Cálculo 2 - 2024.2

Todos os PDFs do semestre
juntados num PDFzão só

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

Cálculo 2 - 2024.2

Aula 1: introdução ao curso

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

Índice

Um exemplo do Iezzi 4
Sobre aprender A e B 5
Manga 6
Porquê? 7
Eu não sou telepata... 8
Eu não sou telepata... (2) 9
Como passar em C2: método 2 10
A Banca Maluca 11
Critérios de correção 12
Fase pré-silábica 13
"Meu objetivo é..." 14
"Meu objetivo é reprovar pessoas como você" 15
Árvores caem na prova? 16
Como perder pontos na vista de prova 17
Pedaço de semicírculo: seja como o Bob 18
"Releia a Dica 7" 19
Linguagem formal, gramática, sintaxe 20
Linguagem formal, gramática, sintaxe: figura 21
A linguagem formal de Cálculo 2 22
(Sempre e nunca) 23
Sintaxe 24
Justificativas 25
Atirei o Pau no Gato: seja como o Bob 26
Imagens de intervalos 27
Sobre Português 28
Sobre Português (e generalizar) 29
Banana 30
Unexpected end of input 31
"Faz um vídeo explicando o PDF" 32
Um post da Ana Leticia de Fiori 33
Retas reversas 34
Contexto 35
Fórmulas e hipóteses 36
Sobre aulas expositivas 37
Formal vs. coloquial 38
Comentário sobre a P1 de 2020.1 39

Links

Iezzi1p19 (p.11) VII. Relação de implicação
Iezzi1p20 (p.12) IX. Sentenças abertas, quantificadores
Iezzi1p21 (p.13) O quantificador universal
Iezzi1p93 (p.85) Imagem de um elemento
Iezzi2p9 (p.1-B) 1. Potência de expoente natural

Variáveis e igualdade:
HarperCap1p9 Variables are given meaning by substitution
EllermeijerHeckP6 The meaning of variable is variable in mathematics
MariaLauraAFp13 Cada uma das igualdades tem um caráter diferente

A minha operação [:=] é simples demais:
HarperCap1p9 Variables are given meaning by substitution
`https://plato.stanford.edu/entries/logic-combinatory/#ProbSubs`

Sobre "maturidade matemática":
`https://news.ycombinator.com/item?id=41016650` How to choose a textbook...
Link original no matheducators.stackexchange

Mangas em Maxima:
`(find-es "maxima" "operator-subst")`
`http://anggtwu.net/e/maxima.e.html#operator-subst`

Um exemplo do Iezzi

O volume 2 do Iezzi começa assim:

> Sejam a um número real e n um número natural. Potência de base a e expoente n é o número a^n tal que:
>
> $$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^n = a^{n-1} \cdot a, \ \forall n, \ n > 1 \end{cases}$$
>
> Desta definição decorre que:
>
> $$\begin{array}{l} a^1 = a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a \\ a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a \\ a^3 = a^2 \cdot a = (a \cdot a) \cdot a = a \cdot a \cdot a \end{array}$$

Confira:
Iezzi2p9 (p. 1-B) 1. Potência de expoente natural

A maioria das pessoas que sabe muita matemática acha isso óbvio, e se uma outra pessoa pede ajuda pra entender isso elas só dizem "ah, é fácil!" – e traduzem cada expressão daí pra português.

Acontece que isso só é fácil pra quem entende o volume 1 do Iezzi super bem, incluindo essas seções daqui,

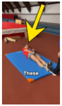
Iezzi1p19 (p.11) VII. Relação de implicação
Iezzi1p20 (p.12) IX. Sentenças abertas, quantificadores
Iezzi1p21 (p.13) O quantificador universal

que estão super incompletas, e que são sobre assuntos que todos os meus amigos lógicos consideram super difíceis.

Sobre aprender A e B

Cálculo 2 é uma matéria que tem um nível quase olímpico de dificuldade. Assista esse vídeo aqui,

"The Most Unusual Training - @victoriakalitta"
http://www.youtube.com/watch?v=i3tGLs5iLi8



porque eu vou falar bastante de "músculos mentais" e vou fazer algumas comparações com ele.

Cálculo 2 tem vários assuntos que funcionam assim: se você tentar aprender o assunto B direto ele é muito, muito, muito difícil, e você vai gastar – digamos – 200 horas de estudo pra aprender ele... mas se você aprender o assunto A primeiro você consegue aprender os dois assuntos, A e B, em 20 horas ao invés de 200 – e em alguns casos você vai ter que treinar os assuntos A e B muitas vezes, alternando entre eles.

Vou começar com o exemplo do aipim. Considere esta fórmula aqui, que eu vou chamar de [Aipim], e que é sobre uma propriedade da raiz quadrada:

$$\sqrt{a^2+b^2} = a+b$$

Ela nem sempre é verdadeira. Por exemplo, quando $a=3$ e $b=4$, temos:

$$\underbrace{\underbrace{\sqrt{\underbrace{\underbrace{\underbrace{a}_{3}{}^{2}}_{9}+\underbrace{\underbrace{b}_{4}{}^{2}}_{16}}_{25}}}_{5} = \underbrace{\underbrace{a}_{3}+\underbrace{b}_{4}}_{7}}_{\mathbf{F}}$$

Em 2024.1 a gente viu várias vezes que a fórmula [Aipim] era falsa, mas mesmo assim um monte de gente usou ela em contas na prova, e essas pessoas chegaram a resultados errados...

Essas pessoas não treinaram as técnicas pra contas fáceis de revisar e nem as técnicas pra revisar contas, então elas fizeram coisas como isso aqui e não conseguiram ver o erro:

$$\begin{array}{rcl} y &=& \sqrt{x^2-16}+5 \\ &=& x+1 \end{array}$$

Compare com isto,

$$\begin{array}{rcl} y &=& \sqrt{x^2-16}+5 \\ &=& \sqrt{x^2-4^2}+5 \\ &=& x-4+5 \\ &=& x+1 \end{array}$$

em que dá pra ver que a justificativa da terceira igualdade é esta,

$$\sqrt{x^2-4^2} \quad = \quad x-4$$

que é um caso particular disto,

$$\sqrt{a^2-b^2} \quad = \quad a-b$$

que é uma espécie de [Aipim] – é uma regra que nem sempre é verdadeira.

Repara que no final do vídeo da Victoria Kalitta ela se empurrou exatamente na direção certa. Quando a gente treina salto com vara sozinho no quintal de casa a gente geralmente acha que se a gente saltar 10000 vezes a gente vai aprender a fazer tudo direito... mas geralmente funciona melhor a gente treinar com um treinador que vai nos ajudar a desmontar o movimento final em dezenas de exercícios preparatórios – e aí a gente vai conseguir ver cada aipim nos nossos movimentos, e a gente vai conseguir não fazer aquele aipim de novo no próximo salto.

Manga

Em português "manga" tem dois sentidos totalmente diferentes – manga a fruta e manga de camisa – e às vezes a gente precisa explicar de qual sentido a gente estava falando...

Notação matemática tem um monte de mangas, e, pra piorar, também tem um monte de sinais que não são escritos, como alguns sinais de multiplicação, o sinal de exponenciação e o sinal de aplicação de função – o $\boxed{\text{ap}}$ ali de baixo –, e tem algumas operações, como a substituição, que cada livro escreve de um jeito, e que eu vou escrever como $(a+b)[a:=42]$. Compare:

$$\begin{array}{rcl}
2(y+z) & \Rightarrow & 2\cdot(y+z) \\
f(y+z) & \Rightarrow & f\ \boxed{\text{ap}}\ (y+z) \\
(a+b)[a:=42] & \Rightarrow & (a+b)\ \boxed{\text{s}}\ [a:=42]
\end{array}$$

$$\underbrace{(a+b=b+a)}_{\substack{\text{expressão}\\\text{original;}\\\text{caso geral;}\\\text{“antes”}}}\ \underbrace{[a:=42]}_{\substack{\text{substituição:}\\ a\ \boxed{\text{vira}}\ 42}} \quad = \quad (\underbrace{42+b=b+42}_{\substack{\text{expressão nova;}\\\text{caso particular;}\\\text{“depois”}}})$$

O Harper escreveria esse $(a+b)[a:=42]$ como $[42/a](a+b)$. Dê uma olhada na página 6 dele, em que ele dá esse exemplo aqui:

$$[\mathsf{num}[2]/x]\ \mathsf{plus}(x;\mathsf{num}[3]) = \mathsf{plus}(\mathsf{num}[2];\mathsf{num}[3])$$

Link: HarperCap1p9 (p.6)

Eu às vezes vou mostrar como entender e como desambiguar as mangas do curso traduzindo elas pra Maxima – veja a coluna da direita.

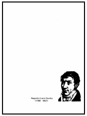
```
(%i1) Aipim : sqrt(a^2+b^2) = a+b;
(%o1)
```
$$\sqrt{b^2+a^2}=b+a$$
```
(%i2) S1 : [ a=3       ];
(%o2)
```
$$[a=3]$$
```
(%i3) S2 : [       b=4 ];
(%o3)
```
$$[b=4]$$
```
(%i4) S3 : [ a=3, b=4 ];
(%o4)
```
$$[a=3,b=4]$$
```
(%i5)            Aipim;
(%o5)
```
$$\sqrt{b^2+a^2}=b+a$$
```
(%i6) subst(S1, Aipim);
(%o6)
```
$$\sqrt{b^2+9}=b+3$$
```
(%i7) subst(S2, Aipim);
(%o7)
```
$$\sqrt{a^2+16}=a+4$$
```
(%i8) subst(S3, Aipim);
(%o8)
```
$$5=7$$
```
(%i9) "_s_"(expr,su) := subst(su, expr)$
(%i10) infix("_s_",99,101)$
(%i11) Aipim;
(%o11)
```
$$\sqrt{b^2+a^2}=b+a$$
```
(%i12) Aipim _s_ S1;
(%o12)
```
$$\sqrt{b^2+9}=b+3$$
```
(%i13) Aipim _s_ S1 _s_ S2;
(%o13)
```
$$5=7$$
```
(%i14)    5=7;
(%o14)
```
$$5=7$$
```
(%i15) is(5=7);
(%o15)
```
$$\textbf{false}$$
```
(%i16)
```

Porquê?

Isso aqui acontece muito:

Eu:	Digamos que $f(x) = 3 - 2x$.
Aluno:	Porquê?

...e isso vai ser uma das minhas desculpas pra botar todo mundo pra aprender Maxima. No Ensino Médio a gente estuda por livros como o do Iezzi, que têm umas páginas assim:



e os professores convencem a gente que a gente só pode inventar alguma coisa nova se a gente for um daqueles gênios que os retratos deles aparecem no livro do Iezzi, *e tudo que a gente inventar tem que ter um "porquê" muito bom...* e aí, por exemplo, se na historinha acima eu disse "Digamos que $f(x) = 3 - 2x$" isso é porque eu tou seguindo um método que vai resolver um problema importantíssimo, e o aluno perguntou "Porquê?" porque ele não conseguiu ver nem qual era o problema e nem qual era o método.

No Maxima é super fácil definir funções novas, então a gente pode tratar ele como uma espécie de Lego, em que a gente vai tentar conectar as pecinhas a) porque é fácil, b) porque é legal, e c) porque aos poucos a gente vai aprender a montar coisas bacanas com elas.

No Maxima também é *relativamente* fácil definir operações novas. Veja o exemplo da página anterior, em que eu defini uma operação "`_s_`".

Perguntar pro Maxima é "mais rápido" do que perguntar pro ChatGPT. Isso não é nada óbvio, então deixa eu explicar. Os seus objetivos são a) aprender certas técnicas de Cálculo 2 – que eu tou comparando com aprender a saltar 5 metros no salto com vara – e b) aprender coisas que sejam úteis pra outros cursos, e aí:

> Os músculos mentais que você vai exercitar traduzindo as suas idéias pra código em Maxima vão ser muito mais úteis pros objetivos (a) e (b) do que os músculos mentais que você vai exercitar conversando com o ChatGPT.

Eu não sou telepata...

A versão completa é:

> *Eu não sou telepata e pra mim é 100 vezes mais difícil descobrir as dúvidas das pessoas que não falam comigo do que as das pessoas que falam comigo.*

Isso aqui é um trecho de uma conversa que rolou no grupo de WhatsApp de Cálculo 3 em 2024.1:

Aluno: Professor, acho importante a gente ter acesso ao gabarito para saber se estamos fazendo certo ou não. Sem o gabarito podemos ter um raciocínio errado, e sem saber se está errado replica-lo na prova, e consequentemente tirar uma nota menor.

Eu: Péra – eu nunca tive acesso nem às provas dos outros professores do PURO, nem sem gabarito nem com gabarito... e eu prefiro que vocês me perguntem – ou aqui no grupo ou em privado – se tiver alguma questão que vocês que não conseguiram responder ou que vocês não têm certeza da resposta.

Deixa eu repetir: é 100 vezes mais difícil eu adivinhar as dúvidas de que não me pergunta do que entender as dúvidas de quem pergunta.

Desculpa a frustração e o desabafo, mas o que você tá dizendo é que você tem o direito de não fazer perguntas específicas e eu tenho a obrigação de adivinhar as perguntas que você não fez?

Quando a gente aprende a fazer perguntas que são boas o suficiente pra serem feitas até em fóruns públicos isso abre mil portas pra gente...

Eu tou desde o início tentando criar um ambiente em que as pessoas possam fazer até perguntas ruins, sem esse nível de exigência – então por favor façam até as perguntas que vocês acham ruins! Considerem que isso é um treino pro futuro...

E lembra disso aqui (de QuadradinhoP76):

> Sobre as opções de emprego oferecidas para os graduados, é um equívoco dizer que só há espaço para os profissionais bem formados, apesar de nós professores nos vermos, muitas vezes, tentados a fazer esse tipo de afirmação. Há vagas tanto para graduados bem formados, normalmente egressos de universidades públicas ou das particulares de qualidade, como para aqueles de formação mais superficial, normalmente egressos dos "escolões". Mas muda, obviamente, o tipo do cargo: enquanto o "escolão" é concebido para colocar as pessoas em subtarefas, como, no caso do curso de economia, trabalhos internos de agências bancárias e tarefas rotinizadas em geral, como supervisão de pesquisa de mercado feitas em rua etc., as universidades públicas e as particulares de ponta oferecem uma formação que dá maiores possibilidades de chegar aos cargos decisórios, como em consultorias, agências governamentais e em conselhos executivos de grandes empresas.

Eu tento fazer com que as pessoas aprendam muitas coisas úteis em pouco tempo.

Eu interagi muito pouco com você até agora, mas ACHO que você deveria tentar "aprender a perguntar" - o que não é nada fácil - e que você deveria começar a aprender o Maxima.

Se nós estivéssemos numa universidade melhor a gente teria licenças pros alunos usarem Mathematica ou Maple, que são parecidos com Maxima mas são bem documentados e mais fáceis de usar... mas não estamos, e eu só posso ajudar vocês com o Maxima.

Eu não sou telepata... (2)

É tão desgastante tentar ajudar pessoas que não perguntam que eu tou usando alguns truques pra filtrar elas. Por exemplo, nas minhas intruções pra instalar o WSL, o Debian, o eev e o Maxima tem essa frase aqui:

> After setting the user and password you will get a Unix prompt.

Um cara do canal de IRC `#emacs` achou isso péssimo, e disse:

> do you expect them to know what a "Unix prompt" is?

e eu tive que explicar que eu não tenho como escrever instruções que expliquem tudo – até porque eu já vi estudantes de computação que não sabiam que o teclado tem um tecla chamada F8, estudantes que não sabiam que espaços importam e que digitaram "`wsl-l-v`" ao invés de "`wsl -l -v`" e não faziam idéia de como resolver os erros, e mil outras coisas parecidas apavorantes...

...então frases como

> After setting the user and password you will get a Unix prompt.

são um teste e um filtro...

Como passar em C2: método 2

O método 1 é óbvio: tire suas dúvidas durante as aulas, instale o Maxima, e treine um pouco em casa. Não vale a pena falar dele.

O método 2 é assim: faça uma reclamação pra coordenação dizendo que eu sou maluco, que eu dei provas em que eu cobrei coisas que não estavam no Stewart e que portanto não fazem parte do conteúdo do curso, e que você não conseguiu estudar em casa só pelo Stewart, por vídeos e pelo ChatGPT. O PURO agora está cheio de professores burnouteados que "não têm tempo" de ler nada e "não têm tempo" de abrir link nenhum, e tem boas chances da sua reclamação ser recebida por um professor desses – e que seja um dos que acha eu sou um irresponsável incorrigível. Aí ele não vai verificar nada, vai mandar um ofício pro RCN pedindo que eu não dê mais matérias obrigatórias, e vai pedir pra sua prova ser recorrigida por uma banca de três outros professores... mas repara, tem bastante chance – 50%? – da sua reclamação ser recebida por professores que não são assim, e ela ser ignorada.

O método 3 me parece mais garantido: é você fazer um "Requerimento de Revisão de Prova". Os alunos têm direito de pedir isso sempre que quiserem, e aí a sua prova vai ser recorrigida por uma banca de três professores do RCN – que geralmente são professores burnouteados que "não têm tempo" de ler nada e "não têm tempo" de abrir link nenhum.

A Banca Maluca

Depois que você receber uma prova e fizer a vista de prova dela você pode fazer um “Requerimento de Revisão de Prova”, e aí a sua prova vai ser recorrigida pela Banca Maluca – uma banca de três professores de Matemática, que não são sempre os mesmos, mas vou chamá-la de “A Banca Maluca” mesmo assim.

Você pode ver alguns relatórios da Banca Maluca aqui:

[*Link*]

Eu já tentei entender os critérios de correção da Banca Maluca e não consegui – e também não consegui entender o que a BM considera que são os objetivos do curso de Cálculo 2, e nem como a BM lida com aipins e com outras técnicas que as pessoas deveriam ter aprendido no Ensino Médio...

Não sei se vocês sabem, mas logo depois da quarentena, em 2022.1, os meus colegas abriram um mega-processo contra mim por eu ter aprovado alunos demais durante a pandemia, e me mandaram dar provas carrascas e reprovar todo mundo que não soubesse o suficiente de C2 e C3...

...e aí no início de 2022.2 me pediram pra dar uma VS extra de cada uma das minhas turmas de 2022.1 – apesar do semestre seguinte já ter começado – e resolveram que essas VSs extras seriam abertas pra todos os reprovados. Eu preparei provas com gabaritos que eu achei que tavam bem explicados, corrigi elas, uma Banca Maluca recorrigiu elas, e só varios meses depois eu descobri que a Banca Maluca tinha aprovado um monte de gente, inclusive uma pessoa que tinha tirado 0 na minha correção, e uma outra pessoa, que tinha tirado 1.5 na minha correção mas não tinha feito nenhuma outra prova além dessa VS extra...

Critérios de correção

Imagina que o Alex fez uma prova parecida com a P2 de 2023.2. No item 1b dele o resultado certo era $y = \sqrt{C - x^2}$, mas ele obteve $y = \sqrt{C + x^2}$; e no item 1c ele deveria encontrar o C que fazia $3 = \sqrt{C - 4^2}$ ser verdade, que era $C = 25$, mas ao invés disso ele encontrou o C que fazia $3 = \sqrt{C + 4^2}$ ser verdade, e chegou a $C = -7$. E no item 1d a resposta certa era $y = \sqrt{16 - x^2}$, e ele chegou a $y = \sqrt{-7 + x^2}$. Além disso essa questão tinha um item 1e, que pedia pras pessoas testarem se as soluções delas obedeciam uma certa equação diferencial, mas o Alex não teve tempo de fazer esse item.

O erro dele no item 1b se propagou pros itens 1c e 1d – e se ele tivesse feito o item 1e ele veria que tinha um erro de conta em algum item anterior, teria encontrado o erro de sinal nas contas dele do item 1b, e teria consertado esse erro e todo o resto.

Dá pra considerar que o Alex só cometeu um erro pequeno? Isso depende dos critérios de correção, e os critérios de correção dependem do objetivo do curso.

Numa correção mais benevolente a gente consideraria que o objetivo dessa questão era ver se os alunos sabem aplicar um certo método. E tá claro que o Alex sabe aplicar esse método *quase* perfeitamente, então ele perderia 0.1 no item 1b e nada nos itens seguintes, porque todas as outras contas dele estavam coerentes com o resultado dele pro item 1b – então ele não cometeu nenhum outro erro.

Pra mim – PRA MIM – o objetivo de Cálculo 2 é preparar as pessoas pros cursos seguintes. Em Cálculo 2 a gente *aprendia* (no passado mesmo! Mais sobre isso em breve!) a fazer contas enormes – tipo resolver integrais complicadas – na mão, e a chegar no resultado certo... e em contas tão grandes é quase impossível chegar no resultado certo direto sem errar, então o mais importante *pros cursos seguintes* era que as pessoas aprendiam um monte de técnicas pra fazer as contas ficarem muito fáceis de revisar.

Se o Alex tivesse bastante prática em revisar as contas dele ele teria visto o erro de sinal no item 1b dele e teria consertado o resto das contas dele, né, mas ele não viu esse o erro, então as respostas dele mostram que ele ainda não tá bom o suficiente nem em fazer contas fáceis de revisar e nem em revisar as próprias contas... aí, se o objetivo do curso é fazer as pessoas aprenderem a fazer contas fáceis de revisar, então os erros do Alex são bem graves, e ele tira 0 nos item 1c e 1d.

Agora há pouco eu disse que em Cálculo 2 as pessoas aprendiam a "resolver integrais enormes na mão". Vamos dividir isso em dois subobjetivos diferentes: 1) "resolver integrais" e 2) "enormes na mão".

Hoje em dia a gente tem programas de computação simbólica que resolvem integrais muito bem, então se os alunos aprendem a usar algum desses programas eles num certo sentido aprenderam a "resolver integrais"... e aí é melhor trabalhar o segundo subobjetivo, que é (aprender a fazer contas) "enormes na mão" (e chegar no resultado certo), de um outro modo, treinando técnicas pra fazer contas fáceis de revisar.

