```
(%i19) mkmatrix([x,2,4], [y,3,1,-1], [x,y]);
```

(%o19)
$$\begin{pmatrix}[2,3] & [3,3] & [4,3]\\ [2,2] & [3,2] & [4,2]\\ [2,1] & [3,1] & [4,1]\end{pmatrix}$$

```
(%i20) aroundx0y0(ev([x,y]));
```

(%o20)
$$\begin{pmatrix}[2,3] & [3,3] & [4,3]\\ [2,2] & [3,2] & [4,2]\\ [2,1] & [3,1] & [4,1]\end{pmatrix}$$

```
(%i21) aroundx0y0(ev(Dx^2));
(%o21)
```

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

```
(%i22) aroundx0y0(ev(Dy^2));
(%o22)
```

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

```
(%i23) aroundx0y0(ev(Dx^2+Dy^2));
(%o23)
```

$$\begin{pmatrix}2&1&2\\1&0&1\\2&1&2\end{pmatrix}$$

```
(%i24) aroundx0y0(ev(Dx^2-Dy^2));
(%o24)
```

$$\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

```
(%i25) aroundx0y0(ev(Dx*Dy));
(%o25)
```

$$\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

```
(%i26) aroundx0y0(ev(2+Dx^2));
(%o26)
```

$$\begin{pmatrix}3&2&3\\3&2&3\\3&2&3\end{pmatrix}$$

```
(%i27) aroundx0y0(ev(2+Dy^2));
(%o27)
```

$$\begin{pmatrix}3&3&3\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$$

```
(%i28) aroundx0y0(ev(2+Dx^2+Dy^2));
(%o28)
```

$$\begin{pmatrix}4&3&4\\3&2&3\\4&3&4\end{pmatrix}$$

```
(%i29) aroundx0y0(ev(2+Dx^2-Dy^2));
(%o29)
```

$$\begin{pmatrix}2&1&2\\3&2&3\\2&1&2\end{pmatrix}$$

```
(%i30) aroundx0y0(ev(2+Dx*Dy));
(%o30)
```

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&2\\3&2&1\end{pmatrix}$$

Cálculo 3 - 2024.1

Aula 20: exercícios sobre pontos críticos

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C3.html

Links

StewPtCap14p55 (p.841) O vetor gradiente
StewPtCap14p65 (p.851) Teste da segunda derivada
StewPtCap14p70 (p.856) 14.7 Exercícios (vamos fazer o 10)

3fT85 2022.2: P1, gabarito da questão 2

```
http://anggtwu.net/e/maxima.e.html#2024.1-stewart-p856-ex10
http://anggtwu.net/MAXIMA/myqdraw1.mac.html
(find-es "maxima" "2024.1-stewart-p856-ex10")
(find-angg "MAXIMA/myqdraw1.mac")
```

Stewart, p.856, exercício 10

```
(%i1) F   : x*y * (1-x*y);
(%o1)
```

$$x\,y\,(1-x\,y)$$

```
(%i2) F   : x*y * (1-x-y);
(%o2)
```

$$x\,(-y-x+1)\,y$$

```
(%i3) Fx  : diff(F, x);
(%o3)
```

$$(-y-x+1)\,y-x\,y$$

```
(%i4) Fy  : diff(F, y);
(%o4)
```

$$x\,(-y-x+1)-x\,y$$

```
(%i5) Fxx : diff(Fx, x);
(%o5)
```

$$-(2\,y)$$

```
(%i6) Fxy : diff(Fx, y);
(%o6)
```

$$-(2\,y)-2\,x+1$$

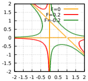
```
(%i7) Fyy : diff(Fy, y);
(%o7)
```

$$-(2\,x)$$

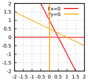
```
(%i8) [xmin,ymin,xmax,ymax] : [-2,-2,2,2];
(%o8)
```

$$[-2,-2,2,2]$$

```
(%i9) mylevel(eq,[opts]) :=
        apply('imp1, append([eq, x,xmin,xmax, y,ymin,ymax], opts))$
(%i10) myQdraw("Stewart-p856-exerc10-F",      "height=2.5cm",
              mylevel(F=0,    lk("F=0"),    lc(orange)),
              mylevel(F=0.2,  lk("F=0.2"),  lc(red)),
              mylevel(F=-0.2, lk("F=-0.2"), lc(forest_green))
             );
(%o10)
```




```
(%i11) myQdraw("Stewart-p856-exerc10-Fx-Fy", "height=2.5cm",
              mylevel(Fx=0,   lk("Fx=0"),   lc(red)),
              mylevel(Fy=0,   lk("Fy=0"),   lc(orange))
             );
(%o11)
```



```
(%i12) pontoscriticos : solve([Fx=0, Fy=0], [x,y]);
```

(%o12)

$$\left[[x=0,y=0],[x=0,y=1],[x=1,y=0],\left[x=\frac{1}{3},y=\frac{1}{3}\right]\right]$$

```
(%i13) [P1,P2,P3,P4] : pontoscriticos;
```

(%o13)

$$\left[[x=0,y=0],[x=0,y=1],[x=1,y=0],\left[x=\frac{1}{3},y=\frac{1}{3}\right]\right]$$

```
(%i14) at([Fxx,Fxy,Fyy], P1);
```

(%o14)

$$[0,1,0]$$

```
(%i15) at([Fxx,Fxy,Fyy], P2);
```

(%o15)

$$[-2,-1,0]$$

```
(%i16) at([Fxx,Fxy,Fyy], P3);
```

(%o16)

$$[0,-1,-2]$$

```
(%i17) at([Fxx,Fxy,Fyy], P4);
```

(%o17)

$$\left[-\left(\frac{2}{3}\right),-\left(\frac{1}{3}\right),-\left(\frac{2}{3}\right)\right]$$

```
(%i18)
```

Cálculo 3 - 2024.1

Aula 21: A diferencial total

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C3.html

Links

StewPtCap14p5 (p.791) 14 Derivadas Parciais
StewPtCap14p25 (p.811) 14.3 Derivadas Parciais
StewPtCap14p37 (p.823) 14.4 Planos Tangentes e Aproximações
StewPtCap14p41 (p.827) a diferencial dz ... diferenciação total
StewPtCap14p45 (p.831) 14.5 A regra da cadeia

