

Cálculo 2 - 2024.2

P2 (segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2024.2-C2.html>

Links

Gabarito em Maxima:

```
http://anggtwu.net/e/maxima.e.html#2024-2-C2-P2  
(find-es "maxima" "2024-2-C2-P2")
```

Questão 1

(Total: 3.0 pts)

Lembre que no curso eu mostrei que o meu modo preferido de escrever o “método” para resolver EDOs com variáveis separáveis — “EDOVs” — é o “método” [M] abaixo... eu pus o termo “método” entre aspas porque alguns dos passos da [M] são gambiarras nas quais a gente não pode confiar totalmente, e aí a gente precisa sempre testar as nossas soluções. O abaixo — a “fórmula” — é uma versão resumida do [M].

$$\begin{aligned}
 \text{[M]} &= \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ h(y) dy = g(x) dx \\ \int h(y) dy = \int g(x) dx \\ \parallel \\ H(y) + C_1 \qquad G(x) + C_2 \\ H(y) = G(x) + C_2 - C_1 \\ \qquad = G(x) + C_3 \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right) \\
 \text{[F}_3\text{]} &= \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Seja (*1) esta EDOVs:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8x}{2y} \quad (*1)$$

- a) (1.0 pts) Desenhe os tracinhos do campo de direções da EDO (*) nos pontos com $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Aqui você vai ter que desenhar 25 tracinhos e vai ter que caprichar – um tracinho com coeficiente angular $\frac{1}{2}$ tem que ser visualmente bem diferente de um com coeficiente angular 1 e de um com coeficiente angular 2.
- b) (0.5 pts) Encontre as duas soluções gerais da EDO (*) – a solução “positiva” e a “negativa” – e dê nomes para elas.
- c) (0.5 pts) Teste a sua solução “negativa”.
- d) (0.5 pts) Encontre a solução particular que passa pelo ponto $(-2, 3)$.
- e) (0.5 pts) Encontre a solução particular que passa pelo ponto $(2, -3)$.

Muito importante: em todas as questões desta prova eu vou corrigir as respostas de vocês como se eu fosse o “colega menos seu amigo e sem paciência pra adivinhar nada” da Dica 7 e do slide sobre contextos... por exemplo, se você escrever só “ $a = 42$ ” eu vou interpretar isso como “aquí essa pessoa tá dizendo que é óbvio que ‘ $a = 42$ ’ é sempre verdade – e isso é falso!!!”, e aí babau. Ou seja, a parte em português das questões de vocês vai ser MUUUUITO importante!

Questão 2**(Total: 3.0 pts)**Sejam $(*_2)$ e $(*_3)$ as EDOs abaixo:

$$y'' - 3y' - 28y = 0 \quad (*_2)$$

$$y'' + 4y' + 104y = 0 \quad (*_3)$$

- a) **(0.5 pts)** Encontre as soluções básicas e a solução geral da EDO $(*_2)$. Dê um nome para cada uma delas.
- b) **(1.0 pts)** Encontre uma solução $g(x)$ da EDO $(*_2)$ que obedeça isto aqui: $g(0) = 2$, $g'(0) = 3$.
- c) **(0.5 pts)** Encontre as soluções básicas complexas e as soluções básicas reais da EDO $(*_3)$.
- d) **(1.0 pts)** Teste se $f = e^{2x} \cos(3x)$ é solução da EDO $(*_3)$. Defina funções intermediárias pras suas contas ficarem menores.

Questão 3**(Total: 1.0 pts)**Seja $(*_4)$ esta EDO:

$$y' - \frac{2y}{x} = 3x$$

- a) **(0.3 pts)** Encontre a solução geral dela.
- b) **(0.7 pts)** Teste a sua solução.