Outra coisa: alunos que aprendem a usar programas de computação simbólica conseguem usar esses programas pra revisar os passos difíceis das contas deles quando eles estão estudando em casa, e acabam conseguindo estudar bem melhor.

Voltando aos critérios de correção: às vezes a gente decide se um erro numa prova é pequeno ou não olhando o resto da prova da pessoa e as provas anteriores dela... e aí se der pra ver pelo resto da prova do Alex que ele sabe bem um monte de técnicas pra fazer "contas fáceis de revisar" então dá pra considerar que o erro de sinal dele é um erro pequeno e dar mais pontos pra ele, e se ele fez a prova relâmpago de Maxima e se deu super bem nela então eu posso considerar que ele aprendeu mais técnicas importantes, tanto pra "resolver integrais" como pra "revisar contas complicadas em casa", e posso dar mais pontos pra ele.

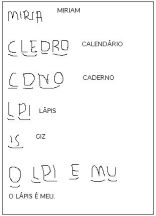
Agora vamos considerar que o Carlos resolveu os itens 1b, 1c e 1d da prova exatamente da mesma forma que o Alex, e que o Carlos também não fez o item 1e – mas as provas do Alex e do Carlos são totalmente diferentes no resto... o Alex mostrou que sabe um monte de técnicas pra fazer "contas fáceis de revisar" mas o resto da prova do Carlos é uma bagunça, e o Carlos vem na vista de prova e insiste que os erros dele são pequenos e que o objetivo do curso é só aprender métodos pra resolver integrais e EDOs... bom, desde o final de 2024.1 a gente tem uma solução maravilhosa pra isso – o Requerimento de Revisão de Prova!

Em 2024.1 quatro alunos de Cálculo 2, A_1, A_2, A_3 e A_4, fizeram Requerimentos de Revisão de Prova pedindo que a P1 de Cálculo 2 deles fosse recorrigida. O departamento montou uma banca com três professores de Matemática, B_1, B_2 e B_3, e o membro B_1 da banca entrou em contato comigo da banca me pediu as provas e o gabarito delas. Eu criei um grupo de Whatsapp comigo e com o B_1, o B_2 e o B_3, e mandei um monte de material – incluindo o PDFzinho "Introdução ao curso", que fala a beça sobre os objetivos do curso e critérios de correção, e os "Exercícios de substituição", que explicam a questão sobre o '[:=]'...

Este link conta as partes mais importantes da história:
http://anggtwu.net/2024-rev.html

Fase pré-silábica

Uma das coisas que eu acho mais desesperadoras no curso de Cálculo 2 é que em C2 a posição de cada símbolo importa MUITO, e sempre tem muitos alunos que não conseguem ver isso... eu adoraria conversar com pedagogues sobre isso, porque elxs têm até os termos pras fases da alfabetização em que as crianças não notam que tem letras faltando ou letras fora de ordem no que elas escrevem, e aí elas escrevem coisas como isso aqui,



e escrevem "VROOEA" ao invés de árvore... obs: eu perdi o scan que tinha o "vrooea" – eu procurei bastante no Google por "fase pré-silábica" e "fase silábica-alfabética" mas não achei...

Eu imagino que pedagogues tenham em montes de técnicas e exercícios pra fazer as crianças passarem pra fase seguinte, *mas eu não tenho* – e aí de vez em quando eu tenho que lidar com alunos que escreveram tudo de um jeito caótico e que ficam berrando comigo na vista de prova que "MAS TÁ CERTO, PORRA!!!", ou "TÁ IGUAL!!! TÁ IGUAL!!!", e tudo indica que eles estão numa fase em que *pra eles* a ordem, a posição, o tamanho e o alinhamento do símbolos *ainda* não importa, e EU não sei fazer eles passarem pra fase seguinte... então o melhor que eu consigo fazer por enquanto é pedir pra eles aprenderem programas como Maxima, LaTeX ou Lean, e dizer pra eles pedirem pras provas deles serem recorrigidas pela Banca Maluca...

"Meu objetivo é..."

Cálculo 2 tem vários assuntos que funcionam assim: se você tentar aprender o assunto B direto ele é muito, muito, muito difícil, e você vai gastar – digamos – 200 horas de estudo pra aprender ele... mas se você aprender o assunto A primeiro você consegue aprender os dois assuntos, A e B, em 20 horas ao invés de 200.

O caso mais extremo disso é nomear objetos. Nas primeiras aulas do curso nós vamos fazer um monte de exercícios de desenhar funções definidas por casos, como essa aqui:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{se } x < 2, \\ x - 2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

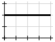
A maioria das pessoas chega em Cálculo 2 achando isso incrivelmente difícil. Elas acham que isso aí não é uma função, são duas, e aí elas fazem um desenho errado, e quando a gente vai discutir pra elas descobrirem os erros eu vejo que elas chamam $f(x)$ de "a função", o gráfico delas de "a função", $3 - x$ de "a função", e $x - 2$ de "a função".

Se elas aprenderem a "nomear objetos" elas vão conseguir fazer algo como isso aqui,

Sejam:

$$\begin{array}{rcl} f(x) &=& \begin{cases} 3 - x & \text{se } x < 2, \\ x - 2 & \text{se } x \geq 2, \end{cases} \\ f_1(x) &=& 3 - x \\ f_2(x) &=& x - 2 \end{array}$$

$f_3(x) =$ 

$f_4(x) =$ 

$f_5(x) =$ 

Então $f(x) = f_5(x)$ para todo x.

...e aí vai ser super rápido ajudar elas a verificarem tudo, e encontrarem o erro.

Aqui – usando os meus número inventados – se uma pessoa gastar 19 horas aprendendo a nomear objetos ela consegue aprender todo o resto em 1 hora, e se ela resolver não aprender a nomear objetos ela vai levar 200 horas pra aprender a desenhar funções definidas por casos.

"Meu objetivo é reprovar pessoas como você"

Aprender a nomear objetos dá um trabalhão, então a maior parte das pessoas resolve que vai deixar pra depois, e aí deixa pra véspera da prova, e se ferra.

Dá pra passar em Cálculo 2 sem aprender a nomear objetos? Dá, você só vai perder 4 pontos na P2, então dá pra passar raspando sim... mas eu já passei da fase em que eu achava ok só avisar as pessoas um montão de vezes e depois dizer "hahaha, se ferrou, eu avisei!!!"...

...então agora eu vou fazer o seguinte: mesmo que você tenha um motivo muito bom pra não aprender a nomear objetos – tipo: você apostou 50000 reais com um grupo de colegas seus que você consegue passar em Cálculo 2 sem aprender a nomear objetos, então vale a pena correr o risco – *eu não vou ajudar as pessoas que resolveram que não vão aprender a nomear objetos.* Se você resolveu que não vai aprender a nomear objetos AGORA, então toda vez que você vier me pedir ajuda eu só vou repetir isso aqui...

> Um dos meus objetivos nesse curso é reprovar as pessoas que não aprenderam a nomear objetos. Se você ainda não sabe nomear objetos então vire uma pessoa que sabe nomear objetos URGENTE!!!

...só que isso é muito comprido, então às vezes eu vou abreviar pra:

> MEU OBJETIVO É REPROVAR PESSOAS COMO VOCÊ!!!

e vou mandar a pessoa reler estes slides.

TÁ???????

Árvores caem na prova?

Tem vários assuntos que a gente vai ver em Cálculo 2 que vão ser importantes não porque eles vão cair explicitamente na prova, mas porque eles vão te ajudar a estudar pra prova.

Já teve alguma vez em que você tentou estudar algo de Matemática, não entendeu nada, e ficou paralisado? Sim, né? Acontece com todo mundo, principalmente em assuntos mais avançados...

A gente vai aprender a ver expressões como árvores porque isso vai nos ajudar a não ficar paralisado. Árvores não vão nos ajudar em *todos* os casos de "caraca, não tou entendendo nada" – *mas vão nos ajudar em muitos casos.*
(Explicar nomear e apontar)
(Explicar comectivos omitidos: multiplicação, aplicação, listas, matrizes...)

Como perder pontos na vista de prova

Cálculo 2 (“C2”) é MUITO diferente de Cálculo 1 (“C1”).

As técnicas que você aprendeu em C1 vão te ajudar em C2, mas você VAI TER QUE aprender um monte de técnicas novas. Os critérios de correção de provas em C2 vão ser bem diferentes dos de C1, e as vistas de prova em C2 vão funcionar de um jeito bem diferente das vistas de C1, principalmente por isso aqui:

> Se você vier numa vista de prova de C2 e tentar me explicar o que você *pensou* quando você escreveu a resposta de uma questão eu vou considerar que você não entendeu nada do curso de C2, *não leu nada do material do curso*, e que você *merece um zero*.

Isso é porque C2 é um curso *bem* mais avançado que C1. Em C1 não dá pra ensinar as pessoas a escreverem direito – isso acontece em C2.

Nas provas de C2 eu vou avaliar se vocês treinaram certas coisas bastante. Sob um ponto de vista o que eu vou avaliar é se vocês conseguem escrever as respostas de vocês de modo que cada passo seja fácil de justificar; sob outro ponto de vista o que eu vou avaliar é *se vocês já têm muita prática em reler as respostas de vocês como se vocês fossem uma outra pessoa e em ver o que pode ser melhorado.*

Pedaço de semicírculo: seja como o Bob

Imagina que você está numa turma de Cálculo 2 que tem dois "Alex"es – vou chamar eles de Alex 1 e Alex 2 – e um Bob. Numa das provas dessa turma cai uma questão assim, sobre uma fórmula que calcula a área de um pedaço de um semicírculo:

Calcule:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Tanto o Alex 1 quanto o Alex 2 respondem essa questão dizendo só isso aqui,

$$\frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen}(x) + x\sqrt{1-x^2}\right)$$

e o Bob entrega uma resposta que tem uma página inteira de contas. Aí na vista de prova o Bob está feliz porque ganhou todos os pontos dessa questão e tanto o Alex 1 quanto o Alex 2 estão putíssimos porque ganharam 0, e porque não conseguiram me convencer a aumentar as notas deles.

O argumento do Alex 1 foi "pô, professor, a resposta tá certa, eu vi num livro e eu lembrava a fórmula, e eu até conferi ela no computador depois", o argumento do Alex 2 foi "pô, professor, a resposta tá certa, eu fiz as contas de cabeça e pensei tudo direito, eu só não escrevi"...

Seja como o Bob!

Porque é que os Alexes tiraram 0?
Que critério de correção eu usei aí?
Que critério de correção eu vou usar no curso?
Que nível de detalhe eu espero nas respostas?

Eu vou precisar de várias páginas pra responder tudo isso.

"Releia a Dica 7"

http://anggtwu.net/2021-1-C2-somas-1-dicas.html
http://anggtwu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=5

1) Aprenda a testar tudo: contas, possíveis soluções de equações, representações gráficas de conjuntos...
2) Cada "seja" ou "sejam" que aparece nestas folhas é uma definição, e você pode usá-los como exemplos de definições bem-escritas (ééé!!!!) pra aprender jeitos de escrever as suas definições.
3) Em "matematiquês" a gente quase não usa termos como "ele", "ela", "isso", "aquilo" e "lá" — ao invés disso a gente dá nomes curtos pros objetos ou usa expressões matemáticas pra eles cujo resultado é o objeto que a gente quer... mas *quando a gente está discutindo problemas no papel ou no quadro* a gente pode ser referir a determinados objetos *apontando pra eles com o dedo* e dizendo "esse aqui".
4) Se você estiver em dúvida sobre o que um problema quer dizer tente escrever as suas várias hipóteses — a prática de escrever as suas idéias é o que vai te permitir aos poucos conseguir resolver coisas de cabeça.
5) Muitas coisas aparecem nestas folhas escritas primeiro de um jeito detalhado, e depois aos poucos de jeitos cada vez mais curtos. Você vai ter que aprender a completar os detalhes.
6) Alguns exercícios destas folhas têm muitos subcasos. Nos primeiros subcasos você provavelmente vai precisar fazer as contas com todos os detalhes e verificá-las várias vezes pra não errar, depois você vai aprender a fazê-las cada vez mais rápido, depois vai poder fazê-las de cabeça, e depois você vai começar a visualizar o que as contas "querem dizer" e vai conseguir chegar ao resultado graficamente, sem contas; e se você estiver em dúvida se o seu "método gráfico" está certo você vai poder conferir se o "método gráfico" e o "método contas" dão aos mesmos resultados.
7) Uma solução bem escrita pode incluir, além do resultado final, contas, definições, representações gráficas, explicações em português, testes, etc. Uma solução bem escrita é fácil de ler e fácil de verificar. Você pode testar se uma solução sua está bem escrita submetendo-a às seguinte pessoas: a) você mesmo logo depois de você escrevê-la — releia-a e veja se ela está clara; b) você mesmo, horas depois ou no dia seguinte, quando você não lembrar mais do que você pensava quando você a escreveu; c) um colega que seja seu amigo; d) um colega que seja menos seu amigo que o outro; e) o monitor ou o professor. Se as outras pessoas acharem que ler a sua solução é um sofrimento, isso é mau sinal; se as outras pessoas acharem que a sua solução está claríssima e que elas devem estudar com você, isso é bom sinal. *GA é um curso de escrita matemática:* se você estiver estudando e descobrir que uma solução sua pode ser reescrita de um jeito bem melhor, não hesite — reescrever é um ótimo exercício.

Linguagem formal, gramática, sintaxe

Veja se você consegue entender a figura da próxima página...
Eu peguei ela daqui, com pequenas adaptações:
https://en.wikipedia.org/wiki/Context-free_grammar

A parte à esquerda dela é a “gramática” de uma certa linguagem formal, e a parte à direita dela mostra como uma certa expressão é “parseada” nessa linguagem formal.

Todas as linguagens de programação têm gramáticas bem definidas. Quando a gente está trabalhando numa linguagem com uma gramática bem definida é fácil definir quais expressões são válidas nela – uma expressão é válida quando ela é “parseável” – e quais expressões têm erros de sintaxe – as que não são “parseáveis”.

Em Prog 1 você aprendeu C, e você viu que o compilador podia rejeitar os seus programas por vários motivos... por exemplo:
1. erros de sintaxe,
2. erros de tipo,
3. símbolos não declarados.

Se você quiser entender direito como compiladores detectam erros dos tipos 2 e 3, dê uma olhada na página 99 do livro do Thain:
https://www3.nd.edu/~dthain/compilerbook/compilerbook.pdf#page=113

$\langle\mathsf{Stmt}\rangle$	$\rightarrow$	$\langle\mathsf{Id}\rangle$ $=$ $\langle\mathsf{Expr}\rangle$;
$\langle\mathsf{Stmt}\rangle$	$\rightarrow$	{ $\langle\mathsf{StmtList}\rangle$ }
$\langle\mathsf{Stmt}\rangle$	$\rightarrow$	`if` ($\langle\mathsf{Expr}\rangle$) $\langle\mathsf{Stmt}\rangle$
$\langle\mathsf{StmtList}\rangle$	$\rightarrow$	$\langle\mathsf{Stmt}\rangle$
$\langle\mathsf{StmtList}\rangle$	$\rightarrow$	$\langle\mathsf{StmtList}\rangle\langle\mathsf{Stmt}\rangle$
$\langle\mathsf{Expr}\rangle$	$\rightarrow$	$\langle\mathsf{Id}\rangle$
$\langle\mathsf{Expr}\rangle$	$\rightarrow$	$\langle\mathsf{Num}\rangle$
$\langle\mathsf{Expr}\rangle$	$\rightarrow$	$\langle\mathsf{Expr}\rangle$ $\langle\mathsf{Optr}\rangle$ $\langle\mathsf{Expr}\rangle$
$\langle\mathsf{Id}\rangle$	$\rightarrow$	`x`
$\langle\mathsf{Id}\rangle$	$\rightarrow$	`y`
$\langle\mathsf{Num}\rangle$	$\rightarrow$	`0`
$\langle\mathsf{Num}\rangle$	$\rightarrow$	`1`
$\langle\mathsf{Num}\rangle$	$\rightarrow$	`9`
$\langle\mathsf{Optr}\rangle$	$\rightarrow$	$>$
$\langle\mathsf{Optr}\rangle$	$\rightarrow$	$+$

$$\underbrace{\texttt{if}\ (\ \underbrace{\underbrace{\underbrace{\texttt{x}}_{\langle\mathsf{Id}\rangle}}_{\langle\mathsf{Expr}\rangle}\ \underbrace{>}_{\langle\mathsf{Optr}\rangle}\ \underbrace{\underbrace{\texttt{9}}_{\langle\mathsf{Num}\rangle}}_{\langle\mathsf{Expr}\rangle}}_{\langle\mathsf{Expr}\rangle}\ )\ \underbrace{\underbrace{\{\ \underbrace{\underbrace{\underbrace{\texttt{x}}_{\langle\mathsf{Id}\rangle} = \underbrace{\underbrace{\texttt{0}}_{\langle\mathsf{Num}\rangle}}_{\langle\mathsf{Expr}\rangle}\ ;}_{\langle\mathsf{Stmt}\rangle}}_{\langle\mathsf{StmtList}\rangle}\ \underbrace{\underbrace{\texttt{y}}_{\langle\mathsf{Id}\rangle} = \underbrace{\underbrace{\texttt{y}}_{\langle\mathsf{Expr}\rangle}\ \underbrace{+}_{\langle\mathsf{Optr}\rangle}\ \underbrace{\texttt{1}}_{\langle\mathsf{Expr}\rangle}}_{\langle\mathsf{Expr}\rangle}\ ;}_{\langle\mathsf{Stmt}\rangle}\ \}}_{\langle\mathsf{StmtList}\rangle}}_{\langle\mathsf{Stmt}\rangle}}_{\langle\mathsf{Stmt}\rangle}$$

A linguagem formal de Cálculo 2

Péssima notícia 1:
Nenhum livro define precisamente a gramática da "linguagem" de Cálculo 2. Você vai ter que deduzir quais expressões são válidas lendo os livros do curso – principalmente o Leithold e o Miranda – e os meus slides com muita atenção, escrevendo a beça, checando se as suas expressões seguem as mesmas regras que as deles, e discutindo com os seus colegas, comigo, e com o monitor.

Péssima notícia 2:
Cálculo 2 não tem uma linguagem só, tem várias! Por exemplo, em alguns momentos do curso a gente vai permitir a "notação de Leibniz", na qual expressões como $\frac{dy}{dx}dx = dy$ fazem sentido... mas a gente só vai conseguir entender a notação de Leibniz direito se a gente considerar que "Cálculo 2 sem notação de Leibniz" e "Cálculo 2 com notação de Leibniz" são duas linguages diferentes, como, sei lá, C e C++, e se a gente entender como *traduzir* expressões em "Cálculo 2 com notação de Leibniz" para "Cálculo 2 sem notação de Leibniz".

$2+3=5$	sempre
$2+3 \to 5$	**NUNCA**
$\underbrace{2+3}_{5}$	sempre
$\frac{dy}{dx}dx = dy$	às vezes
$\int \operatorname{sen} x \, dx$	sempre
$\int \operatorname{sen} x$	**NUNCA**
$\int f\,dx = \int f(x)\,dx$	às vezes
$y = y(x)$	às vezes
$(a \cdot 10)[a := 4] = 4 \cdot 10$	sempre
$(a \cdot 10)[a := 4] = 40$	**NUNCA**
Quando $x=3$ temos f(x)=42	sempre
Quando $x=3$ temos f=42	**NUNCA**

Sintaxe

Em Prog 1 você aprendeu a usar uma linguagem – o C – com uma sintaxe que era totalmente nova pra você, e a cada aula você aprendia mais algumas construções sintáticas – ou, pra encurtar, "sintaxes" – que o compilador entendia. E você deve ter dado uma olhada de relance, durante poucos segundos, na sintaxe completa do C em BNF, que é o apêndice A do Kernighan & Ritchie... na versão do K&R que eu tenho esse apêndice A tem 9 páginas. É algo parecido com isso aqui:

http://www.csci-snc.com/ExamplesX/C-Syntax.pdf
https://www2.cs.arizona.edu/~debray/Teaching/CSc453/DOCS/cminusminusspec.html

O pessoal de computação tem duas matérias sobre isso. Em Linguagens Formais eles aprendem a definir matematicamente as linguagens que um computador possa entender, e em Compiladores ele aprendem a fazer programas que entendem certas "linguagens formais" e "compilam" "programas" escritos nessas linguagens.

Quase tudo nessas duas matérias é bem difícil de entender, mas algumas poucas idéias são fáceis e a gente vai usar elas pra entender algumas sintaxes que vão ser usadas em C2 e que devem ser novas pra quase todo mundo... por exemplo estas,

$$\sum_{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle}^{\langle\mathsf{expr}\rangle} \langle\mathsf{expr}\rangle$$

$$\int_{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle}^{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle} \langle\mathsf{expr}\rangle \, d\langle\mathsf{var}\rangle$$

$$\langle\mathsf{expr}\rangle\Big|_{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle}^{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle}$$

$$\forall\langle\mathsf{var}\rangle\in\langle\mathsf{expr}\rangle.\ \langle\mathsf{expr}\rangle$$

$$\exists\langle\mathsf{var}\rangle\in\langle\mathsf{expr}\rangle.\ \langle\mathsf{expr}\rangle$$

e as notações de "set comprehensions" daqui: Mpg8

Justificativas

A linguagem de Cálculo 2 não tem uma gramática totalmente definida, como o C. Cada livro usa convenções um pouco diferentes, e TODOS ELES supõem que o leitor vai aprender a sintaxe certa só lendo o livro e estudando – não há um compilador no qual a gente possa digitar expressões de Cálculo 2 e que vá dizer "Syntax error" onde a gente errar. O máximo que a gente tem são alguns programas que entendem *algumas* expressões de Cálculo 2 escritas em ascii e que sabem converter essas expressões pra formatos mais bonitos. Por exemplo:
`https://docs.sympy.org/latest/tutorial/printing.html`

Existem programas que entendem demonstrações e que são capazes de checar cada passo de uma demonstração pra ver se ele está correto. Eles geralmente precisam de um monte de dicas sobre qual é a justificativa de cada passo – essas dicas são *mais ou menos* como a parte à direita dessa demonstração aqui, que aparece na página 370 do livro do Thomas:

Using Substitution

$$\begin{aligned}
\int \cos(7\theta+5)\,d\theta &= \int \cos u \cdot \frac{1}{7}\,du && \text{Let } u = 7\theta+5,\ du = 7\,d\theta,\ (1/7)\,du = d\theta. \\
&= \frac{1}{7}\int \cos u\,du && \text{With the } (1/7) \text{ out front, the integral is now in standard form.} \\
&= \frac{1}{7}\sin u + C && \text{Integrate with respect to } u, \text{ Table 4.2.} \\
&= \frac{1}{7}\sin(7\theta+5) + C && \text{Replace } u \text{ by } 7\theta+5.
\end{aligned}$$

Eu comecei a aprender um desses "programas que entendem demonstrações" em 2021 – o Lean:
`https://www.ma.imperial.ac.uk/~buzzard/xena/`
Ele é considerado muito mais fácil de usar que os "proof assistants" anteriores a ele mas ele ainda é bem difícil. Existem tutoriais pra ele nos quais os usuários têm que demonstrar na linguagem do Lean montes de exercícios de Matemática Discreta e Cálculo 1, mas acho que ainda falta bastante pra alunos de primeiro período conseguirem resolver os seus exercícios na linguagem do Lean.