3iQ45 Quadros da aula de 29/jul/2024

```
http://anggtwu.net/e/maxima.e.html#2024.1-depends
http://anggtwu.net/e/maxima.e.html#2024.1-gradefs
(find-es "maxima" "2024.1-depends")
(find-es "maxima" "2024.1-gradefs")
```

Depends

```
(%i1) y : x^2;
(%o1)
```
$$x^2$$

```
(%i2) z : sin(y);
(%o2)
```
$$\sin x^2$$

```
(%i3) diff(z, x);
(%o3)
```
$$2\,x\,\cos x^2$$

```
(%i4) diff(z, x, 2);
(%o4)
```
$$2\,\cos x^2 - 4\,x^2\,\sin x^2$$

```
(%i5) values;
(%o5)
```
$$[y, z]$$

```
(%i6)
      remvalue(all);
(%o6)
```
$$[y, z]$$

```
(%i7) values;
(%o7)
```
$$[]$$

```
(%i8) diff(y, x);
(%o8)
```
$$0$$

```
(%i9) depends(y, x);
(%o9)
```
$$[y\,(x)]$$

```
(%i10) depends(z, y);
(%o10)
```
$$[z\,(y)]$$

```
(%i11) dependencies;
(%o11)
```
$$[y\,(x)\,, z\,(y)]$$

```
(%i12) diff(y, x);
(%o12)
```
$$\frac{d}{d\,x}\,y$$

```
(%i13) diff(z, x);
(%o13)
```
$$\frac{d}{d\,x}\,y\,\left(\frac{d}{d\,y}\,z\right)$$

```
(%i14) diff(z, x, 2);
(%o14)
```
$$\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,z\right) + \frac{d^2}{d\,x^2}\,y\,\left(\frac{d}{d\,y}\,z\right)$$

```
(%i15) o1 : diff(z, x);
(%o15)
```
$$\frac{d}{d\,x}\,y\,\left(\frac{d}{d\,y}\,z\right)$$

```
(%i16) o2 : diff(z, x, 2);
(%o16)
```
$$\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,z\right) + \frac{d^2}{d\,x^2}\,y\,\left(\frac{d}{d\,y}\,z\right)$$

```
(%i17) o3 : at(o1, [z=sin(y), y=x^2]);
(%o17)
```
$$\frac{d}{d\,x}\,x^2\,\left(\left.\frac{d}{d\,y}\,\sin y\right|_{y=x^2}\right)$$

```
(%i18) o4 : at(o2, [z=sin(y), y=x^2]);
(%o18)
```
$$\left(\frac{d}{d\,x}\,x^2\right)^2\,\left(\left.\frac{d^2}{d\,y^2}\,\sin y\right|_{y=x^2}\right) + \frac{d^2}{d\,x^2}\,x^2\,\left(\left.\frac{d}{d\,y}\,\sin y\right|_{y=x^2}\right)$$

```
(%i19) o5 : ev(o3, 'derivative, 'at);
(%o19)
```
$$2\,x\,\cos x^2$$

```
(%i20) o6 : ev(o4, 'derivative, 'at);
(%o20)
```
$$2\,\cos x^2 - 4\,x^2\,\sin x^2$$

```
(%i21)
```

Gradefs

```
(%i1) diff  (sin(x), x);
(%o1)
```

$$\cos x$$

```
(%i2) gradef(sin(x), sqrt(1-sin(x)^2));
(%o2)
```

$$\sin x$$

```
(%i3) diff  (sin(x), x);
(%o3)
```

$$\sqrt{1-(\sin x)^2}$$

```
(%i4)  texput(y_x,  "y_x")$
(%i5)  texput(z_y,  "z_y")$
(%i6)  texput(y_xx, "y_{xx}")$
(%i7)  texput(z_yy, "z_{yy}")$
(%i8)  gradef(y,x,   y_x)$
(%i9)  gradef(z,y,   z_y)$
(%i10) gradef(y_x,x, y_xx)$
(%i11) gradef(z_y,y, z_yy)$
```

```
(%i12) diff(y, x);
(%o12)
```

$$y_x$$

```
(%i13) diff(z, x);
(%o13)
```

$$y_x\, z_y$$

```
(%i14) diff(z, x, 2);
(%o14)
```

$$y_x^2\, z_{yy} + y_{xx}\, z_y$$

```
(%i15) o1 : diff(y);
(%o15)
```

$$y_x\, dx$$

```
(%i16) o2 : diff(z);
(%o16)
```

$$z_y\, dy$$

```
(%i17) o3 : subst([del(y)=diff(y)], o2);
(%o17)
```

$$y_x\, z_y\, dx$$

```
(%i18)
```

Cálculo 3 - 2024.1

Aula 25: abertos e fechados em $\mathbb{R}^2$

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2024.1-C3.html

Links

3hT150 (2023.2) Versão anterior destes slides

Bort4p1 (p.121) 4 Continuidade, noções de topologia e o teorema de Weierstrass
Bort4p1 (p.121) 4.1 Porque funções contínuas são importantes?
Bort4p9 (p.129) 4.3 O teorema de Weierstrass no caso com n variáveis
Bort4p19 (p.139) Distância euclidiana
Bort4p22 (p.142) definição de bola aberta
Bort4p28 (p.148) definição de conjunto aberto

Introdução

Dê uma olhada no capítulo 4 do Bortolossi...
Comece pela seção 4.1, "Por que funções contínuas são importantes", depois leia a seção 4.3, sobre o Teorema de Weirstrass em n variáveis, e relembre a definição de distância euclidiana na p.139.

Nós vamos começar entendendo as definições das páginas 142 até 148, e vamos reescrevê-las de um jeito bem mais curto.

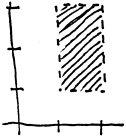
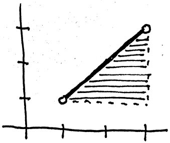
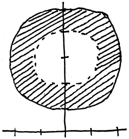
Nós vamos ver como fazer hipóteses sobre os exercícios dos próximos dois slides, como testar essas hipóteses, e como descartar as hipóteses erradas.

Nove subconjuntos de $\mathbb{R}^2$

(Compare com a p.130 do Bortolossi...)

Sejam:

$$
\begin{array}{rcl}
C_1 & = & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < y \leq 3\,\}, \\
C_2 & = & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < y \leq 3 \;\text{ e }\; 1 \leq x < 4\,\}, \\
C_3 & = & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(1,2)) \leq 2\,\}, \\
C_4 & = & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < d((x,y),(1,2)) \leq 2\,\}, \\
C_5 & = & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(1,2)) \leq 2 \;\text{ e }\; 1 < x\,\}, \\
C_6 & = & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x\,\},
\end{array}
$$

$C_7 =$  , $C_8 =$  , $C_9 =$  .