Lembre que você pode usar este método:

$$[EL_3] = \begin{pmatrix} f' + fg = h \\ G' = g \\ f = e^{-G}(\int e^G h dx + C) \end{pmatrix}$$

Questão 4**(Total: 2.0 pts)**4) Sejam $(*_5)$, $(*_6)$ e $(*_7)$ estas EDOs:

$$20xy^3 dx + 30x^2y^2 dy = 0 \quad (*_5)$$

$$20x^2y^3 dx + 30x^3y^2 dy = 0 \quad (*_6)$$

$$(8xy^2 + 14x) dx + (8x^2y + 5) dy = 0 \quad (*_7)$$

- a) **(0.1 pts)** Mostre que a $(*_5)$ é exata.
- b) **(0.1 pts)** Mostre que $(*_6)$ não é exata.
- c) **(0.4 pts)** Encontre a solução geral de $(*_5)$.
- d) **(0.4 pts)** Teste a sua solução geral da $(*_5)$.
- e) **(0.1 pts)** Mostre que $(*_7)$ é exata.
- f) **(0.9 pts)** Encontre a solução geral implícita da $(*_7)$. Aqui você não precisa encontrar a solução geral explícita – as contas pra encontrar a solução geral explícita são grandes demais.

Lembre que você pode usar este método:

$$[E_5] = \begin{pmatrix} dz = z_x dx + z_y dy = 0 \\ \frac{d}{dx} z = z_x + z_y \frac{dy}{dx} = 0 \\ z = C \end{pmatrix}$$

Questão 5**(Total: 1.0 pts)**

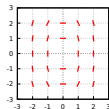
Digamos que

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) = \left(\frac{2^2}{4!}, \frac{7^2}{5!}, \frac{12^2}{6!}, \dots \right).$$

Dê uma fórmula pro termo geral dessa sequência – ou seja, pro a_n .

Questão 1: gabarito em Maxima

```
(%i1) /* (1a): 1.0 */
      [xmin,ymin, xmax,ymax] : [-3,-3, 3,3]$
(%i2) tracinhos : directionfield(h(y),g(x), lc(red))$
(%i3) myqdrawp(xyrange(), tracinhos);
(%o3)
```



```
(%i4) /* (1b): 0.5 */
      e1 : M[1][1] = M[1][3];
(%o4)
      
$$\frac{d}{dx}y = -\left(\frac{4x}{y}\right)$$

(%i5) sols : ode2(e1,y,x);
(%o5)
      
$$-\left(\frac{y^2}{8}\right) = \frac{x^2}{2} + \%c$$

(%i6) solss : solve(sols,y);
(%o6)
      
$$y = -\left(2\sqrt{-x^2 - 2\%c}\right), y = 2\sqrt{-x^2 - 2\%c}$$

(%i7) define(fp(x), M[6][3]);
(%o7)
      
$$fp(x) := \sqrt{C3 - 4x^2}$$

(%i8) define(fn(x), - M[6][3]);
(%o8)
      
$$fn(x) := -\sqrt{C3 - 4x^2}$$

```

```
(%i9) /* (1c): 0.5 */
      e2 : subst(y=fn(x), e1);
(%o9)
      
$$\frac{d}{dx}\left(-\sqrt{C3 - 4x^2}\right) = \frac{4x}{\sqrt{C3 - 4x^2}}$$

(%i10) e3 : ev(e2,diff);
(%o10)
      
$$\frac{4x}{\sqrt{C3 - 4x^2}} = \frac{4x}{\sqrt{C3 - 4x^2}}$$

(%i11) /* (1d): 0.5 */
      e4 : y=fp(x);
(%o11)
      
$$y = \sqrt{C3 - 4x^2}$$

(%i12) e5 : subst([x=-2,y=3], e4);
(%o12)
      
$$3 = \sqrt{C3 - 16}$$

(%i13) e6 : solve(e5, C3);
(%o13)
      
$$[C3 = 25]$$

(%i14) subst(e6, e4);
(%o14)
      
$$y = \sqrt{25 - 4x^2}$$

```

```
(%i15) /* (1e): 0.5 */
      e7 : y=fn(x);
(%o15)
      
$$y = -\sqrt{C3 - 4x^2}$$

(%i16) e8 : subst([x=2,y=-3], e7);
(%o16)
      
$$-3 = -\sqrt{C3 - 16}$$

(%i17) e9 : solve(e8, C3);
(%o17)
      
$$[C3 = 25]$$

(%i18) subst(e6, e7);
(%o18)
      
$$y = -\sqrt{25 - 4x^2}$$