Eu vou fazer algumas referências ao Lean no curso, meio como curiosidade e meio por conta de uma coisa cuja explicação é meio longa. Lá vai.

Uma das coisas que me dá mais ódio é ter que lidar com alunos que escrevem um monte de contas totalmente sem pé nem cabeça nas provas e depois juram que "tava tudo certo, caramba" e que eu só dei nota baixa pra eles porque eu tava de marcação com eles. E tem uma coisa que me dá tipo 1/100 desse ódio, que é lidar com alunos que fazem demonstrações nos quais eles pulam montes de passos e juram que tudo que eles fizeram "é óbvio".

Neste curso nós vamos ver as definições precisas de *alguns tipos* de "passos óbvios" que aparecem em demonstrações e contas que são comuns de Cálculo 2. A maioria das demonstrações que nós vamos ver são por sequências de igualdades, e vão ter este formato:

$$\begin{array}{rcll}
\langle\text{expr}\rangle & = & \langle\text{expr}\rangle & \langle\text{justificativa}\rangle \\
 & = & \langle\text{expr}\rangle & \langle\text{justificativa}\rangle \\
 & = & \langle\text{expr}\rangle & \langle\text{justificativa}\rangle \\
 & = & \langle\text{expr}\rangle & \langle\text{justificativa}\rangle
\end{array}$$

A operação de substituição que eu vou explicar nos próximos slides vai servir pra ZILHÕES de coisas durante o curso – entre elas pra gente entender quais passos da forma abaixo são "óbvios":

$$\langle\text{expr}\rangle \quad = \quad \langle\text{expr}\rangle \qquad \langle\text{justificativa}\rangle$$

Obs: eu copiei o texto acima daqui: 2dT8
Falta revisá-lo!

Atirei o Pau no Gato: seja como o Bob

Imagina que você está fazendo aula de flauta doce junto com o Alex e o Bob, e na prova vocês vão ter que tocar Atirei o Pau no Gato.
O Alex demora um tempão pra encontrar cada nota, e ele leva meia hora pra tocar a música toda.
O Bob toca a música toda certinha em menos de 30 segundos.
Quando saem as notas o Alex tirou uma nota baixa e o Bob tirou 10.
Aí o Alex vai chorar pontos e diz "*pôxa, profe, eu me esforcei muito!*"

Quando o Bob tocou Atirei o Pau no Gato ele fez a música *parecer fácil*. O esforço dele *ficou invisível*.

Seja como o Bob!

O curso vai ter uma parte em que você vai ter que aprender a desenhar figuras com dezenas de retângulos e trapézios *em poucos segundos* – como o Bob tocando Atirei o pau no gato.

Se você for como o Alex, e levar mais de meia hora pra desenhar cada figura dessas, eu vou considerar que você não aprendeu os padrões que essas figuras seguem – e você não aprendeu a coisa mais importante.

Logo depois dessa parte do curso vai vir uma parte em que você vai ter que visualizar mentalmente (limites de) figuras feitas de infinitos retângulos e trapézios, e desenhar essas figuras. Se você for como o Alex você vai levar tempo infinito pra desenhar cada uma dessas figuras; se você for como o Bob você vai levar segundos.

Seja como o Bob!

Imagens de intervalos

Veja as páginas 5 e 7 daqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-somas-3.pdf#page=5

Digamos que na sua turma de Cálculo 2 tem dois Alexes diferentes, um Bob, um Carlos e um Daniel, e todo mundo tá tentando resolver um exercício que é o seguinte: "seja f a função da página 5 do link acima. Calcule $f([1,3])$".
Todo mundo reconhece que o intervalo $[1,3]$ é um conjunto com infinitos pontos, e cada pessoa tenta resolver esse exercício de um jeito diferente.

O Alex 1 decide começar listando todos os pontos do intervalo $[1,3]$. Ele vai primeiro obter uma lista de pontos que ele vai escrever nesse formato aqui,

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}$$

e depois ele vai simplificar esse conjunto daqui,

$$\{f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \ldots\}$$

transformando ele numa lista de números, pondo os números dessa lista em ordem e deletando as repetições... só que como o conjunto $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}$ é infinito ele nunca consegue terminar o primeiro passo.

O Alex 2 decide que ele vai pegar uma sequência de conjuntos finitos cada vez maiores, e "cada vez mais parecidos" com o conjunto $[1,3]$. Ele escolhe essa sequência aqui...

$$\begin{array}{rcl} A_1 &=& \{1,3\}, \\ A_2 &=& \{1,2,3\}, \\ A_3 &=& \{1,1.5,2,2.5,3\}, \\ A_4 &=& \{1,1.25,1.5,1.75,2,2.25,2.5,2.75,3\}, \ldots \end{array}$$

Ele calcula $f(A_1)$, $f(A_2)$, $f(A_3)$, $f(A_4)$ pelo gráfico usando o "jeito esperto" – como nas figuras da página 5 do link – e ele deduz, por um argumento informal e olhométrico, que $f([1,3])$ deve ser o intervalo $[3,4]$.

O Bob faz algo parecido como o Alex 2, mas ele encontra um modo de "levantar" todo o intervalo $[1,3]$ pro gráfico da função $y = f(x)$ de uma vez só, e de depois "projetar" pro eixo y esse "intervalo levantado". Ele obtém uma figura bem parecida com a última figura da página 5 do link, e ele descobre – também meio no olhômetro – que $f([1,3]) = [3,4]$.

O Carlos vê que é óbvio que $f([1,3]) = [f(1), f(3)] = \{3,3\} = \{3\}$, e portanto a imagem do intervalo $[1,3]$ pela função f é um conjunto com um ponto só. =(

O Daniel resolve que tudo isso é informal demais pra ele, e que ele precisa aprender um modo 100% preciso e formal de calcular $f([1,3])$ sem o gráfico. Ele descobre que vai ter que estudar uma coisa chamada "Análise Matemática", baixa o "*Elementary Analysis: The Theory of Calculus*" do Kenneth Ross, começa a estudar por ele e aprende coisa incríveis – mas ele leva um ano nisso.

Seja como o Bob!

Sobre Português

Muita gente aprende no Ensino Médio e nas matérias de primeiro período que “entender uma fórmula” quer dizer 1) traduzí-la pra português e 2) generalizá-la. Então é BEM comum uma pessoa ficar em dúvida se pode fazer um passo como este aqui numa conta,

$$\sqrt{42^2 + 99^2} = 42 + 99$$

e aí a pessoa me perguntar isso aqui:

> Professor, a raiz quadrada de um número ao quadrado mais outro número ao quadrado é o número mais o outro número?

É bem mais fácil discutir essa dúvida se a pessoa me fizer essa pergunta em notação matemática, ou me mostrando a igualdade acima e perguntando “isso aqui é verdade?”, ou me mostrando isso aqui,

$$\sqrt{42^2 + 99^2} \stackrel{?}{=} 42 + 99$$

que é bem mais bacana porque o ‘$\stackrel{?}{=}$’ deixa super claro que isso é uma igualdade que a pessoa não sabe se é verdade...

Se a pessoa me pergunta se isso aqui é verdade,

$$\sqrt{42^2 + 99^2} = 42 + 99 \qquad (*)$$

eu posso mostrar pra ela essa outra igualdade aqui – note que eu estou dando nomes como $(*)$ e $(**)$ pras igualdades –

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + y \qquad (**)$$

e aí eu pergunto “você quer saber se a $(**)$ é algo que vale sempre, né?”, e aí a pessoa responde “É! É isso!”, e aí eu consigo responder: se a $(**)$ valer sempre ela também vai valer no caso em que $x = 3$ e $y = 4$. Quando $x = 3$ e $y = 4$ a $(**)$ vira isso aqui:

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 3 + 4 \qquad (***)$$

e aí temos:

$$\underbrace{\underbrace{\sqrt{\underbrace{\underbrace{\underbrace{x}_{3}{}^{2}}_{9}+\underbrace{\underbrace{y}_{4}{}^{2}}_{16}}_{25}}}_{5} = \underbrace{3+4}_{7}}_{\mathbf{F}}$$

Ou seja, a igualdade $(***)$ é falsa, e portanto a $(**)$ não vale sempre.

Sobre Português (e generalizar)

Repara que eu não descobri se a igualdade $(*)$ era verdade ou não... eu convenci a pessoa a discutir a igualdade $(**)$ ao invés disso, porque eu "advinhei" que na verdade o que a pessoa queria saber era se a $(**)$ era verdade ou não. Além disso eu desmontei a pergunta original da pessoa – aliás, a pergunta sobre a $(**)$ – em várias perguntas menores.

Até alguns semestres atrás eu achava que todo chegava na universidade sabendo "generalizar" e "particularizar" (ou: "especializar") bastante bem... eu achava que as pessoas aprendiam isso assim que aprendiam a fazer "contas com letras" no Ensino Médio.

Vocês provavelmente vão ouvir histórias sobre como os meus cursos de Cálculo em 2022.1 – logo depois do fim da quarentena – foram os piores cursos *do universo*. Uma boa parte da razão pra isso foi que eu fiquei tentando encontrar modos de ensinar as pessoas a generalizarem e particularizarem, e fui descobrindo que essas coisas são muito mais difíceis de aprender e de ensinar do que eu pensava.

A pessoa do slide anterior achava que só podia fazer uma pergunta se ela 1) generalizasse a pergunta dela, e 2) traduzisse a pergunta dela pra Português. Acho que ela achava que tinha que tratar essas duas coisas como se fossem fáceis e óbvias – *mas não são*, e eu recomendo que a gente trate particularização/especialização como algo difícil em que é muito comum as pessoas terem dúvidas muito importantes que vale a pena discutir, "encontrar a generalização certa" como algo BEM difícil e BEM importante que a gente vai treinar explicitamente em vários exercícios difíceis e importantes do curso, e a gente vai ver que "traduzir pra português" é uma ferramenta bem menos útil do que parece. Quase todas as expressões matemáticas que a gente vai ver têm uma pronúncia padrão, mas vai ser bem comum a "tradução pra português" não nos ajudar nada, ou até nos atrapalhar, porque a gente vai ter que entender algumas palavras e expressões "como matemáticos" e não no sentido usual delas...

(Veja o próximo slide!)

Banana

Considere as quatro perguntas abaixo:

1. Qual é o resultado de substituir na palavra "banana" todas as letras 'a' por 'w'?
2. Qual é o resultado de substituir na palavra "banana" todas as letras 'o' por 'u'?
3. Qual é o resultado de substituir na palavra "banana" todas as letras 'A' por 'W'?
4. Qual é o resultado de substituir na palavra "blitiri" todas as letras '2' por '3'?

O resultado da 1 é bem fácil: "bwnwnw", mas a maioria das pessoas fica em dúvida nos outros itens... muitas pessoas respondem coisas como "não dá pra fazer o 2 porque "banana" não tem 'o' ", "não sei se o 3 tem que dar "bWnWnW" ou "bwnwnw" ", ou "não dá pra fazer o 4 porque "blitiri" não é uma palavra e '2' e '3' " não são letras"...

Neste curso, e em todos os cursos de matemática que vão vir depois dele, você vai ter que aprender a interpretar certas definições "como matemático": você vai ter que descobrir a interpretação mais simples possível que faça sentido, e essa idéia de "mais simples possível" vai ser bem parecida com *fazer o programa mais simples possível que obedeça uma certa especificação...*

Por exemplo:

o programa que responde "banana" no item 2 é bem mais simples do que o programa que primeiro testa se a palavra original tem alguma letra 'o', e dá erro se não tem;

o programa que responde "banana" no item 3 – porque ele considera que 'a' e 'A' são letras completamente diferentes, e "banana" não tem 'A' – é muito mais simples do que os programas que consideram que 'a' e 'A' são "letras parecidas";

o programa que responde "blitiri" no item 4 é muito mais simples do que os programas que testam se a palavra original é uma palavra válida e se as duas letras dadas são caracteres considerados como "letras".

Links:
Sobre áreas negativas e retângulos degenerados:
2cT185, 2cT185
2fT63, 2fT64

2gT20 Contexto / Sabemos que $2 = 3$. Então...
2gT38 O macaco substituidor: banana

Unexpected end of input

Uma coisa que me desesperava bastante era quando um aluno me mostrava algo como isso aqui,

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x) \cdot \beta(x)) = \alpha'(x) \cdot$$

e me perguntava "isso aqui tá certo?", ou: "é isso?"...
Aqui a pergunta mais precisa seria "esse início tá certo?", ou "como é que eu continuo?"... eu aqui eu poderia responder ou "não!" ou isto,

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x) \cdot \beta(x)) = \alpha'(x) \cdot \beta(x) + \alpha(x) \cdot \beta'(x)$$

só que a resposta que funciona melhor *didaticamente* é a seguinte:

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x) \cdot \beta(x)) = \alpha'(x) \cdot \qquad (*)$$

não é nem mesmo uma expressão válida, e um compilador que for analisar essa expressão vai abortar no meio do parsing e dizer "Unexpected end of input", que é um tipo específico de erro de sintaxe...

O melhor modo de discutir a dúvida da pessoa que perguntou o "isso aqui tá certo?" é ir consertando com ela a expressão dela passo a passo, e – **JURO** – o melhor modo de fazer isso é primeiro transformar a expressão dela em uma expressão que compile, como essa aqui:

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x) \cdot \beta(x)) = \alpha'(x) \cdot 42 \qquad (**)$$

que é uma igualdade – no sentido de que tem uma representação em árvore com o '=' no topo – é aí a gente pode começar a discutir coisas como:

- a igualdade $(**)$ é verdadeira para todas as funções $\alpha(x)$ e $\beta(x)$?
- a igualdade $(**)$ é um caso particular da regra do produto?

“Faz um vídeo explicando o PDF”

Em 2021 em fiz um vídeo – que ficou bem bom – pra responder os alunos que estavam dizendo “professor, faz um vídeo explicando o PDF”, e em 2023 eu legendei esse vídeo. Dá pra acessar as legendas e o vídeo nos links abaixo,

http://anggtwu.net/2021-1-C2-somas-1-dicas.html

e o trecho mais importante das legendas é esse aqui:

Então, cada PDF tem vários exercícios e muitas dezenas de idéias. Se vocês disserem só “faz um vídeo explicando o PDF” eu vou fazer um vídeo de 5 minutos explicando tudo de um PDF por alto porque eu não sei direito onde estão as dúvidas de vocês... mas vocês fizerem perguntas mais específicas aí eu consigo fazer vídeos bem mais detalhado sobre aquelas perguntas ou sobre aqueles exercícios... gente, vocês não estão discutindo para descobrir como resolver os problemas? O próximo passo, já que vocês estão empacados, é vocês passarem a discutir pra encontrar a boas perguntas pra fazer... aqui tem um outro trecho que eu não copiei, e deixa eu só ler isso aqui em voz alta também... gente, a matéria de matemática fica cada vez mais difícil à medida que as matérias ficam mais avançadas, e passa a ser comum ter trechos uma linha ou de um parágrafo nos livros-texto que vocês vão passar muitas horas tentando decifrar aquilo. Isso vai acontecer O TEMPO TODO... praticamente toda aula, toda página, todo vídeo vai acontecer isso, até o a última matéria de matemática na vida de vocês, então a questão é: como é que vocês podem fazer para não ficarem perdidos com isso, para não ficarem paralisados... voltando pro que eu escrevi aqui, o meu objetivo aqui é fazer vocês aprenderem se virar com isso, e a técnica para isso e vocês aprenderem a escrever as hipóteses de vocês e aprenderem a fazer perguntas. A maioria das perguntas vocês vão conseguir responder sozinhos, algumas vocês vão conseguir descobrir a resposta conversando com amigos – faltou um “s” aqui... – que também não sabiam a resposta, que vão descobrir junto com vocês, e umas poucas vocês vão empacar mesmo e não vão conseguir resolver sozinhos. Me mandem as dúvidas de vocês!

Um post da Ana Leticia de Fiori

Em 19/fev/2023 a Ana Letícia de Fiori
postou isso aqui no Facebook:

AL: Um fenômeno curioso que tenho observado entre estudantes que declaram ter “travas de escrita”, ficarem “empacados” ao desenvolver trabalhos de conclusão de disciplinas ou de curso. Frequentemente, a alegação é de que o “perfeccionismo” faz com que travem.
Eu tenho provocado, perguntado sobre quais são os gatilhos, quais os momentos em que eles sentem que o bloqueio vem. Uma resposta é o confronto com o material coletado, sejam os dados sejam as referências levantadas. Materiais com os quais eles não conseguem lidar, no sentido radical da palavra lida. Não sabem trabalhar com as referências e com os dados. Porque não estão acostumados a ler.
Um dos efeitos disso são trabalhos bastante declaratórios, que clamam ter feito “revisões bibliográficas”, “levantamentos”, “análises de discurso”, etc. que, na verdade, jamais ocorreram. Ao finalmente escrever, despreza-se o que consta na literatura e se escreve de cabeça, com alguma citação aqui ou acolá utilizada como argumento de autoridade. Claro que o texto sai confuso, raso, impreciso.
Passa longe de um problema de perfeccionismo. Mas é assim que se mascara a falta de perícia no ofício acadêmico.
E, recentemente, numa reunião entre pares, ouvi dizerem que para evitar os eternos problemas de plágio e os novos problemas dos softwares de IA, vão só realizar atividades orais e de escrita em sala de aula. Isso me apavora, porque o tempo de maturação de um trabalho acadêmico não é o tempo da sala de aula. E vai ser mais uma instância a sumir da experiência desses estudantes.

E: Nossa, eu tou exatamente tentando escrever sobre um outro tipo de ”perfeccionismo” que alguns dos meus estudantes têm e que eu ainda não tenho um modo muito bom de lidar com isso... São estudantes que assim que vêem que algo que eles escreveram está errado eles ou apagam ou jogam foram. Eu até tenho um monte de material - e slogans - sobre como o modo mais rápido de aprender assuntos difíceis de matemática é você escrever ”hipótese” ou ”rascunho” antes das partes que você não tem certeza e NÃO APAGAR NADA, NUNCA -
...mas não adianta, eles entram em pânico quando vêem que algo que eles escreveram não está perfeito - e aí eles não conseguem estudar...

AL: Mas aí é que está, a que parâmetros de perfeição eles se referem?
Esse comportamento de escrever e apagar tem a ver em parte com a fantasia de que o texto se compõe de uma vez só. Tendem a pular as etapas de estruturação de um roteiro, de rascunhos e revisões.
Quase como se o texto fosse psicografado. Eu costumo brincar com meus alunos que ninguém é Chico Xavier da antropologia, eles riem, mas teimam.
De novo, falta a dimensão do trabalho com o texto.
Perfeição, na fantasia dos alunos, é escrever sem esforço.

Retas reversas

O Alex, o Bob e o Carlos fizeram GA juntos. Um dos últimos assuntos do curso era uma fórmula pra calcular a distância entre "retas reversas" – é uma fórmula bem complicada, que tem um determinante e um produto cruzado – e cada um deles estudou esse assunto de um modo diferente.

O Alex e o Carlos "sabem" que o objetivo de cada matéria de Matemática é fazer as pessoas aprenderem certos teoremas. Os dois decoraram a fórmula da distância entre retas reversas e tentaram aplicar ela na prova. O Alex conseguiu, mas a questão da prova tinha vários itens e em todos eles ela usava letras diferentes das da fórmula que ele tinha decorado, e aí ele levou MUITO tempo pra resolver um item, e não conseguiu fazer os outros... e o Carlos tinha decorado a fórmula errado, e aí num determinado ponto da questão ele precisava dividir um número negativo por um vetor, e ele não sabia como fazer isso.

Tanto o Alex quanto o Carlos esqueceram a fórmula logo depois da prova.

O Bob estudou essa parte da matéria de um outro jeito. Ao invés de pensar "toda vez que eu precisar calcular a distância entre duas retas é só usar a fórmula" ele considerou que tem muitos casos simples em que ele sabe calcular a distância entre as retas no olhômetro – por exemplo, o caso em que uma das retas é paralela ao eixo x e a outra é paralela ao eixo y. Ele foi aprendendo como lidar com vários casos um pouco menos simples que esse, e aprendeu como visualizar o que aquela fórmula complicadíssima "quer dizer" – ela calcula a altura de um certo paralelepípedo.

O Bob tratou essa fórmula como algo que generaliza vários casos "simples" em que ele consegue calcular a distância entre duas retas por outros métodos, e ele usou esses casos simples pra testar se a fórmula realmente dá o resultado que ele esperava.