Exercício 1.
Represente graficamente os conjuntos $C_1, \ldots, C_6$.

Exercício 2.
Represente os conjuntos C_7, C_8, C_9
em "notação de conjuntos" — isto é,
na forma $\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ldots \,\}$.

Bolas abertas e fechadas
Se P é um ponto de $\mathbb{R}^n$ então a
bola fechada de raio ε em torno de P, $\overline{\mathsf{B}}_\varepsilon(P)$, e a
bola aberta de raio ε em torno de P, $\mathsf{B}_\varepsilon(P)$,
são definidas assim:

$$\begin{array}{rcl}
\overline{\mathsf{B}}_\varepsilon(P) & = & \{\, Q \in \mathbb{R}^n \mid d(P,Q) \le \varepsilon \,\} \\
\mathsf{B}_\varepsilon(P) & = & \{\, Q \in \mathbb{R}^n \mid d(P,Q) < \varepsilon \,\}
\end{array}$$

Por exemplo, se $P = 6 \in \mathbb{R}^1$ então:

$$\begin{array}{rcl}
\overline{\mathsf{B}}_2(6) & = & \{\, Q \in \mathbb{R}^1 \mid d(6,Q) \le 2 \,\} \\
 & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid d(6,x) \le 2 \,\} \\
 & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(6-x)^2} \le 2 \,\} \\
 & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid |x-6| \le 2 \,\} \\
 & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid -2 \le x-6 \le 2 \,\} \\
 & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid -2+6 \le x \le 2+6 \,\} \\
 & = & [4,8]
\end{array}$$

Exercício 3.
Represente graficamente:

a) $\overline{\mathsf{B}}_1((2,2))$,
b) $\mathsf{B}_1((2,2))$.

Dica: estes conjuntos vão parecer muito mais com "bolas de verdade" do que o conjunto $\overline{\mathsf{B}}_2(6)$ do slide anterior.

Lembre que a gente desenha a fronteira de um conjunto tracejada quando a gente quer indicar que os pontos da fronteira não pertencem ao conjunto e a gente desenha ela sólida quando quer indicar que os pontos dela pertencem ao conjunto. Veja os desenhos dos conjuntos C_8 e C_9.

Exercício 4.
Aqui você vai ter que ser capaz de visualizar bolas sobrepostas a conjuntos que você já desenhou sem desenhar estas bolas.
Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.

a) $\mathsf{B}_{0.1}((0,2.5)) \subseteq C_1$
b) $\mathsf{B}_{0.5}((0,2.5)) \subseteq C_1$
c) $\overline{\mathsf{B}}_{0.5}((0,2.5)) \subseteq C_1$
d) $\mathsf{B}_{0.1}((1,3)) \subseteq C_2$
e) $\mathsf{B}_{0.1}((2.5,2.5)) \subseteq C_2$
f) $\mathsf{B}_{1}((2,2)) \subseteq C_3$
g) $\overline{\mathsf{B}}_{1}((2,2)) \subseteq C_3$
h) $\mathsf{B}_{0.5}((1,0.5)) \subseteq C_4$
i) $\mathsf{B}_{0.1}((0.5,2)) \subseteq C_5$
j) $\mathsf{B}_{0.001}((1.1,1.01)) \subseteq C_8$

O interior de um conjunto (e conjuntos abertos)

Def: o *interior* de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Int}(A)$, é definido como:

$$\mathrm{Int}(A) \quad = \quad \{\, P \in A \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq A \,\}.$$

Note que isto sempre é verdade: $\mathrm{Int}(A) \subset A$.
Dizemos que um conjunto A é *aberto* quando $A \subset \mathrm{Int}(A)$.

Infinitas operações / seja com o Bob

Pra entender a definição de interior e as próximas você vai precisar fazer um número infinito de operações pra chegar no resultado, e pra isso você vai ter que usar algumas técnicas que nós vimos em Cálculo 2 no semestre passado. Os links abaixo vão pras versões deste semestre do material sobre essas técnicas, que ficou bem melhor do que o do semestre passado.

Veja este PDF, a partir da página 11 dele:
`http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-somas-de-riemann.pdf`

e relembre as definições de inf e sup daqui:
`http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-TFC1-e-TFC2.pdf`

Exercício 5.
Seja $A = [2,4] \subset \mathbb{R}^1$.
Verifique que A não é aberto usando
a definição do slide anterior.
Dica: como $A = [2,4]$, dá pra começar por:

$$\begin{array}{rrcl} & A & & \text{não é aberto} \\ \Leftrightarrow & A & \not\subseteq & \mathrm{Int}(A) \\ \Leftrightarrow & A & \not\subseteq & \{\, P \in A \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq A \,\} \\ \Leftrightarrow & [2,4] & \not\subseteq & \{\, P \in [2,4] \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq [2,4] \,\} \end{array}$$

Pros passos seguintes você vai precisar usar
muitas das "traduções" dos próximos dois slides.

Algumas traduções

$$\begin{array}{rcl}
A \subset B & = & \forall a \in A. a \in B \\
A = B & = & (A \subset B) \land (B \subset A) \\
\neg(P \land Q) & = & \neg P \lor \neg Q \\
\neg(P \lor Q) & = & \neg P \land \neg Q \\
\neg(\forall a \in A. P(a)) & = & \exists a \in A. \neg P(a) \\
\neg(\exists a \in A. P(a)) & = & \forall a \in A. \neg P(a) \\
x \in \{\, a \in A \mid P(a) \,\} & = & x \in A \land P(x) \\
\neg(P \to Q) & = & P \land \neg Q \\
[20, 42) & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid 20 \leq x < 42 \,\} \\
20 \leq x < 42 & = & 20 \leq x \land x < 42
\end{array}$$

Lembre que ‘$\land$’ é “e”, ‘$\lor$’ é “ou”, ‘$\neg$’ é “não”, ‘$\to$’ é “implica”.