```

Questão 2: gabarito em Maxima

(X11) /* (2a): 0.5 pts */
star2 : 'diff(y,x,2) - 3*'diff(y,x) - 28*y = 0;

(Xo1)
$$\frac{d^2}{dx^2} y - 3 \left(\frac{d}{dx} y \right) - 28y = 0$$

(X12) factor(D^2 - 3*D - 28);

(Xo2)
$$(D - 7)(D + 4)$$

(X13) e1 : ode2(star2, y, x);

(Xo3)
$$y = \%k1 e^{7x} + \%k2 e^{-4x}$$

(X14) /* (2b): 1.0 pts */

gg : rhs(e1);

(Xo4)
$$\%k1 e^{7x} + \%k2 e^{-4x}$$

(X15) subst([%k1=0, %k2=1], e1);

(Xo5)
$$y = e^{-4x}$$

(X16) subst([%k1=1, %k2=0], e1);

(Xo6)
$$y = e^{7x}$$

(X17) f1 : rhs(subst([%k1=0, %k2=1], e1));

(Xo7)
$$e^{-4x}$$

(X18) f2 : rhs(subst([%k1=1, %k2=0], e1));

(Xo8)
$$e^{7x}$$

(X19) e2 : at(gg, x=0) = 2;

(Xo9)
$$\%k2 + \%k1 = 2$$

(X10) e3 : at(diff(gg,x), x=0) = 3;

(Xo10)
$$7\%k1 - 4\%k2 = 3$$

(X11) sol : solve([e2,e3],[%k1,%k2]);

(Xo11)
$$[[\%k1 = 1, \%k2 = 1]]$$

(X12) g : subst(sol, gg);

(Xo12)
$$e^{7x} + e^{-4x}$$

(X113) /* (2c): 0.5 pts */

star3 : 'diff(y,x,2) + 4*'diff(y,x) + 104*y = 0;

(Xo13)
$$\frac{d^2}{dx^2} y + 4 \left(\frac{d}{dx} y \right) + 104y = 0$$

(X14) e1 : ode2(star3, y, x);

(Xo14)
$$y = e^{-2x} (\%k1 \sin(10x) + \%k2 \cos(10x))$$

(X15) gg : rhs(e1);

(Xo15)
$$e^{-2x} (\%k1 \sin(10x) + \%k2 \cos(10x))$$

(X16) fr1 : rhs(subst([%k1=0, %k2=1], e1));

(Xo16)
$$e^{-2x} \cos(10x)$$

(X17) fr2 : rhs(subst([%k1=1, %k2=0], e1));

(Xo17)
$$e^{-2x} \sin(10x)$$

(X18) fc1 : exp((-2+10*I)*x);

(Xo18)
$$e^{(-2+10i)x}$$

(X19) fc2 : exp((-2-10*I)*x);

(Xo19)
$$e^{(-2-10i)x}$$

(X120) ec1 : subst([y=fc1], star3);

(Xo20)
$$\frac{d^2}{dx^2} e^{(-2+10i)x} + 4 \left(\frac{d}{dx} e^{(-2+10i)x} \right) + 104 e^{(-2+10i)x} = 0$$

(X121) ec2 : subst([y=fc2], star3);

(Xo21)
$$\frac{d^2}{dx^2} e^{(-2-10i)x} + 4 \left(\frac{d}{dx} e^{(-2-10i)x} \right) + 104 e^{(-2-10i)x} = 0$$

(X122) expand(ev(ec1, diff));

(Xo22)
$$0 = 0$$

(X123) expand(ev(ec2, diff));

(Xo23)
$$0 = 0$$

(X124) /* (2d): 1.0 */

k11(g,x,c) \$

(X125) gradef(g,x, 2*g) \$

(X126) gradef(g,x, 3*c) \$

(X127) gradef(c,x,2), diff(g*c,x), y];

(Xo28)
$$[-(12gs) - 5cg, 2cg - 3gs, y]$$

(X129) star3 : 'diff(y,x,2) + 4*'diff(y,x) + 104*y = 0;