Tanto o Alex quanto o Bob quanto o Carlos "estudaram pelo livro", mas existem vários modos de "estudar pelo livro" e o Bob usou modos que nem o Alex nem o Carlos conheciam.

Neste curso você vai aprender – e treinar – vários modos de "estudar pelo livro" que provavelmente vão ser totalmente novos pra você.

Contexto

Quase todas as expressões matemáticas que usamos em C2 dependem do contexto. Por exemplo, a interpretação default pra esta expressão aqui:

$$f(x) = x - 9 = 2$$

é:

Para toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
e para todo $x \in \mathbb{R}$ temos:
$f(x) = x - 9 = 2$

Se você só escreve "$f(x) = x - 9 = 2$" e mostra isso pro "colega que seja seu amigo" ele vai levar meia hora tentando adivinhar qual foi o contexto que você estava pensando mas não escreveu...
...e se ele descobrir em menos de, digamos, 50 tentativas, ele vai dizer "ok, jóia, tá certo!".

O "colega que seja menos seu amigo" vai fazer menos tentativas, e os personagens "o monitor" e "o professor" da Dica 7 vão checar se o que você escreveu vai ser entendido corretamente por qualquer pessoa que saiba as convenções de como escrever matemática.

Lembre que quase todo mundo pára de ler um texto matemático quando vê uma besteira muito grande escrita nele. Imagine que um "colega que seja menos seu amigo" te mostra a solução dele pra um problema e te pergunta se está certa. A solução dele começa com:

Sabemos que $2 = 3$. Então...

O que você faria?

Dica: releia isto aqui:
Slogans27:07 até 32:45

Fórmulas e hipóteses

Dê uma olhada no Teorema 4 da seção 3.1 do Miranda: MirandaP80. Ele diz isso aqui:

> Se f e g são funções diferenciáveis em $x = a$ então a função $f + g$ é diferenciável em a e:
>
> $$(f+g)'(a) = f(a) + g(a).$$

Nós vamos considerar que esse *teorema* pode ser decomposto em duas partes: *fórmula* e *hipóteses*. A *fórmula* dele é esta aqui,

$$(f+g)'(a) = f(a) + g(a)$$

e em muitas situações nós vamos querer usar só as fórmulas de certos teoremas e deixar pra verificar as hipóteses delas no final.

Obs: falta acrescentar muita coisa aqui... explicar o que são contas formais, mostrar que o Mathologer só faz contas formais no vídeo dele sobre o "Calculus Made Easy", mencionar que em Cálculo 3 nós vamos usar o "Calculus Made Easy" e que todas as contas dele são formais, falar sobre a introdução do Martin Gardner pro CME e como ele explica que o conceito de "função" foi mudando...

Obs 2: tem um slide sobre contas formais aqui: 2gT36 (p.4) O macaco e as contas formais

Sobre aulas expositivas

Muitos alunos acreditam que se eles assistirem uma aula expositiva eles vão ser capazes de resolver na prova questões sobre o que eles aprenderam – só que isso só passa a ser *mais ou menos* verdade depois que a pessoa aprende *muito bem* como estudar.

Muita coisa em matemática funciona como músculos. Os músculos mentais que você usa pra entender uma aula expositiva são bem diferentes dos músculos mentais que você usa pra resolver exercícios, e os músculos mentais que você exercita quando você relê uma explicação que você escreveu e procura jeitos de reescrevê-la de um modo mais claro são diferentes desses...

Leia isto aqui:
Visaud39:09 até 46:06

Formal vs. coloquial

Lembre que um dos meus objetivos principais *neste curso* é fazer as pessoas aprenderem a escrever suas idéias matemáticas de um jeito que seja claro e fácil de revisar, que elas gostem de reler depois (dica 7b) e que os colegas gostem de ler (dicas 7c e 7d)...

Algumas pessoas acham que textos matemáticos têm que ser escritos numa linguagem "formal" que seja a mais distante possível do português coloquial; outras pessoas preferem escrever de um modo bem próximo do coloquial. Por exemplo, o Jacir Venturi (VenturiGA), escreve num Português pomposo que eu acho horrível, e o Felipe Acker (AckerGA1) escreve de um modo bem próximo do coloquial que eu gosto bastante. E até hoje eu só tive acesso a bem pouco material do Reginaldo, mas eu tenho a impressão de que ele não gosta de usar linguagem coloquial em matemática... eu falo um pouquinho sobre isso neste trecho de um vídeo sobre didática: Visaud59:49.

Na parte do curso sobre somas de Riemann você vai aprender a lidar com definições bem complicadas, e aos poucos – um pouquinho neste curso, e bastante nos seguintes – você vai aprender a fazer as suas próprias definições. E quando você souber fazer as suas próprias definições você vai ver que dá pra ser totalmente preciso usando tanto português coloquial quanto português pomposo...

...ah, e na parte final do curso, que é sobre equações diferenciais, você vai (ter que) aprender a usar corretamente um monte de "partículas", como "seja", "então", "temos", "isto é", "queremos", "sabemos que", "lembre que", "digamos que" e "vamos testar se".

Comentário sobre a P1 de 2020.1

Oi! Vou voltar às correções agora e espero terminar todas as P1s daqui a pouco.

Algumas pessoas que tiraram notas baixas me perguntaram em privado o que elas erraram na prova. Vou responder por aqui porque acho que a resposta é útil pra todo mundo e vale pra P2 também.

Era uma prova pra ser feita em 24 horas, com consulta e com discussão com os colegas, então os critérios de correção são bem diferentes dos critérios pra uma prova individual de duas horas... vou usar como exemplo frações parciais.

Eu esperava que quando vocês tivessem terminado a prova vocês soubessem frações parciais muito bem e lembrassem como era só saber as idéias básicas de frações parciais, mas não saber nem fazer as contas direito... e aí era pra vocês terem resolvido a questão de frações parciais da prova da forma mais clara possível, no seguinte sentido: eu esperava que a solução da questão de frações parciais de vocês fosse como uma explicação bem detalhada de como resolver aquele problema, *como se vocês estivessem ensinando frações parciais pra alguém que ainda não entendeu direito.*

Deveria ser fácil entender cada "=" de vocês, e as partes em que vocês fazem a divisão com resto e encontram o A e o B do sistema deveriam estar claramente separadas do resto.

E eu esperava que vocês tivessem relido e revisado várias vezes as soluções de vocês, e reescrito as partes que não tivessem ficado claras quando vocês escreveram elas da primeira vez. Eu esperava que vocês mostrassem que tinham virado as pessoas que sabem frações parciais bastante bem.

Na questão sobre integrar $(\operatorname{sen} x)^5(\cos x)^3$ várias pessoas fizeram uma coisa que me deixou BEM puto. Nas contas essas várias pessoas escreveram um "menos" no lugar que deveria ter um "vezes" - todas cometeram o mesmo erro no mesmo lugar. E isso pra mim foi sinal de que as pessoas não aprenderam o suficiente sobre aquela parte da matéria pra conseguirem revisar aquelas contas – e que elas achavam que não precisavam aprender, bastava copiar.

Cálculo 2 - 2024.2

Aulas 1 a 4: integração e derivação
com o mathologermóvel

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

Links

2fT63 $y \cdot (x_d - x_e)$ e "áreas negativas não existem"
2cT185 Retângulos degenerados

Quadros de algumas aulas:
2jQ3 (2024.2) 24/set/2024
2iQ9 (2024.1) 25/mar/2024
2hQ1 (2023.2) 28/ago/2023
2gQ1 (2023.1) 04/abr/2023
2fQ2 (2022.2) 25/ago/2022

Links da aula 1:
2gT4 Releia a dica 7
2gT11 Atirei o pau no gato
2gT19 Retas reversas
2gT24 Integração e derivação com o Mathologermóvel
2gT27 (p.4) Exercício 1
2gT28 (p.5) Dicas pro exercício 1
CalcEasy03:19 até 12:47

Links da aula 2:
CalcEasy11:35 até 12:47
2gT37 (p.5) O macaco substituidor: EDOs, RC, TFC2
StewPtCap5p9 (p.330) Figuras 11 e 12
StewPtCap5p16 (p.337) A integral definida
StewPtCap5p33 (p.354) TFC, parte 2
StewPtCap5p36 (p.357) Exercícios 19 a 26 (sobre o TFC2)
2fT91 até 2fT93 (p.3 até p.5): A definição da integral

Os slides das próximas páginas são versões ligeiramente reescritas destes slides de outros semestres:

2dT225 (p.4) Gabarito do mini-teste 3 de 2021.2
2eT199 (P1, p.7) eu defini as funções f e g desta forma
2eT200 (P1, p.8) gabarito

Introdução

Nesta parte do curso nós vamos tentar entender
este trecho do vídeo do Mathologer,

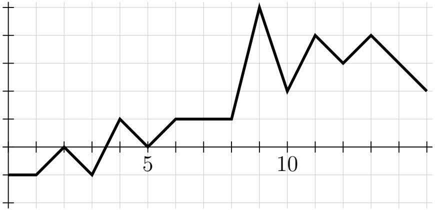
CalcEasy03:19 até 12:47

e vamos fazer alguns exercícios –
que podem ser feitos em vários níveis de detalhe.
Leia estes trechos das legendas de uns vídeos meus:

Slogans01:10 até 08:51: sobre chutar e testar
Slogans07:17 até 07:48: ...do tamanho de um apartamento
Visaud45:14 até 52:24: ajustar o nível de detalhe
Slogans1:11:02 até 1:17:42: seja o seu prório Geogebra
Slogans1:39:46 até 1:45:02: ...com quem vale a pena estudar

Leia também estes slides:
2gT4 (intro, p.3) "Releia a Dica 7"
2gT13 (intro, p.12) Sobre Português
2gT14 (intro, p.13) Sobre Português (2)
2gT16 (intro, p.15) Unexpected end of input
2gT19 (intro, p.18) Retas reversas

Exercício 1.
Seja $G(x)$ esta função:

$G(x) \quad =$ 

Relembre como calcular coeficientes angulares e derivadas no olhômetro e faça um gráfico da função $G'(x)$.

Dica 1: $G'(3.5) = 2$.

Dica 2: $G'(4)$ não existe — use uma bolinha vazia pra representar isso no seu gráfico.

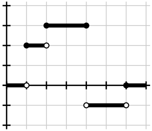
Exercício 1: mais dicas

Pra fazer o exercício 1 você provavelmente vai ter que relembrar algumas coisas sobre inclinação, coeficiente angular, limites laterais, derivadas laterais, e sobre o significado das bolinhas cheias e das bolinhas vazias nos gráficos... links:

Leit1p18 (p.17: inclinação)
Leit1p42 (p.41: bolinhas, domínio, imagem)
StewPtCap1p10 (p.15: círculo cheio e círculo vazio)
Miranda66 (Capítulo 3: Derivadas)
Miranda22 (Seção 1.4: Limites laterais)
Miranda74 (Seção 3.2.3: Derivadas laterais)

2eT70 (p.11) Dicas que eu preparei em 2022.1

Exercício 2.

Seja $f(x) =$  .

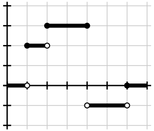
Note que:

$\int_{x=1}^{x=2} f(x)\,dx = 2 \cdot (2-1)$,
$\int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx = 3 \cdot (4-3)$,
$\int_{x=4}^{x=6} f(x)\,dx = -1 \cdot (6-4)$,

Calcule:

a) $\int_{x=1.5}^{x=2} f(x)\,dx$
b) $\int_{x=2}^{x=4} f(x)\,dx$
c) $\int_{x=1.5}^{x=4} f(x)\,dx$
d) $\int_{x=1.5}^{x=6} f(x)\,dx$

Exercício 3.

Sejam $f(x) =$ 

e $F(\beta) = \int_{x=2}^{x=\beta} f(x)\, dx$.

a) Calcule $F(2), F(2.5), F(3), \ldots, F(6)$.
b) Calcule $F(1.5), F(1), F(0.5), F(0)$.

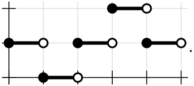
Exercício 4.
No exercício 3 você obteve alguns valores da função $F(\beta)$, mas não todos... por exemplo, você *ainda* não calculou $F(2.1)$.

a) Desenhe num gráfico só todos os pontos $(x, F(x))$ que você calculou nos itens (a) e (b) do exercício 3.
Dica: o conjunto que você quer desenhar é este aqui:
$\{(0, F(0)),\ (0.5, F(0.5)), \ldots, (6, F(6))\}$.

b) Tente descobrir — lendo os próximos slides, assitindo o vídeo, e discutindo com os seus colegas — qual é o jeito certo de ligar os pontos do item (a).

Exercício 5.

Seja

$f(x) \quad =$  .

Faça os gráficos destas funções:

a) $F(x) = \int_{t=2}^{t=x} f(t)\, dt$

b) $G(x) = \int_{t=3}^{t=x} f(t)\, dt$

Dica: comece fazendo uma tabela como esta aqui,

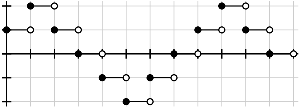
x	$F(x)$
2	
3	
4	
5	
2.5	
3.5	
2.1	
3.1	

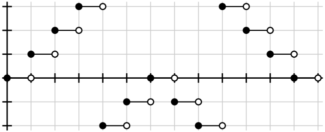
com um monte de pontos pros quais você consegue calcular o $F(x)$ deles de cabeça só olhando pro gráfico, e depois plote estes pontos. Depois faça a mesma coisa pra $G(x)$ *sem fazer a tabela* – desenhe um monte de "pontos fáceis de calcular" direto no seu gráfico.

Eu comecei o curso de Cálculo 3 deste semestre discutindo algumas técnicas pra descobrir "pontos fáceis de calcular". Veja se os primeiros slides de C3 te ajudam:

3iT4 Pontos mais fáceis de calcular

Exercício 6.
Sejam:

$f(x) =$  ,

$g(x) =$  .

Faça os gráficos destas funções:

a) $F(x) = \int_{t=0}^{t=x} f(t)\,dt$

b) $G(x) = \int_{t=3}^{t=x} g(t)\,dt$

Algumas propriedades da integral

As três propriedades mais básicas da integral definida são estas:

$$\begin{array}{rcll}
k \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx & = & \int_{x=a}^{x=b} k f(x)\,dx & (*) \\
\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx & = & \int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx & (**) \\
\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx & = & -\int_{x=b}^{x=a} f(x)\,dx & (***) \\
\int_{x=a}^{x=b} k\,dx & = & k(b-a) & (****)
\end{array}$$

O melhor modo da gente visualizar o que esses propriedades "querem dizer" é comparando a fórmula pro caso geral com casos particulares. Olhe pra figura à direita; ela compara a $(*)$ com dois casos particulares dela – primeiro um caso "normal", em que $k=2$, e depois um caso "estranho" em que $k=-1$...

No caso "estranho" aparecem uns números negativos, ó:

$$\underbrace{(-1)\cdot\underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx}_{>0}}_{<0} \;=\; \underbrace{\int_{x=0}^{x=4}(-1)\cdot f(x)\,dx}_{<0}$$

...e uma figura que tem "área negativa"!!!

Eu acho a abordagem do Mathologer genial – ele começa dizendo que a distância percorrida é a área (ou a integral) da velocidade, e com isso vários casos estranhos em que aparecem números negativos *começam* a fazer sentido.

Slogan: a gente quer que as quatro propriedades acima valham sempre – tanto nos casos "normais" quanto nos casos "estranhos".

$$(*):\qquad k\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \;=\; \int_{x=a}^{x=b} k f(x)\,dx$$

$$(*)\begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=4 \\ k:=2 \end{bmatrix}:\qquad 2\cdot\underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx} \;=\; \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} 2\cdot f(x)\,dx}$$

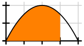
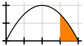
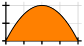
$$(*)\begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=4 \\ k:=-1 \end{bmatrix}:\qquad (-1)\cdot\underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx} \;=\; \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} (-1)\cdot f(x)\,dx}$$

Links pros livros:
StewPtCap5p22 (p.343)
Leit5p48 (p.331)
MirandaP220

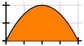
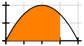
A motivação pro $(***)$ é isso aqui:

$$(**): \quad \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx \quad = \quad \int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx$$

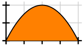
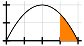
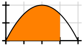
$$(**)\begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=3 \\ c:=4 \end{bmatrix}: \quad \underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx} + \underbrace{\int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx} \quad = \quad \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx}$$

$$(**)\begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=4 \\ c:=3 \end{bmatrix}: \quad \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx} + \underbrace{\int_{x=4}^{x=3} f(x)\,dx}_{???} \quad = \quad \underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx}$$

$$\underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx} - \underbrace{\int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx} \quad = \quad \underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx}$$

“Quase retângulos”

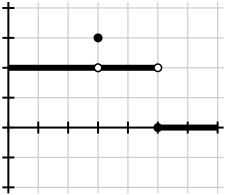
A quarta propriedade é essa aqui:

$$\int_{x=a}^{x=b} k\,dx \quad = \quad k(b-a) \qquad (****)$$

A gente quer que ela valha pra todos os valores de k, a e b – incluindo os casos em que k é negativo, que são “retângulos com altura negativa” e pros casos que $a > b$, que são “retângulos que têm base negativa”...

...e além disso a gente quer que ela valha pra casos como o da figura da direita, em que entre $x = 2$ e $x = 5$ o mathologermóvel anda com velocidade constante, 2, exceto em dois instantes – repare que no gráfico a gente tem $f(3) = 3$ e $f(5) = 0$...

Vamos pensar em termos de velocidades e distâncias. Entre $x = 2$ e $x = 5$ o mathologermóvel andou sempre com velocidade 2, exceto por dois instantes de um buzilionésimo de segundo cada um, em que ele andou com velocidades diferentes de 2... esses instantes mudam tão pouco a distância percorrida que a gente vai considerar que eles não mudam a distância percorrida.

$f(x) \;=$ 

$$\begin{aligned}
\int_{x=2}^{x=5} f(x)\,dx &= \int_{x=2}^{x=5} 2\,dx \\
&= 2\cdot(5-2) \\
&= 2\cdot 3 \\
&= 6
\end{aligned}$$

Cálculo 2 - 2024.2

Aula 4: teste de nivelamento

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

Links

StewPtCap2p67 (p.138) Exercícios 33–38: ...diga o que são f e a.

Este teste é só pra eu descobrir o quanto vocês sabem de certas técnicas de Cálculo 1 – eu vou usar as informações daqui pra decidir como organizar o curso.

Por favor escrevam:

- seu nome legível (em todas as folhas),
- com quem você fez GA, C1 e Prog1 no semestre em que você passou em cada uma, e em qual semestre foi,
- as respostas dos exercícios à direita e tudo que você conseguir fazer pra tentar resolver eles.

Dicas (que você não é obrigado a usar!):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} \\ f'(a) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon} \\ f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ f'(a) &= \left(\frac{d}{dx} f(x)\right)\Bigg|_{x=a} \end{aligned}$$

Obs: eu tirei os exercícios à direita do Stewart:

StewPtCap2p62 (p.133) Definição da derivada
StewPtCap2p67 (p.138) Exercícios 33–38

Cada limite abaixo representa a derivada de certa função f em certo número a. Diga o que são f e a em cada caso.

a) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^{10}-1}{h}$

b) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[4]{16+h}-2}{h}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{2^x-32}{x-5}$

d) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\cos(\pi+h)+1}{h}$

d) $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{t^4+t-2}{t-1}$

$$\begin{array}{rcr}
\text{[DD}a\varepsilon] & = & \left(\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)\Big|_{x=a} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}\right) \\
\text{[DD}x\varepsilon] & = & \left(\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)\Big|_{x=a} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}\right) \\
\text{[DD}xa] & = & \left(\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)\Big|_{x=a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) \\
\text{[L}a\varepsilon] & = & \left(\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}\right) \\
\text{[L}x\varepsilon] & = & \left(\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}\right) \\
\text{[L}xa] & = & \left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) \\
\text{[Q}a\varepsilon] & = & \left(\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}\right) \\
\text{[Q}x\varepsilon] & = & \left(\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}\right) \\
\text{[Q}xa] & = & \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)
\end{array}$$

$$[\text{Q}a\varepsilon]\,[\varepsilon := \varepsilon] = \left(\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}\right)$$

$$[\text{Q}a\varepsilon]\begin{bmatrix}\varepsilon := \varepsilon \\ f(x) := (x)^{10}\end{bmatrix} = \left(\frac{(a+\varepsilon)^{10}-(a)^{10}}{\varepsilon}\right)$$

$$[\text{Q}a\varepsilon]\begin{bmatrix}\varepsilon := \varepsilon \\ f(x) := (x)^{10} \\ a := 1\end{bmatrix} = \left(\frac{(1+\varepsilon)^{10}-(1)^{10}}{\varepsilon}\right)$$

$$[\text{DD}a\varepsilon]\begin{bmatrix}\varepsilon := \varepsilon \\ f(x) := (x)^{10} \\ a := 1\end{bmatrix} = \left(\left(\frac{d}{dx}(x)^{10}\right)\Big|_{x=1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(1+\varepsilon)^{10}-(1)^{10}}{\varepsilon}\right)$$

Cálculo 2 - 2024.2

Aulas 4 a 8: exercícios de substituição

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

Links

2iQ12 Quadros da aula 6 (27/mar/2024)
2iQ14 Quadros da aula 7 (01/abr/2024)
2iQ16 Quadros da aula 8 (02/abr/2024)
2iQ22 Quadros da aula 9 (03/abr/2024)

A regra da cadeia em vários livros:
MirandaP87 3.5 A regra da cadeia
Leit3p45 (p.181) 3.6 A derivada de uma função composta e...
StewPtCap3p26 (p.179) 3.4 A regra da cadeia
CederjC1V1p115 (p.113) Aula 12: A regra da cadeia
FlemmingP147 (p.139) 4.13 Derivada da função composta

A fórmula do TFC2 nem sempre vale:
2dT231 (2021.2) $F(x) = -x^{-1}$, $F'(x) = x^{-2}$

2fT107 (2022.2) Dicas pra P1
2fT110 (2022.2) P1, questão 3
2fT114 (2022.2) P1, questão 3, gabarito

2gT108 (2023.1) Dicas pra P1
2gT111 (2023.1) P1, questão 4
2gT116 (2023.1) P1, questão 4, gabarito

2hT179 (2023.2) Dicas pra P1
2hT188 (2023.2) P1, questão 4
2hT193 (2023.2) P1, questão 4, gabarito

Introdução

Vários alunos – obs: eram alunos super dedicados, mas que tinham feito um Ensino Médio super precário, e que tavam tentando tirar o atraso correndo – já me contaram que quando eles tentavam tirar certas dúvidas com o Reginaldo ele respondia coisas como:

> "Isso é matéria de ensino médio! Isso aí você já deveria saber. Vai estudar pelo livro."