Alguns exemplos de traduções

$$\begin{array}{rl}
& [a,b] \subset [20,42) \\
= & \forall x \in [a,b].x \in [20,42) \\
= & \forall x \in [a,b].20 \leq x < 42 \\
= & \forall x \in \mathbb{R}.x \in [a,b] \to 20 \leq x < 42 \\
= & \forall x \in \mathbb{R}.a \leq x \leq b \to 20 \leq x < 42
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
& \neg([a,b] \subset [20,42)) \\
= & \neg(\forall x \in \mathbb{R}.a \leq x \leq b \to 20 \leq x < 42) \\
= & \exists x \in \mathbb{R}.\neg(a \leq x \leq b \to 20 \leq x < 42) \\
= & \exists x \in \mathbb{R}.\neg(a \leq x \leq b) \land (20 \leq x < 42) \\
= & \exists x \in \mathbb{R}.\neg(a \leq x \land x \leq b) \land (20 \leq x < 42) \\
= & \exists x \in \mathbb{R}.(\neg(a \leq x) \lor \neg(x \leq b)) \land (20 \leq x < 42) \\
= & \exists x \in \mathbb{R}.(x < a \lor b < x) \land (20 \leq x < 42)
\end{array}$$

Exercício 6.

Represente graficamente:

a) $\mathrm{Int}(C_8)$,
b) $\mathrm{Int}(C_4)$,
c) $\mathrm{Int}(C_5)$,
d) $\mathrm{Int}(\mathsf{B}_1((2,2)))$.

O fecho de um conjunto (e conjuntos fechados)
Def: o *fecho* de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$, $\overline{A}$,
é definido como:

$$\overline{A} \quad = \quad \{\, P \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \cap A \neq \emptyset \,\}$$

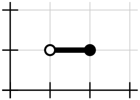
Compare com a definição do interior:

$$\mathrm{Int}(A) \quad = \quad \{\, P \in A \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq A \,\}.$$

Isto aqui sempre é verdade: $A \subset \overline{A}$.
Quando $\overline{A} \subset A$ dizemos que A é um conjunto *fechado*.

Exercício 7.

Digamos que:

$D_1 \quad =$ 

Represente graficamente:

a) $\overline{C_8}$

b) $\overline{D_1}$

c) $\mathrm{Int}(D_1)$

Um aviso sobre a P2 (de 2021.2)

Em quase todos os problemas deste PDF é muito mais fácil mostrar que uma resposta está errada do que mostrar que ela está certa... e o método pra mostrar que uma resposta está errada vai ser um dos assuntos principais da P2.

Imagem inversa

Algumas das igualdades abaixo são definições, as outras são exemplos.

$$\begin{array}{rcl}
H(x,y) & = & xy \\
H_I & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)\in I\,\} \\
H_{[a,b]} & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)\in [a,b]\,\} \\
H_{[0,1]} & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)\in [0,1]\,\} \\
H^{-1}(a) & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)=a\,\} \\
H^{-1}(I) & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)\in I\,\} \\
H^{-1}([0,1]) & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)\in [0,1]\,\} \\
 & = & H_{[0,1]}
\end{array}$$

Exercício 8.
Represente graficamente:

$$\begin{array}{rcl}
C_1 & = & H^{-1}(0) \\
C_2 & = & H^{-1}(1) \\
C_3 & = & H^{-1}([0,1]) \\
C_4 & = & H^{-1}((0,1)) \\
C_5 & = & \mathrm{Int}(C_3) \\
C_6 & = & \overline{C_4} \\
C_7 & = & H^{-1}(4) \\
C_8 & = & H^{-1}([0,4]) \\
C_9 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x \text{ e } 1\le y\,\} \\
C_{10} & = & C_8\cap C_9
\end{array}$$

Conjuntos limitados e compactos
Um conjunto $C\in\mathbb{R}^2$ é *limitado* quando ele obedece isto:

$$\exists r\in\mathbb{R}.\, C\subset B_r((0,0))$$

.
Um conjunto $C\in\mathbb{R}^2$ é *compacto* quando ele é fechado e limitado.

Exercício 9.
Preencha a tabela abaixo com '**V**'s e '**F**'s.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_{10}
é aberto									
é fechado									
é limitado									
é compacto									

Máximos numa elipse

Dê uma olhada nas figuras das páginas 355 e 356 do Bortolossi, no capítulo 10 dele:
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-10.pdf#page=5
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-10.pdf#page=6
Ele usa:

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & x^2+y^2 \\ g(x,y) & = & \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \\ D_2 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)\le 1\,\} \\ D_3 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)=1\,\} \end{array}$$

D_2 é uma elipse "cheia" incluindo o interior dela, e
D_3 é só a fronteira de D_2.
Note que $(-2,0),(2,0),(0,3),(0,-3)\in D_3$.

Exercício 10.
a) Desenhe algumas curvas de nível de $f(x,y)$.

b) Na página 354 o Bortolossi desenha curvas de nível dentro de um quadrado. Desenhe algumas curvas de nível de $f(x,y)$ dentro da "elipse cheia" D_2.

c) Tente descobrir *no olhômetro* quais são os máximos e mínimos de $f(x,y)$ em D_2. Dica: o Bortolossi leva várias páginas fazendo isso — leia o texto dele!

Dica: o objetivo do item (c) é você aprender a resolver só com curvas de nível as idéias que o Bortolossi apresenta usando figuras em 3D. Se você não conseguir fazer a tradução das figuras 3D pra curvas de nível direto você pode começar desenhando "cortes" sobre as figuras 3D, como na questão do mini-teste 1 de 2020.2:
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-tudo.pdf#page=83

...e repare que quando o Bortolossi chega no capítulo 12 ele passa a usar quase só curvas de nível e gradientes — ele praticamente abandona as figuras 3D:
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-12.pdf

Cálculo 3 - 2024.1

P1 (primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C3.html

Links

http://anggtwu.net/LATEX/2024-1-C3-dicas-pra-P1.pdf

Questão 1

(Total: 4.0 pts)
O diagrama de numerozinhos da última folha da prova corresponde a uma superfície $z = F(x,y)$ que tem 6 faces. Também é possível interpretá-lo como uma superfície com 7 ou mais faces, mas vamos considerar que a superfície com só 6 faces é que é a correta.

a) **(1.0 pts)** Mostre como dividir o plano em 6 polígonos que são as projeções destas faces no plano do papel.

b) **(0.5 pts)** Chame estas faces de face N ("norte"), S ("sul"), W ("oeste"), E ("leste"), CN ("centro-norte") e CS ("centro-sul"), e chame as equações dos planos delas de $F_N(x,y)$, $F_S(x,y)$, $F_W(x,y)$, $F_E(x,y)$, $F_{CN}(x,y)$, e $F_{CS}(x,y)$. Dê as equações destes planos.

c) **(0.5 pts)** Sejam:

$$\begin{array}{rcl} P_{CN} & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F_{CN}(x,y)\,\}, \\ P_{CS} & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F_{CS}(x,y)\,\}, \\ r & = & P_{CN} \cap P_{CS}. \end{array}$$

Represente a reta r graficamente como numerozinhos.

d) **(0.5 pts)** Dê uma parametrização para a reta do item anterior. Use notação de conjuntos.

e) **(0.5 pts)** Seja

$$A = \{0,1,\ldots,7\} \times \{0,1,\ldots,10\};$$

note que os numerozinhos do diagrama de numerozinhos estão todos sobre pontos de A. Para cada ponto $(x,y) \in A$ represente graficamente $(x,y) + \frac{1}{3}\vec{\nabla}F(x,y)$.