(Xo29)
$$\frac{d^2}{dx^2} y + 4 \left(\frac{d}{dx} y \right) + 104y = 0$$

(X130) e1 : subst([y=g*c], star3);

(Xo30)
$$\frac{d^2}{dx^2} (cg) + 4 \left(\frac{d}{dx} (cg) \right) + 104cg = 0$$

(X131) ev(e1, diff);

(Xo31)
$$4(2cg - 3gs) - 12gs + 99cg = 0$$

(X132) expand(ev(e1, diff));

(Xo32)
$$107cg - 24gs = 0$$

Questão 3, 4 e 5: gabarito em Maxima

(X11) /* (3a): 0.3 */
e1 : 'diff(y,x) - 2*y/x = 3*x;

(%o1)
$$\frac{d}{dx}y - \frac{2y}{x} = 3x$$

(X12) sol : ode2(e1,y,x);

(%o2)
$$y = x^2 (3 \log x + \%c)$$

(X13) /* (3b): 0.7 */

e2 : subst(sol, e1);

(%o3)
$$\frac{d}{dx}(x^2 (3 \log x + \%c)) - 2x (3 \log x + \%c) = 3x$$

(X14) ev(e2, diff);

(%o4)
$$3x = 3x$$

(X11) load("~/MAXIMA/2024-2-C2-E5.mac")\$
(X12) [star5_x, star5_y] : [20* x*y^3, 30*x^2*y^2];

(%o2)
$$\begin{bmatrix} 20xy^3, 30x^2y^2 \end{bmatrix}$$

(X13) [star6_x, star6_y] : [20*x+2*y^3, 30*x^2*y^2];

(%o3)
$$\begin{bmatrix} 40xy^3, 30x^2y^2 \end{bmatrix}$$

(X14) [star7_x, star7_y] : [8*x*y^2, 8*x^2*y+5];

(%o4)
$$\begin{bmatrix} 8xy^2, 8x^2y+5 \end{bmatrix}$$

(X15) /* (4a): 0.1 pts */

[diff(star5_x,y), diff(star5_y,x)];

(%o5)
$$\begin{bmatrix} 60xy^2, 60xy^2 \end{bmatrix}$$

(X16) /* (4b): 0.1 pts */
[diff(star6_x,y), diff(star6_y,x)];

(%o6)
$$\begin{bmatrix} 120xy^2, 60xy^2 \end{bmatrix}$$

(X17) /* (4c): 0.4 pts */

caixinhas_2 (star5_x,star5_y);

(%o7)
$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

(X18) caixinhas_3(10*x^2*y^3, star5_x, star5_y);

(%o8)
$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

(X19) caixinhas_1(10*x^2*y^3);

(%o9)
$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

(X110) e1 : star5_x + star5_y * 'diff(y,x) = 0;

(%o10)
$$30x^2y^2 \left(\frac{d}{dx}y \right) + 20xy^3 = 0$$

(X111) e2 : 10*x^2*y^3 = C;

(%o11)
$$10x^2y^3 = C$$

(X112) solve(e2, y);

(%o12)
$$\left[y = \frac{(\sqrt{3}i-1)C^{\frac{1}{3}}}{2 \cdot 10^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}}, y = -\left(\frac{(\sqrt{3}i+1)C^{\frac{1}{3}}}{2 \cdot 10^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}} \right), y = \frac{C^{\frac{1}{3}}}{10^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}} \right]$$

(X113) e3 : solve(e2, y)[3];

(%o13)
$$y = \frac{C^{\frac{1}{3}}}{10^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}}$$

(X11) /* (5): 1.0 pts */

[a0, a1, a2] : [2^2/4!, 7^2/5!, 12^2/6!];

(%o1)
$$\left[\frac{1}{6}, \frac{49}{120}, \frac{1}{5} \right]$$

(X12) a(n) := (5*n+2)^(n+4)!;

(%o2)
$$a(n) := \frac{(5n+2)^{n+4}}{(n+4)!}$$

(X13) [a(0), a(1), a(2)];

(%o3)
$$\left[\frac{1}{6}, \frac{49}{120}, \frac{1}{5} \right]$$