Eu vou chamar isso de "Método Reginaldo".

Eu vou tentar fazer algo totalmente diferente. As pessoas *deveriam* estar chegando em Cálculo sabendo obter casos particulares de fórmulas e teoremas muito bem, mas não estão...

Eu *acho* que o modo mais rápido de tirar as dúvidas dessas pessoas é usando a operação de substituição que nós vamos ver aqui, "[:=]", que é uma versão simplificada das operações de substituição "de verdade" que são usadas em λ-cálculo e em programas como o Lean, e que lidam bem com variáveis livres e ligadas, com tipos dependentes, que usam índices de de-Bruijn nos lugares certos, etc... mas ainda falta! Eu já tenho bastante material sobre isso, mas ele está espalhado...

Ah, e um dia eu vou fazer uma versão desse PDF com um apêndice enorme com um monte de exemplos em que esse "[:=]" simplificado funciona bem e esclarece idéias complicadas (já tenho um monte no material do semestre passado!), e com um monte de exemplos em que esse "[:=]" simplificado funciona mal e a gente precisa das versões mais complicadas... mas ainda falta.

Funções

Isso aqui é um exemplo de coisa que segundo o Reginaldo "vocês já deveriam saber", porque é matéria de Ensino Médio:

Digamos que $f(x) = x^2$. Então:

$$\begin{array}{rcl}
f(200) &=& 200^2 \\
f(3u+4) &=& (3u+4)^2 \\
f(42x^3+99) &=& (42x^3+99)^2 \\
f(a+b) &=& (a+b)^2 \\
f(g(x)) &=& g(x)^2 \\
42+f(200) &=& 42+200^2 \\
h(f(200)) &=& h(200^2) \\
h(f(x)) &=& h(x^2) \\
h(f(a+b)) &=& h((a+b)^2)
\end{array}$$

Exercício 1.
a) Calcule o resultado desta substituição:

$$(f(3u+4))\left[f(y) := y^5+y^6\right]$$

Agora seja:

$$[S_1] = \left[f(y) := y^5+y^6\right]$$

Calcule o resultado destas substituições:

$$\begin{array}{lr}
\text{b)} & f(200)\ [S_1] \\
\text{c)} & f(3u+4)\ [S_1] \\
\text{d)} & f(42x^3+99)\ [S_1] \\
\text{e)} & f(a+b)\ [S_1] \\
\text{f)} & f(g(x))\ [S_1] \\
\text{g)} & 42+f(200)\ [S_1] \\
\text{h)} & h(f(200))\ [S_1] \\
\text{i)} & h(f(x))\ [S_1] \\
\text{j)} & h(f(a+b))\ [S_1] \\
\text{k)} & f(f(200))\ [S_1] \\
\text{l)} & h(x)\ [S_1] \\
\text{m)} & h(y)\ [S_1]
\end{array}$$

Dica

Entenda isto aqui:

$$f(g(4/5))\,\big[g(y) \;:=\; \sqrt{y}+y^3\big] = f\left(\sqrt{4/5}+(4/5)^3\right)$$

```
f
|
g
|
/--.
|  |
4  5
```

[

```
g
|
y
```

:=

```
+-----.
|     |
sqrt  ^--.
|     |  |
y     y  3
```

] =

```
f
|
+-----.
|     |
sqrt  ^-----.
|     |     |
/--.  /--.  3
|  |  |  |
4  5  4  5
```

```
=---------------------.
|                     |
s-----.               f
|     |               |
f     []              +-----.
|     |               |     |
g     :=--.           sqrt  ^-----.
|     |   |           |     |     |
/--.  g   +-----.     /--.  /--.  3
|  |  |   |     |     |  |  |  |
4  5  y   sqrt  ^--.  4  5  4  5
          |     |  |
          y     y  3
```

Mais sobre chutar e testar

Uma solução pra equação $x^2+1=50$ é um modo de preencher os dois '?'s daqui que faça as duas igualdades externas serem verdadeiras:

$$(x^2+1=50)\,\bigl[x:=?\bigr]=?=\mathbf{V}$$

As soluções são $x=7$ e $x=-7$. Olha:

$$\begin{array}{c}(x^2+1=50)\,\bigl[x:=7\bigr]=(7^2+1=50)=\mathbf{V}\\(x^2+1=50)\,\bigl[x:=-7\bigr]=((-7)^2+1=50)=\mathbf{V}\end{array}$$

Como é difícil chegar direto na solução eu costumo pedir pras pessoas começarem preenchendo os dois '?'s daqui,

$$(x^2+1=50)\,\bigl[x:=?\bigr]=?$$

começando pelo da esquerda, pra fazer com que a igualdade externa seja verdadeira. Por exemplo:

$$(x^2+1=50)\,\bigl[x:=4\bigr]=(4^2+1=50)$$

Se a pessoa consegue pelo menos preencher o '?' da esquerda daqui

$$(x^2+1=50)\,\bigl[x:=?\bigr]=?$$

com uma expressão qualquer, como aqui,

$$(x^2+1=50)\,\bigl[x:=a+b\bigr]=?$$

...aí eu geralmente consigo convencer ela de que ela pode usar isto pra treinar substituições... por exemplo:

$$\begin{array}{r}(x^2+1=50)\,\bigl[x:=a+b\bigr]=((a+b)^2+1=50)\\(x^2+1=50)\,\bigl[x:=2\bigr]=(2^2+1=50)\\(x^2+1=50)\,\bigl[x:=3\bigr]=(3^2+1=50)\end{array}$$

Depois que ela treinou isso bastante eu posso pedir que ela faça algo parecido usando este molde aqui,

$$(x^2+1=50)\,\bigl[x:=?\bigr]=?=?$$

e substituindo o último '?' por **V** ou **F**. Por exemplo:

$$\begin{array}{c}(x^2+1=50)\,\bigl[x:=5\bigr]=(5^2+1=50)=\mathbf{F}\\(x^2+1=50)\,\bigl[x:=6\bigr]=(6^2+1=50)=\mathbf{F}\\(x^2+1=50)\,\bigl[x:=7\bigr]=(7^2+1=50)=\mathbf{V}\end{array}$$

e aí *geralmente* as pessoas conseguem voltar pro problema original do início da coluna da esquerda e entender ele. Mas às vezes isso não funciona – e aí eu tenho que lembrar a pessoa que ela se comprometeu a ler essas coisas aqui pra entender a metodologia do curso:

Slogans01:10 até 08:51: duas histórias verídicas sobre GA
2iT5, 2iT6 "Meu objetivo é reprovar pessoas como você"

Equações diferenciais

O Stewart define a solução de uma equação diferencial nesta página aqui,
StewPtCap9p8 (p.528) Equações diferenciais gerais
e com estas frases (obs: a "equação 4" é $y' = xy$):

> Uma função f é denominada *solução* de uma equação diferencial se a equação é satisfeita quando $y = f(x)$ e suas derivadas são substituídas na equação. Assim, f é uma solução da Equação 4 se
> $$f'(x) = xf(x)$$
> para todos os valores de x em algum intervalo.

Eu vou ser um pouco mais porco que ele, e ao invés de falar "em algum intervalo" eu vou falar "sempre".

Pra mim $f(x) = e^{2x}$ é uma solução da equação diferencial $f'(x) = 2f(x)$ porque isto aqui é verdade:

$$(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := e^{2x} \\ f'(x) := 2e^{2x} \end{bmatrix} = (e^{2x} = e^{2x}) = \mathbf{V}$$

...e uma solução da equação diferencial $f(x) = 2f'(x)$ é algo que a gente põe no primeiro '?' daqui,

$$(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := ? \\ f'(x) := ? \end{bmatrix} = ? = \mathbf{V}$$

num modo de completar isso que faz com que todas as igualdades externas sejam verdadeiras.

Por exemplo, vamos testar se $f(x) = 42$ é uma solução da equação diferencial $f(x) = e^{2x}$. Temos:

$$\begin{array}{l}
(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := 42 \\ f'(x) := ? \end{bmatrix} = ? = ? \\
(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := 42 \\ f'(x) := 0 \end{bmatrix} = ? = ? \\
(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := 42 \\ f'(x) := 0 \end{bmatrix} = (0 = 2 \cdot 42) = ? \\
(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := 42 \\ f'(x) := 0 \end{bmatrix} = (0 = 2 \cdot 42) = \mathbf{F}
\end{array}$$

Exercício 2.
a) Verifique que $f(x) = 0$ é uma solução da equação diferencial $f'(x) = 2f(x)$.
b) Verifique que $f(x) = 99x$ não é uma solução da equação diferencial $f'(x) = 2f(x)$. Dica: você vai ter que decifrar isto aqui: "$(99 = 2 \cdot 99x) = \mathbf{F}$ porque $99 = 2 \cdot 99x$ não é verdade sempre".

Antes de continuar...

Antes da gente continuar faça todos os itens da coluna da direita – são exercícios que eu preparei alguns semestres atrás.

Sejam:

$$\begin{array}{rcl}
[4] & = & \left(f'(x) = x^4\right) \\
[5] & = & \left(f'(x) = 2f(x)\right) \\
[6] & = & \left(f''(x) + f'(x) = 6f(x)\right) \\
[7] & = & \left(f'(x) = -\frac{1}{f(x)}\right) \\
[8] & = & \left(f'(x) = -\frac{x}{f(x)}\right) \\
[RC] & = & \left(f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)\right) \\
[TFC2] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx = f(b) - f(a)\right)
\end{array}$$

Note que as expressões [4], [5], [6], [7], [8], são as EDOs deste problema aqui: 2dT13 EDOs por chutar e testar.

Exercício
Calcule o resultado de cada uma das substituições à direita. Lembre que o resultado de uma substituição é sempre uma *expressão* – *não simplifique ela*. Deixa eu fazer uma comparação com C: o resultado de substituir cada ocorrência do caracter `'a'` pelo caracter `'2'` no string `"a+5"` é o string `"2+5"`, não o string `"7"`, e nem o número 7.

a) $f(g(x))\left[x := 42\right]$
b) $f(g(x))\left[g(x) := 200 \cdot x\right]$
c) $f(g(x))\left[f(y) := y^2 + y^3\right]$
d) $f(g(x))\left[f(y) := e^y\right]$
e) $f(g(x))\left[g(x) := 4 \cdot x\right]$
f) $f(g(x))\left[\begin{array}{c} f(y) := e^y \\ g(x) := 4 \cdot x \end{array}\right]$
g) $f(g(x))\left[f(y) := y^{1/2}\right]$
h) $f(g(x))\left[f(y) := \sqrt{y}\right]$
i) $f(g(x))\left[f(y) := \sqrt{y}\right]$
j) $f(g(x))\left[\begin{array}{c} g(x) := e^x \\ g'(x) := e^x \end{array}\right]$
k) $f(g(x))'\left[\begin{array}{c} g(x) := e^x \\ g'(x) := e^x \end{array}\right]$
l) [RC] $\left[\begin{array}{c} f(y) := e^y \\ f'(y) := e^y \end{array}\right]$
m) [RC] $\left[\begin{array}{c} f(y) := y^{1/2} \\ f'(y) := \frac{1}{2} y^{-1/2} \end{array}\right]$
n) [RC] $\left[\begin{array}{c} f(y) := \sqrt{y} \\ f'(y) := \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{array}\right]$
o) [6] $\left[\begin{array}{c} f(x) := e^{2x} \\ f'(x) := 2e^{2x} \\ f''(x) := 4e^{2x} \end{array}\right]$
p) [6] $\left[\begin{array}{c} f(x) := e^{3x} \\ f'(x) := 3e^{3x} \\ f''(x) := 9e^{3x} \end{array}\right]$
q) [TFC2] $\left[\begin{array}{c} f(x) := \frac{1}{2}x^2 \\ f'(x) := x \\ a := 0 \\ b := 2 \end{array}\right]$
r) [8] $\left[\begin{array}{c} f(x) := \sqrt{1-x^2} \\ f'(x) := \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}} \end{array}\right]$

Uma integral

Nas aulas 8 e 9 – links:

2iQ16 Quadros da aula 8 (2/abr/2024)
2iQ22 Quadros da aula 9 (3/abr/2024)

nós vimos um argumento visual que mostrava isto aqui,

$$\int_{x=1}^{x=2} x\,dx = 1.5$$

e depois o argumento mais formal abaixo,
que dava o mesmo resultado:

$$\begin{array}{rcll}
\frac{d}{dx}x^2 &=& 2x \\
\frac{d}{dx}\frac{x^2}{2} &=& x \\
\int x\,dx &=& \frac{x^2}{2} & \text{por [II]} \begin{bmatrix} F(x) := x^2/2 \\ F'(x) := x \end{bmatrix} \\
\int_{x=a}^{x=b} x\,dx &=& \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=a}^{x=b} & \text{por [TFC2]} \begin{bmatrix} F(x) := x^2/2 \\ F'(x) := x \end{bmatrix} \\
\int_{x=1}^{x=2} x\,dx &=& \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=1}^{x=2} & \text{por [TFC2]} \begin{bmatrix} F(x):=x^2/2 \\ F'(x):=x \\ a:=1 \\ b:=2 \end{bmatrix} \\
&=& \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} & \text{por [defdif]} \begin{bmatrix} F(x):=x^2/2 \\ F'(x):=x \\ a:=1 \\ b:=2 \end{bmatrix} \\
&=& \frac{4}{2} - \frac{1}{2} \\
&=& 1.5
\end{array}$$

Usamos estes nomes pras fórmulas:

$$\begin{array}{rcl}
\text{[II]} &=& \left(\int F'(x)\,dx = F(x)\right) \\
\text{[TFC2]} &=& \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\big|_{x=a}^{x=b}\right) \\
\text{[defdif]} &=& \left(F(x)\big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)\right)
\end{array}$$

A regra da cadeia

Imagina que eu passo esse exercício aqui,

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} 42x = \color{red}{?}$$

e uma pessoa resolve ele desse jeito:

> Queremos encontrar a derivada de $f(x) = \operatorname{sen} 42x$. Para tal vamos usar a regra da cadeia. Aplicando o método chegamos ao resultado, que é $f'(x) = \cos 42x$.

Repara: essa pessoa gastou um bocado de tempo e energia escrevendo a parte em português da resposta dela, e isso não ajudou ela em nada, só atrapalhou... ela chegou no resultado errado, e a solução dela ficou num formato super difícil de debugar – não dá pra eu apontar pra um símbolo dela e dizer "confere isso aqui"!...

Compare a solução dela com esta aqui, em três passos:

$$\begin{array}{lcl}
\color{red}{[\mathrm{RC}]} & = & \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\right) \\
\color{red}{[\mathrm{RC}]} \begin{bmatrix} f(x) := \color{red}{?} \\ g(x) := \color{red}{?} \\ f'(x) := \color{red}{?} \\ g'(x) := \color{red}{?} \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx} \operatorname{sen} 42x = \color{red}{?}\right) \\
\color{red}{[\mathrm{RC}]} \begin{bmatrix} f(x) := \operatorname{sen} x \\ g(x) := 42x \\ f'(x) := \cos x \\ g'(x) := 42 \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx} \operatorname{sen} 42x = \cos(42x) \cdot 42\right)
\end{array}$$

Se a pessoa não faz a menor idéia de como eu consegui descobrir o que pôr nos cinco '$\color{red}{?}$'s da minha solução em três passos dali da esquerda eu posso expandir a minha solução deste jeito...

$$\begin{array}{lcl}
\color{red}{[\mathrm{RC}]} & = & \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\right) \\
\color{red}{[\mathrm{RC}]} \begin{bmatrix} f(x) := \color{red}{?} \\ g(x) := \color{red}{?} \\ f'(x) := \color{red}{?} \\ g'(x) := \color{red}{?} \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx} \operatorname{sen} 42x = \color{red}{?}\right) \\
\color{red}{[\mathrm{RCL}]} & = & \left(\frac{d}{dx} f(g(x))\right) \\
\color{red}{[\mathrm{RCL}]} \begin{bmatrix} f(x) := \color{red}{?} \\ g(x) := \color{red}{?} \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx} \operatorname{sen} 42x\right) \\
\color{red}{[\mathrm{RCL}]} \begin{bmatrix} f(x) := \operatorname{sen} x \\ g(x) := 42x \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx} \operatorname{sen} 42x\right) \\
\color{red}{[\mathrm{RC}]} \begin{bmatrix} f(x) := \operatorname{sen} x \\ g(x) := 42x \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx} \operatorname{sen} 42x = f'(42x)g'(x)\right) \\
\color{red}{[\mathrm{RC}]} \begin{bmatrix} f(x) := \operatorname{sen} x \\ g(x) := 42x \\ f'(x) := \color{red}{?} \\ g'(x) := \color{red}{?} \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx} \operatorname{sen} 42x = \color{red}{?}\right) \\
\color{red}{[\mathrm{RC}]} \begin{bmatrix} f(x) := \operatorname{sen} x \\ g(x) := 42x \\ f'(x) := \cos x \\ g'(x) := 42 \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx} \operatorname{sen} 42x = \cos(42x) \cdot 42\right)
\end{array}$$

repare que eu introduzi um monte de passos novos, e comecei resolvendo um problema menor que só tinha dois '$\color{red}{?}$'s – este aqui:

$$\begin{array}{lcl}
\color{red}{[\mathrm{RCL}]} & = & \left(\frac{d}{dx} f(g(x))\right) \\
\color{red}{[\mathrm{RCL}]} \begin{bmatrix} f(x) := \color{red}{?} \\ g(x) := \color{red}{?} \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx} \operatorname{sen} 42x\right)
\end{array}$$

Renomear

Note que:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\left(\frac{d}{dx}f(g(x))\right)\begin{bmatrix} f := h \\ g := k \end{bmatrix}}_{\left(\frac{d}{dx}h(k(x))\right)}\begin{bmatrix} h := g \\ g := k \end{bmatrix}}_{\left(\frac{d}{dx}g(f(x))\right)}[x := t]}_{\left(\frac{d}{dt}g(f(t))\right)}$$

e portanto isto aqui

$$\text{[RC]}\begin{bmatrix} f{:=}h \\ f'{:=}h' \\ g{:=}k \\ g'{:=}k' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h{:=}f \\ h'{:=}f' \\ k{:=}g \\ k'{:=}g' \end{bmatrix}[x := t]$$

deve dar uma versão da regra da cadeia que usa letras diferentes das originais... você consegue descobrir o resultado da substituição acima de cabeça? Se não conseguir faça todos os passos à mão.

O Maxima tem uma operação de substituição, `subst`, em que as substituições são feitas em ordem, e uma outra, `psubst`, em que as substituições são feitas em paralelo. Veja:

`https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_33.html#psubst`

Se o nosso '[:=]' for a substituição em paralelo então a gente pode fazer isto aqui:

$$\left(\frac{d}{dx}f(g(x))\right)\begin{bmatrix} f{:=}g \\ f'{:=}g' \\ g{:=}f \\ g'{:=}f' \\ x{:=}t \end{bmatrix} = \left(\frac{d}{dt}g(f(t))\right)$$

só que uma vez – em 2022.1 – eu tentei definir formalmente a substituição em paralelo em sala e deu super errado, ninguém entendeu nada... e aí eu vi que era melhor evitar os casos em que a substituição simples e a substituição em paralelo se comportam de formas diferentes.

Regra da cadeia: exercícios

Exercícios do Miranda

Lembre que:

$$[\mathrm{RC}] = \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\right)$$

Resolva os exercícios 1–6 e 8–12 daqui:
MirandaP89
usando os métodos que você quiser, e depois reescreva o resultado final de cada um neste formato com uma justificativa detalhada à direita, que nós vimos no slide 9:

$$\frac{d}{dt}(3t+4)^5 \quad = \quad 5(3t+4)^4 \cdot 3 \qquad \text{por } [\mathrm{RC}] \begin{bmatrix} f(x):=x^5 \\ g(x):=3x+4 \\ f'(x):=5x^4 \\ g'(x):=3 \end{bmatrix} \big[x := t\big]$$

Muito importante

Cálculo 2 é cheio de fórmulas que parecem incompreensíveis à primeira vista, porque são abstratas demais...