Obs: quando $\vec{\nabla}F(x,y) = 0$ desenhe uma bolinha preta sobre o ponto (x,y), e quando $\vec{\nabla}F(x,y)$ não existir faça um '×' sobre o numerozinho que está no ponto (x,y).

f) **(1.0 pts)** Sejam

$$\begin{array}{rcl} Q(t) & = & (0,3) + t\overrightarrow{(1,1)}, \\ (x(t),y(t)) & = & Q(t), \\ h(t) & = & F(x(t),y(t)). \end{array}$$

Faça o gráfico da função $h(t)$. Considere que o domínio dela é o intervalo $[0,7]$.

Questão 2
(Total: 2.5 pts)
Sejam

$$\begin{aligned} F(x,y) &= x^2 + xy - 2y^2, \\ A &= \{-2,-1,0,1,2\}, \\ B &= A \times A. \end{aligned}$$

a) **(0.2 pts)** Faça o diagrama de numerozinhos da função $F(x,y)$. Desenhe um numerozinho para cada $(x,y) \in B$.

b) **(0.8 pts)** Desenhe o "campo gradiente" da função F nestes pontos, mas multiplicando cada $\vec{\nabla} F(x,y)$ por $\frac{1}{10}$ pros vetores não ficarem uns em cima dos outros. Deixa eu traduzir isso pra termos mais básicos: faça uma cópia do diagrama de numerozinhos da $F(x,y)$, e sobre cada (x,y) com $x,y \in \{-2,-1,0,1,2\}$ desenhe a seta $(x,y) + \frac{1}{10}\vec{\nabla} F(x,y)$.

c) **(1.5 pts)** Faça uma outra cópia desse diagrama de numerozinhos e desenhe sobre ela as curvas de nível da função $F(x,y)$ para $z=0$, $z=-2$, $z=-5$, $z=1$ e $z=2$.

Dicas:
1) O vetor gradiente num ponto (x,y) é sempre ortogonal à curva de nível que passa pelo ponto (x,y).
2) Faça quantos rascunhos quiser. Eu só vou corrigir seus desenhos pros itens (a) e (b) que disserem "versão final", e eles têm que ser os mais caprichados possíveis.

Questão 3
(Total: 2.5 pts)
Sejam

$$\begin{aligned} F(x,y) &= xy(3-x-y), \\ P_1 &= (0,3), \\ P_2 &= (1,1), \\ P_3 &= (3,0). \end{aligned}$$

a) **(0.5 pts)** Mostre que P_1, P_2 e P_3 são pontos críticos da função F.

b) **(2.0 pts)** Quais deles são máximos locais? Quais são mínimos locais? Quais são pontos de sela?

Questão 4
(Total: 1.0 pts)
Sejam

$$\begin{aligned} z &= z(x,y), \\ x &= x(t), \\ y &= y(t). \end{aligned}$$

a) **(0.5 pts)** Calcule z_{tt}.
b) **(0.5 pts)** Calcule z_{ttt}.

4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	2	2	2	2	2
4	4	4	2	0	0	0	0
3	3	3	2	0	0	0	0
2	2	2	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	2	2	2	2	2
4	4	4	2	0	0	0	0
3	3	3	2	0	0	0	0
2	2	2	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

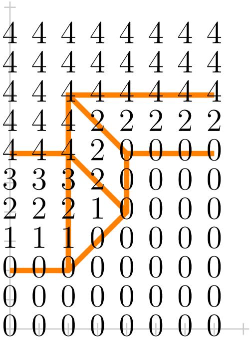
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	2	2	2	2	2
4	4	4	2	0	0	0	0
3	3	3	2	0	0	0	0
2	2	2	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

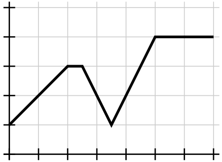
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	2	2	2	2	2
4	4	4	2	0	0	0	0
3	3	3	2	0	0	0	0
2	2	2	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	2	2	2	2	2
4	4	4	2	0	0	0	0
3	3	3	2	0	0	0	0
2	2	2	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	2	2	2	2	2
4	4	4	2	0	0	0	0
3	3	3	2	0	0	0	0
2	2	2	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Questão 1: gabarito parcial





Questão 2: gabarito

```
(%i1) f(x)   := (x+2)*(x-1);
```
(%o1)
$$f(x) := (x+2)\ (x-1)$$

```
(%i2) expand(f(x));
```
(%o2)
$$x^2 + x - 2$$

```
(%i3) F(x,y)  := x^2 + x*y - 2*y^2;
```
(%o3)
$$F(x, y) := x^2 + x\, y + (-2)\ y^2$$

```
(%i4) F(x,1);
```
(%o4)
$$x^2 + x - 2$$

```
(%i5) mkmatrix([x,-2,2], [y,2,-2,-1], [x,y]);
```
(%o5)
$$\begin{pmatrix} [-2,2] & [-1,2] & [0,2] & [1,2] & [2,2] \\ [-2,1] & [-1,1] & [0,1] & [1,1] & [2,1] \\ [-2,0] & [-1,0] & [0,0] & [1,0] & [2,0] \\ [-2,-1] & [-1,-1] & [0,-1] & [1,-1] & [2,-1] \\ [-2,-2] & [-1,-2] & [0,-2] & [1,-2] & [2,-2] \end{pmatrix}$$

```
(%i6) mkmatrix([x,-2,2], [y,2,-2,-1], F(x,y));
```
(%o6)
$$\begin{pmatrix} -8 & -9 & -8 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -9 & -8 \end{pmatrix}$$

```
(%i7) z   : F(x,y);
```
(%o7)
$$-\left(2\, y^2\right) + x\, y + x^2$$

```
(%i8) z_x : diff(z,x);
```
(%o8)
$$y + 2\, x$$

```
(%i9) z_y : diff(z,y);
```
(%o9)
$$x - 4\, y$$

```
(%i10) define(Fx(x,y), diff(F(x,y), x));
```
(%o10)
$$\mathrm{Fx}(x, y) := y + 2\, x$$

```
(%i11) define(Fy(x,y), diff(F(x,y), y));
```
(%o11)
$$\mathrm{Fy}(x, y) := x - 4\, y$$