Uma das utilidades mais importantes da operação '[:=]' pra gente vai ser *transformar fórmulas nas quais a gente não entende nada em casos particulares dessas fórmulas, que têm vários pedaços que a gente consegue entender.*

Isso aqui é uma fórmula – ou melhor, um "método" – que vai ser um dos assuntos da P2:

$$
{\color{red}[\mathrm{M}]} \;=\; \left(\begin{array}{rcl}
\dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{g(x)}{h(y)} \\
h(y)\,dy & = & g(x)\,dx \\
\int h(y)\,dy & = & \int g(x)\,dx \\
\| & & \| \\
H(y)+C_1 & & G(x)+C_2 \\
H(y) & = & G(x)+C_2-C_1 \\
 & = & G(x)+C_3 \\
H^{-1}(H(y)) & = & H^{-1}(G(x)+C_3) \\
\| & & \\
y & &
\end{array}\right)
$$

Exercício muito importante:
Calcule o resultado da substituição abaixo.
Você provavelmente vai conseguir entender as quatro igualdades de baixo do resultado, mas as cinco igualdades de cima ainda não vão fazer sentido nenhum pra você.

$$
{\color{red}[\mathrm{M}]}\left[\begin{array}{rcl}
g(x) & := & -2x \\
h(y) & := & 2y \\
G(x) & := & -x^2 \\
H(y) & := & y^2 \\
H^{-1}(u) & := & \sqrt{u}
\end{array}\right] = {\color{red}?}
$$

Cálculo 2 - 2024.2

Aulas 8 e 9: contas com justificativas

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

Links

StewPtCap3p5 (p.158) A Regra da Potência
StewPtCap3p5 (p.158) Derivada de uma função constante
StewPtCap3p7 (p.160) A Regra da Potência (versão geral)
StewPtCap3p8 (p.161) A Regra da Multiplicação por Constante
StewPtCap3p8 (p.161) A Regra da Soma
StewPtCap3p14 (p.167) A Regra do Produto
StewPtCap3p26 (p.179) 3.4 A regra da cadeia
StewPtCap5p23 (p.344) Propriedades da integral definida
StewPtCap5p33 (p.354) O TFC2
StewPtCap5p36 (p.357) Exercícios sobre TFC2 (fazer do 19 ao 28)
StewPtCap5p39 (p.360) Integral indefinida
StewPtCap5p40 (p.361) Propriedades da integral indefinida
StewPtCap5p44 (p.365) Faça os exercícios 2 e 5 daqui
StewPtCap7p5 (p.420) Integração por partes

Stew2p31 (p.131) Example 6

CalcEasy11:35 até 12:47: vídeo sobre o macaco derivador
CalcEasy11:35 até 20:22: o macado derivador

Visaud01:00 até 02:52 “é óbvio sim”
Visaud37:17 até 46:06 reduzir e aumentar o nível de detalhe
Visaud48:53 até o final: vários níveis de detalhe lado a lado

2gT33 Material de 2023.1

Quadros:
2hQ5 Quadros da aula 3 (4a 30/ago)
2hQ7 Quadros da aula 4 (2a 04/set)
2hQ10 Quadros da aula 5 (3a 05/set)

Como estudar funções

Você lembra de quando você aprendeu a fazer “contas com letras” na escola? Você levou centenas de horas de estudo e desespero – né? – pra entender como é que letras como x e y podiam fazer o papel de números desconhecidos cujos valores você quer descobrir e como é que letras como a e b podiam fazer o papel de números quaisquer... e você teve que reler muitas vezes tudo que você já tinha visto sobre soma, multiplicação, etc, pra entender essas operações de um jeito novo – antes elas eram operações que somavam e multiplicavam números conhecidos e concretos, depois elas passaram a ser operações que também eram capazes de somar e multiplicar expressões com letras...

Agora a gente vai ter que fazer algo parecido, mas agora pra funções. Em algumas situações as letras f e g vão representar funções que a gente quer descobrir, em outras situações f e g vão representar funções “quaisquer” (abstratas), em outras situações f e g vão representar funções que a gente conhece os gráficos delas mas que a gente não tem uma expressão “algébrica” que calcule os valores delas... e pra entender isso direito você vai ter que reler tudo que você já viu sobre operações com funções pra entender aquelas operações de um jeito novo, como operações que funcionam tanto pra expressões em que f e g são funções “concretas” como nos casos em que f e g são funções “abstratas”...

Muita gente acha que essa coisa de lidar com funções abstratas “é simples”, no sentido de que um dia você vai ler a explicação certa ou assistir o vídeo certo e *plim*, de um momento pro outro você vai se transformar em outra pessoa, vai deixar de ser a pessoa que achava isso difícil e vai virar a pessoa que acha isso fácil. NÃO É ASSIM... pra lidar com funções “abstratas” você vai ter que aprender centenas de detalhes, vai ter que aprender eles aos poucos, e eu nem sei quais são os livros que têm explicações mais ou menos completas sobre isso – eu tentei perguntar pra vários amigos matemáticos, por exemplo nessa série de reuniões onlines aqui, Sapt, e ninguém sabe onde tem material sobre isso... em teoria isso é algo anterior a Pré-Cálculo/Cálculo 0, que as pessoas deveria aprender no Ensino Médio mas que hoje em dia não aprendem mais.

Dicas:

1. Os músculos mentais que você exercita quando você lê algo ou assiste alguém falando são diferentes dos que você exercita quando você escreve as suas idéias, quando você relê o que você escreveu, e quando você reescreve de um jeito melhor o que você escreveu. O slogan/historinha sobre isto está aqui: 2gT22.

2. O melhor modo de estudar é escrever todas as suas hipóteses – até porque na maior parte dos casos só quem vai ler elas são os personagens (a) e (b) da Dica 7: 2gT4.

3. Leia o post da Ana Letícia de Fiori: 2gT18.

4. Tem um trecho do vídeo sobre slogans que é sobre indicar graus de certeza – leia as legendas dele. Ele vai de Slogans33:35 até 36:36.

5. Os livros de Cálculo 2 não definem precisamente a notação matemática que eles usam – você vai ter que aprender a notação certa por tentativa e erro, escrevendo as suas idéias do melhor modo que você conseguir e depois comparando a sua notação com as dos livros. Veja o slide 2gT7 sobre “A linguagem formal de Cálculo 2” e depois leia todos os slides de 2gT5 até 2gT10.

6. Pra muitas as pessoas a parte mais difícil do curso de C2 é a parte é que elas têm que aprender a usar “partículas em português”, como “se”, “então”, “queremos que”, “vamos testar se”, etc... e se elas não souberem usar essas partículas direito as contas delas vão ficar não só ambíguas como também erradas. Não deixe pra aprender isso na última hora, porque NÃO DÁ! Comece a prestar atenção nas partículas em português desde agora!!! As dicas pra P2 do semestre passado estão aqui, 2gT126, e tem um exemplo de uso dessas partículas no anexo da P2, aqui: 2gT138.

“Example 6”

De: Stew2p31 (p.131)

$$\begin{array}{rcl}
F(x) &=& (6x^3)(7x^4) \\
F'(x) &=& (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\frac{d}{dx}(6x^3) \\
&=& (6x^3)(28x^3) + (7x^4)(18x^2) \\
&=& 168x^6 + 126x^6 \\
&=& 294x^6
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
\text{[RC]} &=& \left(\frac{d}{dx}c = 0\right) & \text{Veja StewPtCap3p5} \\
\text{[RPot]} &=& \left(\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}\right) & \text{Veja StewPtCap3p7} \\
\text{[RMC]} &=& \left(\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}f(x)\right) & \text{Veja StewPtCap3p8} \\
\text{[RSoma]} &=& \left(\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)\right) & \text{Veja StewPtCap3p5} \\
\text{[RProd]} &=& \left(\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)\right) & \text{Veja StewPtCap3p14}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
F(x) &=& (6x^3)(7x^4) & \\
F'(x) &=& ((6x^3)(7x^4))' & \\
&=& \frac{d}{dx}((6x^3)(7x^4)) & \\
&=& (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\frac{d}{dx}(6x^3) & \text{Por [RProd] com } f(x) = 6x^3, g(x) = 7x^4 \\
&=& (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\cdot 6\frac{d}{dx}x^3 & \text{Por [RMC] com } c = 6, f(x) = x^3 \\
&=& (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\cdot 6\cdot 3x^2 & \text{Por [RPot] com } n = 3 \\
&=& (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)(18x^2) & \\
&=& (6x^3)\cdot 7\frac{d}{dx}x^4 + (7x^4)(18x^2) & \text{Por [RMC] com } c = 7, f(x) = x^4 \\
&=& (6x^3)\cdot 7\cdot 4x^3 + (7x^4)(18x^2) & \text{Por [RPot] com } n = 4 \\
&=& (6x^3)(28x^3) + (7x^4)(18x^2) & \\
&=& (6x^3)(28x^3) + 126x^6 & \\
&=& 168x^6 + 126x^6 & \\
&=& 294x^6 &
\end{array}$$

O que quer dizer "Por ... com ..."?

$$
\begin{array}{rcll}
F(x) & = & (6x^3)(7x^4) & \\
F'(x) & = & ((6x^3)(7x^4))' & \\
 & = & \boxed{\frac{d}{dx}((6x^3)(7x^4))} & \\
 & \boxed{=} & \boxed{(6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\frac{d}{dx}(6x^3)} & \text{Por [RProd] com } \boxed{f(x)} = \boxed{6x^3}, \boxed{g(x)} = \boxed{7x^4} \\
 & = & (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\cdot 6\frac{d}{dx}x^3 & \text{Por [RMC] com } c = 6, f(x) = x^3 \\
 & = & (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\cdot 6\cdot 3x^2 & \text{Por [RPot] com } n = 3 \\
 & = & (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)(18x^2) & \\
 & = & (6x^3)\cdot 7\frac{d}{dx}x^4 + (7x^4)(18x^2) & \text{Por [RMC] com } c = 7, f(x) = x^4 \\
 & = & (6x^3)\cdot 7\cdot 4x^3 + (7x^4)(18x^2) & \text{Por [RPot] com } n = 4 \\
 & = & (6x^3)(28x^3) + (7x^4)(18x^2) & \\
 & = & (6x^3)(28x^3) + 126x^6 & \\
 & = & 168x^6 + 126x^6 & \\
 & = & 294x^6 &
\end{array}
$$

Compare: nós definimos [RProd] como esta igualdade,

$$
\text{[RProd]} \quad = \quad \left(\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)\right)
$$

e se substituirmos $f(x)$ por $6x^3$ e $g(x)$ por $7x^4$ na igualdade [RProd] nós obtemos isto aqui,

$$
\begin{array}{lcl}
\text{[RProd]} & = & \left(\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)\right) \\
\text{[RProd]}\begin{bmatrix} \boxed{f(x)} := \boxed{6x^3} \\ \boxed{g(x)} := \boxed{7x^4} \end{bmatrix} & = & \left(\boxed{\frac{d}{dx}((6x^3)(7x^4))} \boxed{=} \boxed{(6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\frac{d}{dx}(6x^3)}\right)
\end{array}
$$

que é exatamente a igualdade que eu marquei lá em cima...

O que quer dizer "Por ... com ..."? (2)

$$\begin{array}{rcll}
F(x) & = & (6x^3)(7x^4) & \\
F'(x) & = & ((6x^3)(7x^4))' & \\
& = & \frac{d}{dx}((6x^3)(7x^4)) & \\
& = & (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\frac{d}{dx}(6x^3) & \text{Por } \text{[RProd] com } f(x)=6x^3, g(x)=7x^4 \\
& = & (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\cdot 6\frac{d}{dx}x^3 & \text{Por } \text{[RMC] com } c=6, f(x)=x^3 \\
& = & (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\cdot 6\cdot 3x^2 & \text{Por } \text{[RPot] com } n=3 \\
& = & (6x^3)\boxed{\frac{d}{dx}(7x^4)} + (7x^4)(18x^2) & \\
& \boxed{=} & (6x^3)\cdot\boxed{7\frac{d}{dx}x^4} + (7x^4)(18x^2) & \text{Por } \text{[RMC] com } \boxed{c}=\boxed{7}, \boxed{f(x)}=\boxed{x^4} \\
& = & (6x^3)\cdot 7\cdot 4x^3 + (7x^4)(18x^2) & \text{Por } \text{[RPot] com } n=4 \\
& = & (6x^3)(28x^3) + (7x^4)(18x^2) & \\
& = & (6x^3)(28x^3) + 126x^6 & \\
& = & 168x^6 + 126x^6 & \\
& = & 294x^6 &
\end{array}$$

Lembre que a "regra da multiplicação por constante" é esta igualdade aqui,

$$\text{[RMC]} \quad = \quad \left(\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}f(x)\right)$$

e se substituirmos c por 7 e $f(x)$ por x^4 nela nós obtemos isto aqui,

$$\begin{array}{rcl}
\text{[RMC]} & = & \left(\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}f(x)\right) \\
\text{[RMC]}\begin{bmatrix} \boxed{c} := \boxed{7} \\ \boxed{f(x)} := \boxed{x^4} \end{bmatrix} & = & \left(\boxed{\frac{d}{dx}(7x^4)} \boxed{=} \boxed{7\frac{d}{dx}x^4}\right)
\end{array}$$

O '$\boxed{=}$' logo acima desta frase justifica a parte que muda no '$\boxed{=}$' lá de cima!

Integração por chutar-e-testar

Por exemplo, digamos que queremos resolver isto aqui:

$$\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x \, dx = {\color{red}?}$$

Eu começaria por estes chutes,

$$\begin{array}{rcl}
{\color{red}[\text{TFC2}]} & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx = f(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
{\color{red}[\text{TFC2}]}\big[f(x) := 42\big] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx = 42\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
{\color{red}[\text{TFC2}]}\big[f'(x) := 99\big] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} 99\,dx = f(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
{\color{red}[\text{TFC2}]}\begin{bmatrix} f(x) := \operatorname{sen} x \\ f'(x) := \cos x \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} \cos x\,dx = (\operatorname{sen} x)\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
{\color{red}[\text{TFC2}]}\begin{bmatrix} f(x) := \operatorname{sen} 4x \\ f'(x) := 4\cos 4x \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} 4\cos 4x\,dx = (\operatorname{sen} 4x)\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
{\color{red}[\text{TFC2}]}\begin{bmatrix} f(x) := \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x \\ f'(x) := \cos 4x \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} \cos 4x\,dx = \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right)\Bigg|_{x=a}^{x=b} \right) \\
{\color{red}[\text{TFC2}]}\begin{bmatrix} f(x) := \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x \\ f'(x) := \cos 4x \\ a := 0 \\ b := \pi/2 \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x\,dx = \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi/2} \right)
\end{array}$$

...e depois eu faria isto aqui:

$$\begin{array}{rcl}
\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x\,dx & \overset{(1)}{=} & \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi/2} \\
& = & \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4\cdot 0\right) \\
& = & \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\pi\right) - \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 0\right) \\
& = & \left(\frac{1}{4}\cdot 0\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot 0\right) \\
& = & 0
\end{array}$$

A justificativa pra igualdade '$\overset{(1)}{=}$' acima é a última substituição da coluna da esquerda. Eu raramente escrevo todas as substituições da coluna da esqueda explicitamente, mas elas são *praticamente* o método que eu uso pra encontrar a substituição certa de cabeça...

Integração por chutar-e-testar (2)

Na verdade o método que eu uso pra encontrar a substituição que resolve esta integral definida,

$$\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x \, dx = ?$$

é este aqui...

$$\begin{array}{lcl}
[\text{TFC2}] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx = f(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
[\text{TFC2L}] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx \right) \\
[\text{TFC2L}]\,[f(x) := 42] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx \right) \\
[\text{TFC2L}]\,[f'(x) := 99] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} 99\,dx \right) \\
[\text{TFC2L}] \begin{bmatrix} f(x) := \operatorname{sen} x \\ f'(x) := \cos x \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} \cos x\,dx \right) \\
[\text{TFC2L}] \begin{bmatrix} f(x) := \operatorname{sen} 4x \\ f'(x) := 4\cos 4x \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} 4\cos 4x\,dx \right) \\
[\text{TFC2L}] \begin{bmatrix} f(x) := \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x \\ f'(x) := \cos 4x \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} \cos 4x\,dx \right) \\
[\text{TFC2L}] \begin{bmatrix} f(x) := \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x \\ f'(x) := \cos 4x \\ a := 0 \\ b := \pi/2 \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x\,dx \right) \\
[\text{TFC2}] \begin{bmatrix} f(x) := \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x \\ f'(x) := \cos 4x \\ a := 0 \\ b := \pi/2 \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x\,dx = \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} \right)
\end{array}$$

...ou seja, eu começo encontrando a substituição certa.
Tem vários jeitos de definir o que é a "substituição certa".
Um jeito é dizer que a substituição que resolve esta problema aqui

$$\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x \, dx = ?$$

é a que obedece isto:

$$[\text{TFC2L}] \begin{bmatrix} f(x) := ? \\ f'(x) := ? \\ a := ? \\ b := ? \end{bmatrix} = \left(\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x\,dx \right)$$

Um outro jeito é a gente começar aprendendo os métodos que o Stewart ensina, e depois a gente escrever isto aqui:

$$\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x \, dx = \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi/2}$$

A "substituição certa" é a que a gente usa pra justificar essa igualdade.
A justificativa dessa igualdade "Pelo [TFC2], com ...", e a "substituição certa" é o que vem depois do "com".

Todos os livros de Cálculo 2 que eu conheço supõem que os leitores são muito bons em "aplicar fórmulas complicadas em casos complicados"... Esse método super passo-a-passo de encontrar a substituição certa e aplicá-la é algo que eu inventei pra ajudar pessoas que tinham dificuldade com problemas de "aplicar fórmulas complicadas em casos complicados" – e eu só tive que inventar ele porque eu não encontrei nenhum livro que ensinasse como "aplicar fórmulas complicadas em casos complicados".
Se você conhecer algum livro ou vídeo que ensine técnicas pra isso, PELAMORDEDEUS ME MOSTRE!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

Cálculo 2 - 2024.2

Aulas 14 e 15: diferenciais
e introdução às regras de
mudança de variável na integral

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

Links

Quadros:
2jQ24 (2024.2) 21/out/2024

Provas:
2hT190 2023.2: P1, gabarito da questão 1
2gT113 2023.1: P1, gabarito da questão 1
2fT112 2022.2: P1, gabarito da questão 1

Leit4p55 (p.269) 4.9 A diferencial
Leit4p61 (p.275) reescritas (...) usando a notação de Leibniz
Leit5p13 (p.296) Suponha que desejamos antidiferenciar $(1+x^2)^9(2x)$
Leit5p13 (p.296) 5.2.1 Regra da cadeia para a antidiferenciação
Leit5p19 (p.302) Exercícios 5.2

StewPtCap1p5 (p.10) variável dependente
StewPtCap3p75 (p.228) Diferenciais
StewPtCap5p39 (p.360) 5.4 Integrais Indefinidas
StewPtCap5p48 (p.369) 5.5 A Regra da Substituição
StewPtCap5p51 (p.372) Regra da Substituição para as Integrais Definidas
StewPtCap5p51 (p.372) Demonstração. Seja F uma primitiva de f...
StewPtCap5p53 (p.374) Exercícios

Miranda117 4.7 Aproximações Lineares e Diferencial
Miranda119 Definição 7: a diferencial
Miranda189 6.2 Integração por Substituição
Miranda191 Exercícios
Miranda192 Exemplo 6.6
Miranda193 Não podemos calcular uma integral que possui tanto um x e um u nela
Miranda196 Exercícios

...reescritas usando a notação de Leibniz

O Leithold define diferenciais na p.269, e na p.275...
Leit4p55 (p.269) 4.9 A diferencial
Leit4p61 (p.275) ...usando a notação de Leibniz
ele tem esta tabela, em que ele mostra como as regras usuais de derivação podem ser traduzidas pra regras usando diferenciais:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{d(c)}{dx} &=& 0 \\
\frac{d(x^n)}{dx} &=& nx^{n-1} \\
\frac{d(cu)}{dx} &=& c\frac{du}{dx} \\
\frac{d(u+v)}{dx} &=& \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx} \\
\frac{d(uv)}{dx} &=& u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx} \\
\frac{d(\frac{u}{v})}{dx} &=& \frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2} \\
\frac{d(u^n)}{dx} &=& nu^{n-1}\frac{du}{dx}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
d(c) &=& 0 \\
d(x^n) &=& nx^{n-1}dx \\
d(cu) &=& c\,du \\
d(u+v) &=& du+dv \\
d(uv) &=& u\,dv+v\,du \\
d(\frac{u}{v}) &=& \frac{v\,du-u\,dv}{v^2} \\
d(u^n) &=& nu^{n-1}du
\end{array}$$

quando eu seguia a ordem dos livros e ensinava diferenciais em C2 as pessoas cometiam tantos, tantos, tantos erros nas provas – principalmente na mudança de variável na integral, que vamos ver na próxima página – que as provas eram um massacre...

...aí eu resolvi PROIBIR diferenciais em C2. A gente vai usar elas só em alguns pontos muito específicos da matéria de C2, e vai deixar pra ver elas direito em C3.

Introdução

A fórmula mais difícil de justificar de Cálculo 2 é essa aqui – a fórmula da mudança de variável na integral indefinida (“MVI”):

$$\int f'(\underbrace{g(x)}_{u}) \underbrace{\underbrace{g'(x)}_{\frac{du}{dx}}\, dx}_{du} = \int f'(u)\, du$$

Tem dois modos da gente acreditar nela. O primeiro é assim: os livros dizem que a MVI é verdade, então se a gente decorar ela e algumas demonstrações curtas dela e a gente aprender a recitá-las com muita, muita, *muita* convicção então a gente

- vai se convencer de que ela é verdade,
- vai ser capaz de usar ela na prova sem errar,
- e a gente vai ser capaz de convencer outras pessoas de que ela é verdade.

Tem uma demonstração da MVI aqui,

StewPtCap5p48 (p.369) 5.5 A Regra da Substituição

mas eu até hoje não consigo acreditar direito nessa demonstração – me parece que faltam muitos detalhes nela, *e eu não sei completar esses detalhes*.

O segundo modo da gente acreditar na MVI é a gente aprender a usar isso aqui,

$$[\text{MVD4}] = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\, dx & = & f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & f(g(b)) - f(g(a)) \\ & = & f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\, du \end{array} \right)$$

onde “MVD” quer dizer “mudança de variável na integral definida”, e o “4” quer dizer “versão com 4 igualdades”. Note que esse [MVD4] é uma demonstração – em que cada passo é fácil de justificar! – e não uma fórmula... a fórmula da MVD é essa aqui,

$$[\text{MVD1}] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\, dx \quad = \quad \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\, du \right)$$

e a fórmula da MVI é esta:

$$[\text{MVI1}] = \left(\int f'(g(x))g'(x)\, dx \quad = \quad \int f'(u)\, du \right)$$

as abreviações são estas,

$$\begin{array}{ccc} [\text{MVD4}] & \to & [\text{MVI3}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\text{MVD1}] & \to & [\text{MVI1}] \end{array}$$

e a gente vai aprender a expandir cada aplicação da [MVI1] pra uma aplicação da [MVD4] – em que cada passo vai ser fácil de justificar.

"Meu objetivo é..." (2)

Você já deve ter relido os slides da "Introdução ao curso"
`http://anggtwu.net/LATEX/2024-1-C2-intro.pdf`
várias vezes. A introdução tem um slide chamado "Meu objetivo é...", que tem esse trecho aqui:

> Cálculo 2 tem vários assuntos que funcionam assim: se você tentar aprender o assunto B direto ele é muito, muito, muito difícil, e você vai gastar – digamos – 200 horas de estudo pra aprender ele... mas se você aprender o assunto A primeiro você consegue aprender os dois assuntos, A e B, em 20 horas ao invés de 200.

e ela tem vários slides que falam de atividades que exercitam músculos mentais bem diferentes. O que importa agora é que "entender de cabeça" e "entender escrevendo as subtituições por extenso no papel" são atividades que exercitam músculos mentais beeem diferentes, e o modo rápido de aprender Cálculo 2 é nessa ordem aqui:

A. aprender a fazer as substituições no papel

B. aprender a fazer as substituições de cabeça

C. entender o que os livros dizem

Você só vai conseguir aprender o B ("...de cabeça") treinando bastante o A ("...no papel"), e pra conseguir entender o que os livros dizem ("C") você muitas vezes vai ter que expandir uma frase misteriosa do livro em MUITOS passos mais simples. Aqui tem alguns exemplos de coisas super complicadas que os livros que nós estamos usando escreveram em poucas frases cada uma:

StewPtCap5p51 (p.372) Seja F uma primitiva de f...
Miranda193 ...que possui tanto um x e um u...

A matéria desse curso é gigantesca e nós temos muito pouco tempo. Se você ficar insistindo em tentar entender "de cabeça" o que os livros dizem sem tentar escrever as substituições no papel eu vou ter que usar esse slogan daqui,

> MEU OBJETIVO É REPROVAR PESSOAS COMO VOCÊ!!!

que na verdade é uma versão abreviada de uma idéia bem maior – releia os slides da "Introdução ao curso" pra entender ela direito.

MVDs e MVIs

$$[\text{MVD4}] = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & f(g(b)) - f(g(a)) \\ & = & f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD1}] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI3}] = \left(\begin{array}{rcl} \int f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x)) \\ & = & f(u) \\ & = & \int f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI1}] = \left(\int f'(g(x))g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du \right)$$

MVDs e MVIs, versão colorida

$$[\text{MVD4}] = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & f(g(b)) - f(g(a)) \\ & = & f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD1}] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI3}] = \left(\begin{array}{rcl} \int f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x)) \\ & = & f(u) \\ & = & \int f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI1}] = \left(\int f'(g(x))g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du \right)$$

Um caso particular: $\int \cos(2x) \cdot 2\,dx$

$$
[\text{MVD4}] \qquad = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x))|_{x=a}^{x=b} \\ & = & f(g(b)) - f(g(a)) \\ & = & f(u)|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right)
$$

$$
[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} f(x){:=}\text{sen}(x) \\ f'(x){:=}\cos(x) \\ g(x){:=}2{\cdot}x \\ g'(x){:=}2 \\ a{:=}3 \\ b{:=}4 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=3}^{x=4} \cos(2\cdot x)\cdot 2\,dx & = & \text{sen}(2\cdot x)|_{x=3}^{x=4} \\ & = & \text{sen}(2\cdot 4) - \text{sen}(2\cdot 3) \\ & = & \text{sen}(u)|_{u=2\cdot 3}^{u=2\cdot 4} \\ & = & \int_{u=2\cdot 3}^{u=2\cdot 4} \cos(u)\,du \end{array} \right)
$$

Exercício 1

Lembre que:

$$[\text{MVD4}] = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & f(g(b)) - f(g(a)) \\ & = & f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD1}] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI1}] = \left(\int f'(g(x))g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du \right)$$

Sejam $[\text{S1}] = \begin{bmatrix} f'(u) := u^{10} \\ f(u) := \frac{1}{11}u^{11} \\ g(x) := x^2+4 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix}$ e $[\text{S2}] = \begin{bmatrix} f'(x) := \tan(x) \\ g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix}$.

Complete:
a) [MVI1][S1] = ?
b) [MVD4][S1] = ?
c) [MVI1][S2] = ?
d) [MVD1][S2] = ?
e) [MVD4][S2] = ?

O item (e) vai ajudar a gente a entender isso aqui:
StewPtCap5p51 (p.372) Demonstração. Seja F uma primitiva de f...

Expanda as justificativas

Na figura abaixo o [A] é um caso particular do [MVD4] *com justificativas*:

$$
\begin{array}{rcl}
[\text{TFC2}] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\big|_{x=a}^{x=b}\right) \\
[\text{defdif}] & = & \left(F(x)\big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)\right) \\
[\text{A}] & = & \left(\begin{array}{rcll}
\int_{x=3}^{x=4} \cos(2\cdot x)\cdot 2\,dx & = & \text{sen}(2\cdot x)\big|_{x=3}^{x=4} & \text{por } [\text{TFC2}]\left[\begin{smallmatrix} F(x):=\text{sen}(2\cdot x) \\ F'(x):=\cos(2\cdot x)\cdot 2 \\ a:=3 \\ b:=4 \end{smallmatrix}\right] \\
 & = & \text{sen}(2\cdot 4) - \text{sen}(2\cdot 3) & \text{por } [\text{defdif}]\left[\begin{smallmatrix} F(x):=\text{sen}(2\cdot x) \\ a:=3 \\ b:=4 \end{smallmatrix}\right] \\
 & = & \text{sen}(u)\big|_{u=2\cdot 3}^{u=2\cdot 4} & \text{por } [\text{defdif}]\left[\begin{smallmatrix} x:=u \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} F(u):=\text{sen}(u) \\ a:=2\cdot 3 \\ b:=2\cdot 4 \end{smallmatrix}\right] \\
 & = & \int_{u=2\cdot 3}^{u=2\cdot 4} \cos(u)\,du & \text{por } [\text{TFC2}]\left[\begin{smallmatrix} x:=u \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} F(u):=\text{sen}(u) \\ F'(u):=\cos(u) \\ a:=2\cdot 3 \\ b:=2\cdot 4 \end{smallmatrix}\right]
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Exercício 2.
Expanda cada uma das justificativas,

a) $[\text{TFC2}]\left[\begin{smallmatrix} F(x):=\text{sen}(2\cdot x) \\ F'(x):=\cos(2\cdot x)\cdot 2 \\ a:=3 \\ b:=4 \end{smallmatrix}\right] = ?$

b) $[\text{defdif}]\left[\begin{smallmatrix} F(x):=\text{sen}(2\cdot x) \\ a:=3 \\ b:=4 \end{smallmatrix}\right] = ?$

c) $[\text{defdif}]\left[\begin{smallmatrix} x:=u \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} F(u):=\text{sen}(u) \\ a:=2\cdot 3 \\ b:=2\cdot 4 \end{smallmatrix}\right] = ?$

d) $[\text{TFC2}]\left[\begin{smallmatrix} x:=u \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} F(u):=\text{sen}(u) \\ F'(u):=\cos(u) \\ a:=2\cdot 3 \\ b:=2\cdot 4 \end{smallmatrix}\right] = ?$

e veja que nem sempre a justificativa dá exatamente a igualdade à esquerda dela – às vezes ela dá só algo que, arrãm, *justifica* a igualdade.

Complete as justificativas

Na figura abaixo o [B] é um outro caso particular do [MVD4] com justificativas,

$$
\begin{array}{rcl}
\text{[TFC2]} & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
\text{[defdif]} & = & \left(F(x)\big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a) \right) \\
\text{[B]} & = & \left(\begin{array}{rcll}
\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & \text{por } ?_1 \\
 & = & f(g(b)) - f(g(a)) & \text{por } ?_2 \\
 & = & f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & \text{por } ?_3 \\
 & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du & \text{por } ?_4
\end{array} \right)
\end{array}
$$

Exercício 3.
Encontre justificativas que podem ser postas nas posições $?_1$, $?_2$, $?_3$ e $?_4$.

Dica:
É BEEEM difícil encontrar os $?_1$, $?_2$, $?_3$ e $?_4$ direto de cabeça...
Use o chutar e testar e não apague nenhum dos seus chutes e testes!

Dica 2:
"Resolver por chutar e testar" e "resolver de cabeça" são técnicas que usam músculos mentais diferentes, e quase sempre quando a gente encontra um problema "com cara de Cálculo 2" o modo mais rápido de descobrir como resolver ele "de cabeça" é começar tentando resolver ele "por chutar e testar"! Vou tentar fazer umas animações explicando a idéia geral por trás disso quando der. Isso tem a ver com uma das minhas áreas de pesquisa... um link:

`http://anggtwu.net/math-b.html#2022-md`

Resumindo: *treine chutar e testar!!!*

Mais um exemplo de chutar e testar

Isto é uma versão melhorada de...
2iQ34 um quadro da aula de 9/abril/2024.
Lembre que:

$$[\text{RC}] = \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

Digamos que queremos resolver isto,

$$\int \frac{2}{3x+4} + \frac{5}{6x+7}\,dx \;=\; ?$$

mas nós vamos começar por este problema mais simples,

$$\int \frac{2}{3x+4}\,dx \;=\; ?$$

que é equivalente a:

$$\frac{d}{dx}\,? \;=\; \frac{2}{3x+4}$$

Tente entender a solução por chutar e testar da direita. Muita gente acha que não pode fazer chutes e testes com números – porque, sei lá, talvez o Reginaldo tenha dito pra elas que isso é coisa de gente burra... mas repare que à direita eu fiz alguns chutes e testes usando números, e logo depois *eu transformei esses chutes e testes com números em chutes e testes com variáveis, que viraram fórmulas novas...* e acho que todo mundo concorda que inventar fórmulas e demonstrá-las é algo bem chique.

$$\begin{array}{rcll}
\frac{d}{dx}\ln x &=& \frac{1}{x} & \\
\frac{d}{dx}2\ln x &=& \frac{2}{x} & \\
\frac{d}{dx}\ln(g(x)) &\overset{(1)}{=}& \frac{1}{g(x)}g'(x) & \text{por [RC]} \begin{bmatrix} f(x):=\ln x \\ f'(x)=1/x \end{bmatrix} \\
&\overset{(2)}{=}& \frac{g'(x)}{g(x)} & \\
\frac{d}{dx}\ln(g(x)) &\overset{(3)}{=}& \frac{g'(x)}{g(x)} & \text{por (1) e (2)} \\
\frac{d}{dx}\ln(6x+7) &=& \frac{6}{6x+7} & \text{por (3)} \begin{bmatrix} g(x):=6x+7 \\ g'(x):=6 \end{bmatrix} \\
\frac{d}{dx}\ln(ax+b) &\overset{(4)}{=}& \frac{a}{ax+b} & \text{por (3)} \\
\frac{d}{dx}(c\ln(ax+b)) &\overset{(5)}{=}& c\frac{a}{ax+b} & \text{por (4)} \\
\frac{d}{dx}(c\ln(3x+4)) &\overset{(6)}{=}& c\frac{3}{3x+4} & \text{por (5)} \\
\frac{d}{dx}(\frac{1}{3}\ln(3x+4)) &\overset{(6)}{=}& \frac{1}{3}\frac{3}{3x+4} & \\
\frac{d}{dx}(\frac{1}{3}\ln(3x+4)) &=& \frac{1}{3x+4} & \\
\frac{d}{dx}(\frac{2}{3}\ln(3x+4)) &=& \frac{2}{3x+4} & \\
\frac{d}{dx}(\frac{a}{b}\ln(bx+c)) &=& \frac{a}{b}\frac{b}{bx+c} & \text{por (5)} \\
&=& \frac{a}{bx+c} & \\
\frac{d}{dx}(\frac{a}{b}\ln(bx+c)) &\overset{(7)}{=}& \frac{a}{bx+c} & \\
\int \frac{a}{bx+c}\,dx &\overset{(8)}{=}& \frac{a}{b}\ln(bx+c) & \text{por (7)} \\
\int \frac{2}{3x+4}\,dx &\overset{(9)}{=}& \frac{2}{3}\ln(3x+4) & \text{por (8)} \\
\int \frac{5}{6x+7}\,dx &\overset{(10)}{=}& \frac{5}{6}\ln(6x+7) & \text{por (8)} \\
\int \frac{2}{3x+4} + \frac{5}{6x+7}\,dx &\overset{(11)}{=}& \frac{2}{3}\ln(3x+4) + \frac{5}{6}\ln(6x+7) &
\end{array}$$

Leithold, p.302

Leit5p19 (p.302) Exercícios 5.2

```
(%i1) items : [
        ["1.", sqrt(1-4*y),          u=1-4*y],
        ["2.", (3*x - 1/4)^(1/3),    u=3*x-1/4],
        ["3.", (6   - 2*x)^(1/3),    u=6-2*x],
        ["4.", sqrt(5*r + 1),        u=5*r+1],
        ["5.", x*sqrt(x^2 - 9),      u=x^2-9],
        ["6.", 3*x*sqrt(4 - x^2),    u=4-x^2],
        ["7.", x^2*(x^3-1)^10,       u=x^3-1],
        ["8.", x*(2*x^2+1)^6,        u=2*x^2+1],
        ["9.", 5*x*(9-4*x^2)^(2/3),  u=9-4*x^2],
        ["10.", x/(x^2+1)^3,         u=x^2+1]
       ]$
(%i2) lfc_solve_m (items);
```

(%o2)

$$\begin{pmatrix}
1. & \int \sqrt{1-4\,y}\,dy & = & -\left(\frac{(1-4\,y)^{\frac{3}{2}}}{6}\right) \\
2. & \int \left(3\,x-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\,dx & = & \frac{\left(3\,x-\frac{1}{4}\right)^{\frac{4}{3}}}{4} \\
3. & \int (6-2\,x)^{\frac{1}{3}}\,dx & = & -\left(\frac{3\,(6-2\,x)^{\frac{4}{3}}}{8}\right) \\
4. & \int \sqrt{5\,r+1}\,dr & = & \frac{2\,(5\,r+1)^{\frac{3}{2}}}{15} \\
5. & \int x\,\sqrt{x^2-9}\,dx & = & \frac{(x^2-9)^{\frac{3}{2}}}{3} \\
6. & 3\,\int x\,\sqrt{4-x^2}\,dx & = & -(4-x^2)^{\frac{3}{2}} \\
7. & \int x^2\,(x^3-1)^{10}\,dx & = & \frac{(x^3-1)^{11}}{33} \\
8. & \int x\,(2\,x^2+1)^6\,dx & = & \frac{(2\,x^2+1)^7}{28} \\
9. & 5\,\int x\,(9-4\,x^2)^{\frac{2}{3}}\,dx & = & -\left(\frac{3\,(9-4\,x^2)^{\frac{5}{3}}}{8}\right) \\
10. & \int \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx & = & -\left(\frac{1}{4\,(x^2+1)^2}\right)
\end{pmatrix}$$

```
(%i3) lfc_change_m(items);
```

(%o3)

$$\begin{pmatrix}
1. & \int \sqrt{1-4\,y}\,dy & = & -\left(\frac{\int \sqrt{u}\,du}{4}\right) & u=1-4\,y \\
2. & \int \left(3\,x-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\,dx & = & \frac{\int u^{\frac{1}{3}}\,du}{3} & u=3\,x-\frac{1}{4} \\
3. & \int (6-2\,x)^{\frac{1}{3}}\,dx & = & -\left(\frac{\int u^{\frac{1}{3}}\,du}{2}\right) & u=6-2\,x \\
4. & \int \sqrt{5\,r+1}\,dr & = & \frac{\int \sqrt{u}\,du}{5} & u=5\,r+1 \\
5. & \int x\,\sqrt{x^2-9}\,dx & = & \frac{\int \sqrt{u}\,du}{2} & u=x^2-9 \\
6. & 3\,\int x\,\sqrt{4-x^2}\,dx & = & -\left(\frac{3\,\int \sqrt{u}\,du}{2}\right) & u=4-x^2 \\
7. & \int x^2\,(x^3-1)^{10}\,dx & = & \frac{\int u^{10}\,du}{3} & u=x^3-1 \\
8. & \int x\,(2\,x^2+1)^6\,dx & = & \frac{\int u^6\,du}{4} & u=2\,x^2+1 \\
9. & 5\,\int x\,(9-4\,x^2)^{\frac{2}{3}}\,dx & = & -\left(\frac{5\,\int u^{\frac{2}{3}}\,du}{8}\right) & u=9-4\,x^2 \\
10. & \int \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx & = & \frac{\int \frac{1}{u^3}\,du}{2} & u=x^2+1
\end{pmatrix}$$

```
(%i4)
```

Cálculo 2 - 2024.2

Aulas 17 a 19: Frações parciais

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

Links

2hT90 (2023.2) Versão anterior destes slides

Quadros:
2jQ32 (2024.2) 29/out/2024
2iQ33 (2024.1) 09/abr/2024
2hQ31 (2023.2) 19/set/2024
2hQ37 (2023.2) 20/set/2023
2gQ30 (2023.1) 19/mai/2023
2fQ17 (2022.2) 21/set/2022
2yQ43 (2019.2) 13/out/2019
2yQ106 (2019.2) 13/nov/2019: polinômios em duas variáveis
2xQ26 (2019.1) 17/mai/2029

Seções sobre frações parciais nos livros:
StewPtCap7p23 (p.438) Seção 7.4
Leit9p24 (p.551) Seção 9.5
Miranda240 Seção 8.1: Frações parciais
CederjC2V2p77 (p.75) 23. Frações parciais - primeira parte
CederjC2V2p93 (p.91) 24. Frações parciais - segunda parte

Eu tentei fazer um programa pra typesettear essas figuras mas o resultado ficou feio – 2bT212 – e eu ainda não tive tempo de melhorá-lo.

Polinômios de Laurent em Maxima:
`http://anggtwu.net/MAXIMA/laurent1.mac.html`

Sobre as questões de prova

A P1 vai ter uma questão em que você vai ter que resolver uma integral como essa aqui:

$$\int \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}\,dx$$

A VR e a VS vão ter questões em que você vai ter que resolver integrais de "funções racionais impróprias", como isto aqui,

$$\int \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{ex^2+fx+g}\,dx$$

em que você vai precisar de divisão de polinômios com resto.

Neste semestre eu vou considerar que frações parciais são principalmente uma desculpa pra gente aprender duas coisas: a) um jeito de lidar com polinômios que vai nos permitir fazer um montão de contas com polinômios ou de cabeça ou escrevendo muito pouco, e b) um caso que a gente precisa usar um pouquinho de Álgebra Linear – "resolver um sistema" – pra transformar uma integral complicada em outra mais simples.

A gente só vai ver os casos em que o polinômio do denominador tem raízes reais e essas raízes são todas diferentes.

A integral do $\frac{1}{x}$

Lembre que:

$$
\begin{array}{rcl}
[\mathrm{II}] & = & \left(\int f'(x)\,dx \;=\; f(x) \right) \\
[\mathrm{RC}] & = & \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) \;=\; f'(g(x))g'(x) \right) \\
[\mathrm{DFI}] & = & \left(\begin{array}{rcl}
f(g(x)) & = & x \\
\frac{d}{dx} f(g(x)) & = & \frac{d}{dx} x \\
 & = & 1 \\
\frac{d}{dx} f(g(x)) & = & f'(g(x))g'(x) \\
f'(g(x))g'(x) & = & 1 \\
g'(x) & = & \dfrac{1}{f'(g(x))}
\end{array} \right)
\end{array}
$$

e que eu estou usando uma definição pra integral indefinida na qual as duas igualdades abaixo são equivalentes:

$$
\begin{array}{rcl}
f(x) & = & \frac{d}{dx} g(x) \\
\int f(x)\,dx & = & g(x)
\end{array}
$$

Ou seja, pra mim o '$+C$' é opcional.

Me contaram que o Reginaldo dá errado pra quem não escreve o '$+C$', então se você for fazer C2 com ele no próximo semestre não esqueça o '$+C$'!!!

Exercício 1
Calcule a integral abaixo. Dica: $u = bx + c$.

$$
\int \frac{a}{bx+c}\,dx
$$

Temos:

$$
\begin{array}{rcl}
\exp(\ln(x)) & \overset{(1)}{=} & x \\
\ln' x & \overset{(2)}{=} & 1/\exp'(\ln(x)) \\
 & \overset{(3)}{=} & 1/\exp(\ln(x)) \\
 & \overset{(4)}{=} & 1/x \\
\frac{d}{dx} f(g(x)) & \overset{(5)}{=} & f'(g(x))g'(x) \\
\frac{d}{dx} \ln(-x) & \overset{(6)}{=} & \ln'(-x) \cdot -1 \\
 & \overset{(7)}{=} & 1/(-x) \cdot -1 \\
 & \overset{(8)}{=} & 1/x \\
\ln|x| & \overset{(9)}{=} & \begin{cases} \ln x & \text{quando } 0 < x, \\ \ln -x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\
\frac{d}{dx} \ln|x| & \overset{(10)}{=} & \frac{d}{dx} \begin{cases} \ln x & \text{quando } 0 < x, \\ \ln -x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\
 & \overset{(11)}{=} & \begin{cases} \frac{d}{dx} \ln x & \text{quando } 0 < x, \\ \frac{d}{dx} \ln -x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\
 & \overset{(12)}{=} & \begin{cases} 1/x & \text{quando } 0 < x, \\ 1/x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\
 & \overset{(13)}{=} & 1/x \\
1/x & \overset{(14)}{=} & \frac{d}{dx} \ln x \\
1/x & \overset{(15)}{=} & \frac{d}{dx} \ln(-x) \\
1/x & \overset{(16)}{=} & \frac{d}{dx} \ln|x| \\
\int \frac{1}{x}\,dx & \overset{(17)}{=} & \ln x \\
\int \frac{1}{x}\,dx & \overset{(18)}{=} & \ln(-x) \\
\int \frac{1}{x}\,dx & \overset{(19)}{=} & \ln|x|
\end{array}
$$

Contas sem “vai um” e polinômios

Compare esta conta com números,

$$\begin{array}{rl|l} & 2773 & 12 \\ \cline{3-3} - & 24 & 231 \\ \cline{2-2} & \;\,37 & \\ - & \;\,36 & \\ \cline{2-2} & \;\;\,13 & \\ - & \;\;\,12 & \\ \cline{2-2} & \;\;\;\;1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2400 &= 200 \cdot 12 \\ 360 &= 30 \cdot 12 \\ 12 &= 1 \cdot 12 \\ 2772 &= 231 \cdot 12 \\ 2773 &= 231 \cdot 12 + 1 \end{aligned}$$

Com esta conta com polinômios:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+7x^2+7x+3 & x+2 \\ \cline{2-2} -(2x^3+4x^2) & 2x^2+3x+1 \\ \quad 3x^2+7x & \\ \quad -(3x^2+6x) & \\ \qquad 1x+3 & \\ \qquad -(1x+2) & \\ \qquad\quad 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2x^3+4x^2+0x+0 &= (2x^2+0x+0)\cdot(x+2) \\ 3x^2+6x+0 &= (3x+0)\cdot(x+2) \\ 1x+2 &= 1\cdot(x+2) \\ 2x^3+7x^2+7x+1 &= (2x^2+3x+1)\cdot(x+2) \\ 2x^3+7x^2+7x+3 &= (2x^2+3x+1)\cdot(x+2)+1 \end{aligned}$$

Exercício 2

Traduza a conta com polinômios da esquerda pra notação de caixinhas daqui: 2xQ26, 2yQ43.