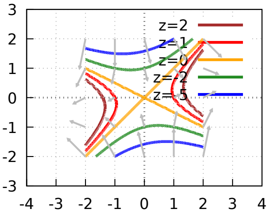
```
(%i12) mkmatrix([x,-2,2], [y,2,-2,-1], [Fx(x,y),Fy(x,y)]);
```
(%o12)
$$\begin{pmatrix} [-2,-10] & [0,-9] & [2,-8] & [4,-7] & [6,-6] \\ [-3,-6] & [-1,-5] & [1,-4] & [3,-3] & [5,-2] \\ [-4,-2] & [-2,-1] & [0,0] & [2,1] & [4,2] \\ [-5,2] & [-3,3] & [-1,4] & [1,5] & [3,6] \\ [-6,6] & [-4,7] & [-2,8] & [0,9] & [2,10] \end{pmatrix}$$

```
(%i13) z : F(x,y);
```
(%o13)
$$-\left(2\, y^2\right) + x\, y + x^2$$

```
(%i14) [xmin,ymin,xmax,ymax] : [-2,-2,2,2];
```
(%o14)
$$[-2, -2, 2, 2]$$

```
(%i15) mylevel(eq,[opts]) :=
         apply('impl, append([eq, x,xmin,xmax, y,ymin,ymax], opts))$
(%i16) myvec(xy, dxdy) := vector(xy, dxdy, hl(0.1), lw(2), lc(gray))$
(%i17) myvecs : create_list(myvec([x,y], [Fx(x,y),Fy(x,y)]/10),
                  x, seq(-2,2), y, seqby(2,-2,-1))$
```

```
(%i18) myQdraw("2024-1-C3-P1-level",     "height=5cm",
          xr(-4,4), yr(-3,3),
          more(proportional_axes=xy),
          mylevel(z=2,  lk("z=2"),  lc(brown)),
          mylevel(z=1,  lk("z=1"),  lc(red)),
          mylevel(z=0,  lk("z=0"),  lc(orange)),
          mylevel(z=-2, lk("z=-2"), lc(forest_green)),
          mylevel(z=-5, lk("z=-5"), lc(blue)),
          myvecs
          /* myvec([2,0], [1,2]) */
         );
```
(%o18)



Questão 3: gabarito

```
(%i1) z : x * y * (3-x-y);
```
(%o1)
$$x\,(-y-x+3)\,y$$

```
(%i2) gradz : [diff(z,x), diff(z,y)];
```
(%o2)
$$[(-y-x+3)\,y-x\,y, x\,(-y-x+3)-x\,y]$$

```
(%i3) gradz : factor(gradz);
```
(%o3)
$$[-(y\,(y+2\,x-3)), -(x\,(2\,y+x-3))]$$

```
(%i4) crpts : solve(gradz, [x,y]);
```
(%o4)
$$[[x=0, y=0], [x=0, y=3], [x=3, y=0], [x=1, y=1]]$$

```
(%i5) hessz : hessian(z, [x,y]);
```
(%o5)
$$\begin{pmatrix} -(2\,y) & -(2\,y)-2\,x+3 \\ -(2\,y)-2\,x+3 & -(2\,x) \end{pmatrix}$$

```
(%i6) P1    : [x=0,y=3];
```
(%o6)
$$[x=0, y=3]$$

```
(%i7) P2    : [x=1,y=1];
```
(%o7)
$$[x=1, y=1]$$

```
(%i8) P3    : [x=3,y=0];
```
(%o8)
$$[x=3, y=0]$$

```
(%i9) GH    : [gradz, hessz];
```
(%o9)
$$\left[[-(y\,(y+2\,x-3)), -(x\,(2\,y+x-3))], \begin{pmatrix} -(2\,y) & -(2\,y)-2\,x+3 \\ -(2\,y)-2\,x+3 & -(2\,x) \end{pmatrix}\right]$$

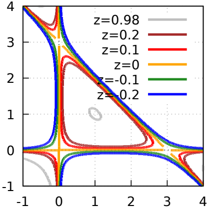
```
(%i10) GH    : expand(GH);
```
(%o10)
$$\left[[-y^2-2\,x\,y+3\,y, -(2\,x\,y)-x^2+3\,x], \begin{pmatrix} -(2\,y) & -(2\,y)-2\,x+3 \\ -(2\,y)-2\,x+3 & -(2\,x) \end{pmatrix}\right]$$

```
(%i11) GH1   : at(GH, P1);
```
(%o11)
$$\left[[0,0], \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

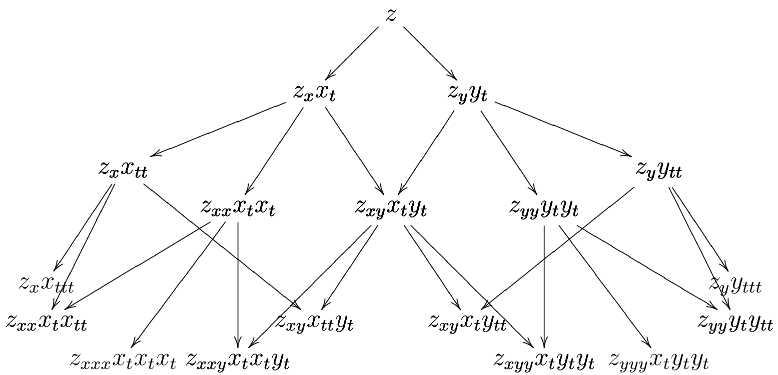
```
(%i12) GH2   : at(GH, P2);
```
(%o12)
$$\left[[0,0], \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\right]$$

```
(%i13) GH3   : at(GH, P3);
```
(%o13)
$$\left[[0,0], \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}\right]$$

```
(%i14) [xmin,ymin,xmax,ymax] : [-1,-1,4,4]$
(%i15) mylevel(eq,[opts]) :=
         apply('impl, append([eq, x,xmin,xmax, y,ymin,ymax], opts))$
(%i16) myQdraw("2024-1-C3-P1-Q3", "height=10cm",
         xr(-1,4), yr(-1,4),
         more(proportional_axes=xy),
         mylevel(z=0.98, lk("z=0.98"), lc(gray)),
         mylevel(z=0.2,  lk("z=0.2"),  lc(brown)),
         mylevel(z=0.1,  lk("z=0.1"),  lc(red)),
         mylevel(z=0,  lk("z=0"),  lc(orange)),
         mylevel(z=-0.1, lk("z=-0.1"), lc(forest_green)),
         mylevel(z=-0.2, lk("z=-0.2"), lc(blue))
        );
```
(%o16)



Questão 4: diagrama



Cálculo 3 - 2024.1

Material pra Prova Relâmpago 1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2024.1-C3.html

Links

http://anggtwu.net/e/maxima.e.html#2024.1-C3-PR1
(find-es "maxima" "2024.1-C3-PR1")

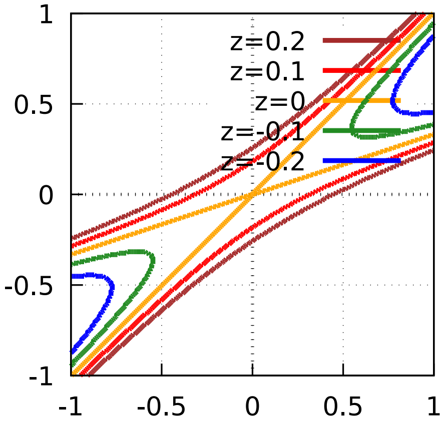
Sejam:

$$\begin{array}{rcl}
f(x) &=& (x-1)(x-3) \\
F(x,y) &=& (x-y)(x-3y) \\
&=& x^2-4xy+3y^2 \\
z &=& F(x,y) \\
&=& x^2-4xy+3y^2 \\
P(t) &=& (\cos t, \sin t) \\
g(t) &=& F(P(t))
\end{array}$$

Faça o Maxima gerar uma tabela como esta:

$$\begin{pmatrix}
t & F(P(t)) \\
0 & 1.0 \\
\pi/8 & -0.1213203435596427 \\
\pi/4 & 0.0 \\
3\,\pi/8 & 1.292893218813452 \\
\pi/2 & 3.0 \\
5\,\pi/8 & 4.121320343559642 \\
3\,\pi/4 & 4.0 \\
7\,\pi/8 & 2.707106781186548 \\
\pi & 1.0
\end{pmatrix}$$

E um diagrama de curvas de nível como este aqui:



Cálculo 3 - 2024.1

P2 (segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C3.html

Links

http://anggtwu.net/e/maxima.e.html#2024.1-C3-P2
(find-es "maxima" "2024.1-C3-P2")

Questão 1.

(Total: 10.0 pts)

Lembre que $\mathrm{Int}(A)$ é o interior de A, $\overline{A}$ é o fecho de A, ∂A é a fronteira de A, e que se f é uma função de A em B então f^{-1} é a "imagem inversa de F", que é definida de um jeito quando o argumento é um número e de outro jeito quando o argumento é um conjunto. Se $b \in A$ e $C \subset B$, então:

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(b) & = & \{\, a \in A \mid f(a) = b \,\} \\ f^{-1}(C) & = & \{\, a \in A \mid f(a) \in C \,\} \end{array}$$

Sejam:

$$\begin{array}{rcl} C_1 & = & \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \{0,1,2\}, y \in \{0,1,2,3,4\} \,\} \\ C_2 & = & \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,2], y \in [0,4] \,\} \\ C_N & = & \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,2], y \in [2,4] \,\} \\ C_S & = & \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,2], y \in [0,2] \,\} \\ F_{PN}(x,y) & = & y + x^2 \\ F_{CS}(x,y) & = & x^2 + (y-2)^2 \\ D_N & = & \{\, (x,y) \in C_N \mid F_{PN}(x,y) \le 4 \,\} \\ D_S & = & \{\, (x,y) \in C_S \mid F_{CS}(x,y) \le 4 \,\} \\ D & = & D_N \cup D_S \\ D' & = & D \backslash \{(2,2)\} \\ G(x,y) & = & (x-1)^2 + y^2 \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{rccl} H & : & D & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & G(x,y) \end{array}$$

As letras N, S, P e C às vezes querem dizer "norte", "sul", "parábola" e "círculo", e C e D às vezes querem dizer "conjunto" e "domínio".

a) **(0.3 pts)** Faça os diagramas de numerozinhos das funções F_{PN}, F_{CS} e G nos pontos de C_1. Cada diagrama vai ter $3 \times 5 = 15$ numerozinhos.

b) **(1.2 pts)** Desenhe as curvas de nível das funções F_{PN}, F_{CS} e G em C_2. Note que C_2 é um retângulo 2×4.

c) **(0.5 pts)** Desenhe os conjuntos C_N, C_S, D_N, D_S e D.

d) **(1.0 pts)** A fronteira ∂D tem quatro "vértices". Chame-os de $V_1, \ldots, V_4$ e dê as coordenadas – exatas ou aproximadas – de cada um deles. Nos casos em que for difícil encontrar as coordenadas exatas use a notação '$\approx$' – por exemplo, escreva $P_{42} \approx (1.2, 3.4)$ ao invés de $P_{42} = (1.2, 3.4)$.

e) **(2.0 pts)** Faça um desenho bem grande com o conjunto D e as curvas de nível da função H; desenhe as curvas de nível pelo menos para $z = 1$, $z = 4$ e $z = 9$. Use esse desenho para determinar – no olhômetro mesmo – quais são os pontos de máximos e mínimos locais da função H. Chame esses pontos de $M_1, M_2, \ldots$ e dê as coordenadas exatas ou aproximadas de cada um deles, como no item anterior.

f) **(1.0 pts)** Defina uma função contínua $H_{\mathrm{IL}} : D' \to \mathbb{R}$ tal que $H_{\mathrm{IL}}(D')$ seja um conjunto ilimitado.

O ponto (1,3) não é um máximo local da função H, e nos próximos itens você vai fazer o *início* de uma prova formal disto. Sejam:

$$\begin{array}{rcl} (x_0, y_0) & = & (1,3) \\ P_0 & = & (x_0, y_0) \\ \vec{u} & = & \nabla F_{PN}(x_0, y_0) \\ \vec{v} & = & \nabla G(x_0, y_0) \\ \vec{w} & = & \vec{v} - 3\vec{u} \\ P(t) & = & P_0 + t\vec{w} \\ r & = & \{\, P(t) \mid t \in \mathbb{R} \,\} \end{array}$$

g) **(0.5 pts)** Calcule $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

h) **(1.5 pts)** Faça um desenho – grande, mas pode ser meio torto – que mostre ∂D, P_0, $P_0 + \vec{u}/10$, $P_0 + \vec{v}/10$, $P_0 + \vec{w}/10$ e a reta r. Lembre que como r é uma reta parametrizada a gente costuma pôr anotações como '$t = 0$', '$t = 1$', '$t = 0.1$' em alguns pontos dela.

i) **(2.0 pts)** Encontre no olhômetro um $\varepsilon > 0$ tal que isto seja verdade,

$$P([0, \varepsilon)) \subset D$$

e faça um outro desenho que pode ser meio torto, e que mostre ∂D e $P([0, \varepsilon))$. Diga qual ε você escolheu!

Cálculo 3 - 2024.1

Prova suplementar (VS)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2024.1-C3.html

Links

Questão 1
(Total: 2.5 pts)
O diagrama de numerozinhos da última folha da prova corresponde a uma superfície $z = F(x, y)$ que tem 7 faces. Também é possível interpretá-lo como uma superfície com 8 ou mais faces, mas vamos considerar que a superfície com só 7 faces é que é a correta.

a) **(1.0 pts)** Mostre como dividir o plano em 7 polígonos que são as projeções destas faces no plano do papel.

b) **(0.5 pts)** Chame estas faces de face N (“norte”), S (“sul”), W (“oeste”), E (“leste”), CN (“centro-norte”), C (“centro”) e CS (“centro-sul”), e chame as equações dos planos delas de $F_N(x, y)$, $F_S(x, y)$, $F_W(x, y)$, $F_E(x, y)$, $F_{CN}(x, y)$, $F_C(x, y)$, e $F_{CS}(x, y)$. Dê as equações destes planos.

c) **(1.0 pts)** Sejam

$$\begin{array}{rcl} Q(t) & = & (0, 11) + t\overrightarrow{(1, -1)}, \\ (x(t), y(t)) & = & Q(t), \\ h(t) & = & F(x(t), y(t)). \end{array}$$

Faça o gráfico da função $h(t)$. Considere que o domínio dela é o intervalo $[0, 11]$.

Questão 2
(Total: 4.5 pts)
Sejam

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \\ B & = & A \times A. \\ F(x, y) & = & x + y, \\ G(x, y) & = & x - y, \\ H(x, y) & = & (x - y)^2, \\ P(x, y) & = & F(x, y) + H(x, y) \end{array}$$

a) **(0.5 pts)** Faça o diagrama de numerozinhos das funções F, G, H, P. Desenhe um numerozinho para cada $(x, y) \in B$.

b) **(1.5 pts)** Desenhe o “campo gradiente” da função P nestes pontos, mas multiplicando cada $\vec{\nabla} P(x, y)$ por $\frac{1}{10}$ pros vetores não ficarem uns em cima dos outros. Deixa eu traduzir isso pra termos mais básicos: faça uma cópia do diagrama de numerozinhos da $P(x, y)$, e sobre cada (x, y) com $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ desenhe a seta $(x, y) + \frac{1}{10}\vec{\nabla} P(x, y)$.

c) **(2.5 pts)** Faça uma outra cópia desse diagrama de numerozinhos e desenhe sobre ela as curvas de nível da função $P(x, y)$ para cinco valores de z diferentes.

Dicas:

1) O vetor gradiente num ponto (x, y) é sempre ortogonal à curva de nível que passa pelo ponto (x, y).

2) Faça quantos rascunhos quiser. Eu só vou corrigir seus desenhos que disserem “versão final”, e eles têm que ser os mais caprichados possíveis.

3) As curvas de nível da função $P(x, y)$ vão ser parábolas tortas.

Questão 3

(Total: 3.0 pts)
Sejam:

$$\begin{array}{rcl} P(x,y) & = & (x+y)+(x-y)^2 \\ M(x,y) & = & (x-1)^2+y \\ D & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0, y\geq 0, M(x,y)\leq 4\,\} \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{rccl} Q: & D & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & M(x,y) \end{array}$$

Repare que a função $P(x,y)$ é a mesma da questão 2, e que na questão 2 eu pedi pra vocês desenharem um monte de objetos intermediários que ajudavam a desenhar as curvas de nível da P... aqui é bem difícl desenhar M, D e Q direto mas você é que vai ter que descobrir os objetos intermediários que vão te ajudar a desenhá-los.

a) **(0.5 pts)** Desenhe a região D.

b) **(1.5 pts)** Desenhe as curvas de nível das funções M e Q.

b) **(1.0 pts)** Dê as coordenadas – exatas quando possível, aproximadas quando não – dos máximos e mínimos locais da função Q. *Aqui os pontos mais fáceis de encontrar vão valer bem poucos pontos e os pontos mais difíceis mais valer bem mais.*

4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4
2	2	2	2	2	3	4	4	4	4	4	4	4
1	1	1	1	1	2	3	4	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	1	2	3	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	1	2	3	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	1	2	3	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	0	1	2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4
2	2	2	2	2	3	4	4	4	4	4	4	4
1	1	1	1	1	2	3	4	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	1	2	3	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	1	2	3	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	1	2	3	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	0	1	2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4
2	2	2	2	2	3	4	4	4	4	4	4	4
1	1	1	1	1	2	3	4	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	1	2	3	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	1	2	3	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	1	2	3	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	0	1	2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4
2	2	2	2	2	3	4	4	4	4	4	4	4
1	1	1	1	1	2	3	4	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	1	2	3	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	1	2	3	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	1	2	3	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	0	1	2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4
2	2	2	2	2	3	4	4	4	4	4	4	4
1	1	1	1	1	2	3	4	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	1	2	3	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	1	2	3	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	1	2	3	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	0	1	2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4
2	2	2	2	2	3	4	4	4	4	4	4	4
1	1	1	1	1	2	3	4	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	1	2	3	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	1	2	3	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	1	2	3	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	0	1	2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Questão 1: gabarito parcial

4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4
2	2	2	2	2	3	4	4	4	4	4	4	4
1	1	1	1	1	2	3	4	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	1	2	3	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	1	2	3	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	1	2	3	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	0	1	2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0