Exercício 3

Traduza a conta abaixo pra notação de caixinhas:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x+3} + \frac{4}{x-5} \\ = \; & \frac{2(x-5)}{(x+3)(x-5)} + \frac{(x+3)4}{(x+3)(x-5)} \\ = \; & \frac{2(x-5)+(x+3)4}{(x+3)(x-5)} \end{aligned}$$

Funções racionais

Exercício 4
Entenda a definição de "função racional própria" daqui – Miranda240 – e acrescente mais linhas nas contas do exercício 3 pra "simplificar" o resultado até ele virar uma "função racional própria". Faça isso tanto na notação usual quanto na notação de caixinhas.

Exercício 5
Entenda as contas do Exemplo 8.1 daqui – Miranda241 – e transforme a expressão abaixo numa função racional imprópria:

$$1000x^2 + 100x + 10 + \frac{2}{x+3} + \frac{4}{x-5}$$

Exercício 6
Isto aqui é verdade:

$$\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5} = \frac{(A+B)x + (-5A+3B)}{x^2-2x-15}$$

mostre porquê "aumentando o nível de detalhe" – transforme a igualdade acima numa série de igualdades na qual cada passo seja bem fácil de verificar.

Exercício 7
Resolva:

a) $(A+B)x + (-5A+3B) = 9x + 11$

b) $\dfrac{(A+B)x + (-5A+3B)}{x^2-2x-15} = \dfrac{9x+11}{x^2-2x-15}$

c) $\dfrac{(A+B)x + (-5A+3B)}{x^2-2x-15} = \dfrac{2x+7}{x^2-2x-15}$

d) $\dfrac{A}{x+3} + \dfrac{B}{x-5} = \dfrac{2x+7}{x^2-2x-15}$

e) $\displaystyle\int \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{2x+7}{x^2-2x-15}\,dx$

Exercício 8
(Bem trabalhoso, pra casa!)
Mostre como organizar a solução do (7f) em várias séries de igualdades fáceis de justificar, como no slide 3. Você pode precisar de algumas coisinhas em português, como na última página do PDF de 2022.2: 2fT137.

Aviso: Todos os slides a partir daqui são antigos!
Assim que der eu vou fazer uma faxina neles
e deixar só o que ainda serve!!!

Exercício 1
Algumas consequências da regra da cadeia...

$$[\mathrm{RC}] = \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

Obtenha os seguintes casos particulares da [RC]:

a) $g(x) = 2x$
b) $g(x) = 2x + 3$
c) $g(x) = x + 3$
d) $g(x) = x + 3, \ f(x) = \ln x$
e) $g(x) = -x$
f) $g(x) = -x, \ f(x) = \ln x$
g) $g(x) = -x + 200, \ f(x) = \ln x$

Exercício 2.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{3x}\,dx = ?$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{3x+4}\,dx = ?$

c) $\displaystyle\int \frac{2}{3x+4}\,dx = ?$

d) $\displaystyle\int \frac{a}{bx+c}\,dx = ?$

Derivadas formais (de novo)

Todas estas igualdades são verdadeiras,
mas se tentarmos formalizar elas com
todos os detalhes vamos ver que várias delas
falam de funções com domínios diferentes...

$$\begin{array}{rcl}
\frac{d}{dx}\ln x &=& \frac{1}{x} \\
\frac{d}{dx}\ln(-x) &=& \frac{1}{x} \\
\frac{d}{dx}\ln|x| &=& \frac{1}{x}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(x) \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(x)+C \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(-x) \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(-x)+C \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(|x|) \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(|x|)+C \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \begin{cases} \ln(-x)+C_1 & \text{quando } x<0, \\ \ln(x)+C_2 & \text{quando } x>0 \end{cases}
\end{array}$$

REPARE QUE:

$$\frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+5} = \frac{2(x+5)}{(x+3)(x+5)} + \frac{4(x+3)}{(x+3)(x+5)}$$

$$= \frac{2(x+5)+4(x+3)}{(x+3)(x+5)}$$

$$= \frac{2x+10 + 4x+12}{x^2+8x+15}$$

$$= \frac{6x+22}{x^2+8x+15}$$

A MAIORIA DOS PROGRAMAS DE "COMPUTER ALGEBRA" TEM FUNÇÕES QUE FAZEM A OPERAÇÃO ACIMA E A INVERSA DELA:

$$\left(\frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+5}\right) \underset{\substack{\text{"apart"} \\ \text{(DIFÍCIL)}}}{\overset{\substack{\text{"together"} \\ \text{(FÁCIL)}}}{\rightleftarrows}} \left(\frac{6x+22}{x^2+8x+15}\right)$$

Exercício 3.

a) $\text{together}\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}\right) = ?$

b) $\text{together}\left(\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}\right) = ?$

c) $\text{together}\left(\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}+\dfrac{C}{x-c}\right) = ?$

Exercício 4.

Exercício:

a) Encontre expressões para c, d, e, f que façam esta fórmula ser verdade:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{cx+d}{x^2+ex+f}$$

As suas fórmulas para c, d, e, f não podem conter "x".

b) Use a fórmula que você acabou de obter para encontrar os A, a, B, b tais que:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{2x+3}{x^2-7+10}$$

Exercício 4: uma solução pro item (a)

a)
$$
\begin{aligned}
\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b} &= \frac{cx+d}{x^2+ex+f} \\
\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b} &= \frac{A(x-b)}{(x-a)(x-b)}+\frac{B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \\
&= \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \\
&= \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab} \\
c &= A+B \\
d &= -Ab-Ba \\
e &= -a-b \\
f &= ab
\end{aligned}
$$

Exercício 4: uma solução pro item (a), cont...

Dá pra gente reescrever isso usando o '[:=]':

$$\left(\tfrac{A}{x-a}+\tfrac{B}{x-b} \;=\; \tfrac{cx+d}{x^2+ex+f}\right)\begin{bmatrix} c:=A+B \\ d:=-Ab-Ba \\ e:=-a-b \\ f:=ab \end{bmatrix}$$
$$=\left(\tfrac{A}{x-a}+\tfrac{B}{x-b} \;=\; \tfrac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab}\right),$$

e sabemos que esta igualdade é verdade:

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b} \;=\; \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab}$$

então isto aqui

$$\begin{array}{rcl} c &=& A+B \\ d &=& -Ab-Ba \\ e &=& -a-b \\ f &=& ab \end{array}$$

é uma solução para a equação

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b} \;=\; \frac{cx+d}{x^2+ex+f} \quad \ldots$$

mas não sabemos se é a única solução!

Sempre dá pra escrever soluções de equações usando o '[:=]'. Por exemplo, as duas soluções da equação

$$(x-2)(x-5)=0:$$

São:

$$\begin{array}{l} ((x-2)(x-5)=0)\,[x:=2] \;= \\ ((2-2)(2-5)=0) \\ ((x-2)(x-5)=0)\,[x:=5] \;= \\ ((5-2)(5-5)=0) \end{array}$$

Nenhum livro "básico" define "solução de uma equação" desse jeito — como "a substituição que transforma a equação numa igualdade verdadeira" — mas eu acho isso um bom modo de entender o que são "equações" e "soluções"...

Ah, note que eu não fiquei repetindo a condição "as suas fórmulas para c, d, e, f não podem conter 'x'" o tempo todo... eu deixei isso implícito. =)

Exercício 4: uma solução pro item (b)

Temos duas soluções para

$$(x-a)(x-b) = x^2 - 7x + 10:$$

uma é $a = 2$ e $b = 5$, e a outra é $a = 5$ e $b = 2$.
Lembre que Cálculo 2 é sobre chutar e testar.
A gente pode chutar que $a = 5$, $b = 2$, e que c, d, e, f são os que a gente obtém pelo item (a), e aí ver se isso nos leva a uma solução...

(Obs: isso funciona!!!)

Exercício 4: item (c)
Seja [PFP] esta igualdade aqui – o
"princípio por trás das frações parciais":

$$[\text{PFP}] \quad = \quad \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \quad = \quad \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \right)$$

c) Resolva o exercício 8.7.2 do livro do Miranda –
`http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=251`
e depois mostre qual é a substituição da forma

$$[\text{PFP}] \begin{bmatrix} a:=? \\ b:=? \\ A:=? \\ B:=? \end{bmatrix}$$

que "está por trás" da sua solução.

Exercício 5.

Use estas idéias para integrar:

$$\int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 3}{x+2}\,dx \quad = \quad ?$$

Exercício 6.

O que acontece nos casos em que "teria vai um"?

a) Tente fazer a divisão com resto de x^3 por $x+2$.
Mais precisamente, encontre um polinômios $R(x)$ e $Q(x)$ tais que $(x^3) = Q(x) \cdot (x+2) + R(x)$ e $R(x)$ é no máximo de grau 1.
Teste a sua resposta!

b) Calcule $\int \frac{x^3}{x+2}\,dx$ pelo método acima.
Teste a sua resposta derivando a sua antiderivada para $\frac{x^3}{x+2}$.

c) Calcule $\int \frac{x^3}{x+2}\,dx$ fazendo a substituição $u = x+2$.
Você deve obter o mesmo resultado que na (b).

d) Calcule $\int \frac{x^2}{(x+1)(x-1)}\,dx$ por frações parciais.

Dica importante

Lembre que uns dos meus slogans é
"eu só vou corrigir os sinais de igual"...
No slide ?? a igualdade mais importante é a da última linha.
Nós vamos usá-la assim, pra transformar a integral original
em algo fácil de integrar:

$$\int \frac{2x^3+7x^2+7x+3}{x+2}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x^2+3x+1)\cdot(x+2)+1}{x+2}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x^2+3x+1)\cdot\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} + \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \int 2x^2+3x+1 + \frac{1}{x+2}\,dx$$

Uma questão da P1 de 2020.1

A questão 3 da P1 de 2020.1,

`http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C2-P1.pdf`

era de frações parciais, e eu pus nesse PDF um gabarito parcial dela, que não inclui nem as contas da divisão de polinômios nem a verificação de que a nossa integral está certa. Faça a questão, incluindo a parte que não está no gabarito.

Cálculo 2 - 2024.2

Aula 20: derivada da função inversa

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

Links

2hT87 (2023.2) Versão anterior destes slides

Quadros:
2jQ43 (2024.2)
2hQ29 (2023.2)
2gQ26 (2023.1)
2eQ42 (2022.1)

StewPtCap3p35 (p.188) 3.5 Derivação Implícita
StewPtCap3p39 (p.192) Derivadas de Funções Trigonométricas Inversas
StewPtCap3p42 (p.195) Exercício 77
StewPtCap3p43 (p.196) 3.6 Derivadas de Funções Logarítmicas

MirandaP90 3.6 Derivada da Função Inversa
MirandaP97 4.1 Derivação Implícita
MirandaP101 4.2 Derivadas das Funções Exponencial e Logaritmo
MirandaP104 4.3 Derivação das Funções Trigonométricas Inversas

Leit3p59 (p.195) 3.8 Derivação implícita
Leit7p3 (p.421) 7 Funções inversas, logarítmicas e exponenciais
Leit7p4 (p.422) 7.1 Funções inversas
Leit7p13 (p.431) Exercícios 19 a 40
Leit7p13 (p.431) 7.2 Teoremas da função inversa e a derivada da inversa de uma função
Leit7p15 (p.433) 7.2.3 Teorema: derivada da função inversa
Leit8p2 (p.496) 8.1. Funções Trigonométricas Inversas

CederjC1V1p125 (p.123) 13. Derivação implícita
CederjC1V1p125 (p.123) $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=a}$ indicará $f'(a)$
CederjC1V2p109 (p.107) 27. O Teorema da função inversa
CederjC1V2p117 (p.115) 28. Funções trigonométricas inversas
CederjC1V2p125 (p.123) 29. Funções trigonométricas inversas. Continuação

Introdução

Pra mim a "fórmula da derivada da função inversa" e a "demonstração da fórmula da derivada da função inversa" são essas séries de igualdades aqui, que eu vou chamar de [DFI2] e [DFI6], onde o 2 e o 6 dizem o número de igualdades em cada uma:

$$\text{[DFI2]} \;=\; \left(\begin{array}{lrcl} \text{Se:} & f(g(x)) & = & x \\ \text{Então:} & g'(x) & = & \dfrac{1}{f'(g(x))} \end{array}\right)$$

$$\text{[DFI6]} \;=\; \left(\begin{array}{lrcl} \text{Se:} & f(g(x)) & = & x \\ \text{Então:} & \frac{d}{dx} f(g(x)) & = & \frac{d}{dx} x \\ & & = & 1 \\ & \frac{d}{dx} f(g(x)) & = & f'(g(x))g'(x) \\ & f'(g(x))g'(x) & = & 1 \\ & g'(x) & = & \dfrac{1}{f'(g(x))} \end{array}\right)$$

Você já viu algo assim em Cálculo 1 quando mostraram pra você que $\frac{d}{dx} \ln x = 1 \ldots$ mas agora nós vamos reusar essa demonstração pra provar várias outras coisas diferentes.

Exercício 0.
Calcule o resultado das substituições abaixo.

a) $\text{[DFI6]} \begin{bmatrix} g(x) := \ln x \\ g'(x) := \ln' x \\ f(x) := \exp x \\ f'(x) := \exp' x \end{bmatrix} = ?$

b) $\text{[DFI6]} \begin{bmatrix} g(x) := \ln x \\ g'(x) := \ln' x \\ f(x) := e^x \\ f'(x) := e^x \end{bmatrix} = ?$

c) $\text{[DFI2]} \begin{bmatrix} g(x) := \ln x \\ g'(x) := \ln' x \\ f(x) := e^x \\ f'(x) := e^x \end{bmatrix} = ?$

d) $\text{[DFI2]} \begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{arcsen} x \\ g'(x) := \operatorname{arcsen}' x \\ f(x) := \operatorname{sen} x \\ f'(x) := \cos x \end{bmatrix} = ?$

e) $\text{[DFI2]} \begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{arcsen} x \\ g'(x) := \operatorname{arcsen}' x \\ f(x) := \operatorname{sen} x \\ f'(x) := \sqrt{1-(\operatorname{sen} x)^2} \end{bmatrix} = ?$

Secante e tangente

Lembre que $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ e $\sec x = \frac{1}{\cos x}$. Vou definir estas abreviações – que vão ser temporárias, essas letras vão ter outros significados em outros lugares...

$$\begin{array}{rcl} s & = & \operatorname{sen} x \\ c & = & \cos x \\ t & = & \tan x \\ z & = & \sec x \end{array}$$

Então temos:

$$\begin{array}{l} z^2 = \frac{1}{c^2} = \frac{s^2+c^2}{c^2} = \frac{s^2}{c^2} + \frac{c^2}{c^2} = t^2+1 \\ \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \\ \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{1'g - 1g'}{g^2} = \frac{-g'}{g^2} \\ z' = \left(\frac{1}{c}\right)' = \frac{-c'}{c^2} = \frac{s}{c^2} = \frac{1}{c}\frac{s}{c} = zt \\ t' = \left(\frac{s}{c}\right)' = \frac{s'c - sc'}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} = z^2 \end{array}$$

Exercício 1.
Leia com cuidado todos os passos do "Então temos:" à esquerda e veja quais são os passos que você não acha óbvios. Expanda cada uma das igualdades que você achou complicadas em uma série de igualdades bem fáceis de justificar.

Exercício 2.
No item (e) do Exercício 0 eu usei que:

$$\operatorname{sen}' x = \sqrt{1 - (\operatorname{sen} x)^2}$$

ou seja, eu "expressei $\operatorname{sen}' x$ em termos de $\operatorname{sen} x$". Se você nunca viu essa expressão "expressar blá em termos de outro blá" veja como ela é usada nesta página do Stewart:

StewPtCap3p35 (p.188) 3.5 Derivação Implícita

Expresse:
a) $\sec x$ em termos de $\tan x$
b) $\tan x$ em termos de $\sec x$
c) $\tan' x$ em termos de $\tan x$
d) $\sec' x$ em termos de $\sec x$

Secante e tangente (2)

No final do exercício (0e) você obteve isto aqui,

$$\operatorname{arcsen}' x = \frac{1}{\sqrt{1 - (\operatorname{sen} \operatorname{arcsen} x)^2}}$$

ou seja, você agora sabe justificar a primeira igualdade daqui,

$$\begin{aligned} \operatorname{arcsen}' x &= \frac{1}{\sqrt{1 - (\operatorname{sen} \operatorname{arcsen} x)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

e imagino que a segunda também, porque ela é relativamente fácil...

Exercício 3.
a) Expresse $\arctan x$ em termos de x.
b) Expresse $\operatorname{arcsec} x$ em termos de x.
Aqui você vai ter que combinar idéias dos exercícios 0 e 2.

Dica 1: todas as idéias principais estão aqui:
StewPtCap3p39 (p.192)

Dica 2: releia estes dois trechos das legendas de um dos vídeos sobre didática que eu preparei no início do ano:

Visaud01:25 até 03:00
Visaud50:43 até 52:24

Você não quer (só) virar a pessoa que lê demonstrações complicadas e acha elas óbvias. O que vai ser mais útil pra você no futuro vai ser você virar a pessoa que sabe expandir demonstrações complicadas e transformar elas em demonstrações que os seus colegas entendam! Lembre da Dica 7 daqui:

2gT4 “Releia a Dica 7”

Cálculo 2 - 2024.2

Aulas 20 a 23: mais mudanças de variáveis

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

Links

CederjC2V2p19 (p.17) 17. Substituição simples
CederjC2V2p27 (p.25) 18. Substituição simples - continuação
CederjC2V2p31 (p.29) ou escrevemos todo o integrando com a variável t...
CederjC2V2p35 (p.33) 19. Integração por partes
CederjC2V2p45 (p.43) 20. Integração de potências e produtos de funções trigonométricas
CederjC2V2p55 (p.53) 21. Integração de potências e produtos de funções trigonométricas
CederjC2V2p65 (p.63) 22. Substituição trigonométrica
CederjC2V2p68 (p.66) Os três casos típicos
CederjC2V2p103 (p.101) 25. Aulas de exercícios

Links da aula 8:
2hQ21 Quadros da aula 8 (4a, 12/set/2023)
StewPtCap5p39 (p.360) 5.4 Integrais Indefinidas
StewPtCap5p48 (p.369) 5.5 A Regra da Substituição
StewPtCap7p5 (p.420) 7.1 Integração por Partes
2gT45 (2023.1) Mudança de variável: exemplo
2gT46 (2023.1) Mudança de variável: caixinhas

Mudança de variável na integral definida (MVD):
2eT131 (t-ints, p.12) Uma figura pra mudança de variável
2fT49 Meu PDF de 2022.2 sobre mudança de variáveis

Mudança de variável na integral indefinida (MVI):
2eT133 (t-ints, p.14) Um exemplo com contas
2eT135 (t-ints, p.16) Outro exemplo com contas
Leit5p13 (p.296) A regra da cadeia para a antidiferenciação
Leit9p10 (p.537) Integração de potências de sen e cos
Miranda189 6.2. Integração por substituição
Miranda192 Exemplo 6.6
Miranda193 Não podemos
Miranda196 Exercícios
Miranda255 8.3 Integrais Trigonométricas

Thomas55p11 (p.376) Theorem 5: Substitution in definite integrals
Thomas55p3 (p.370) Theorem 5: The substitution rule

Vídeo do Reginaldo:
`https://www.youtube.com/watch?v=PTCUjrEBc4g`

Introdução

O Stewart explica o truque da mudança de variável na integral usando *variáveis dependentes* e *diferenciais*. Por exemplo, se x é a variável independente, u é a variável dependente, e a relação entre elas é $u = g(x) = 2x$, então temos

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}2x = 2$$

e:

$$\int \operatorname{sen}(\underbrace{2x}_{u}) \underbrace{\underbrace{2}_{\frac{du}{dx}}\, dx}_{du} = \int \operatorname{sen}(u)\, du$$

Dê uma olhada:
StewPtCap1p5 (p.10) variável dependente
StewPtCap3p75 (p.228) Diferenciais
StewPtCap5p39 (p.360) 5.4 Integrais Indefinidas
StewPtCap5p48 (p.369) 5.5 A Regra da Substituição

Só que contas com variáveis dependentes e diferenciais são difíceis de justificar formalmente! A gente viu como expandir contas curtas em que certos passos têm justificativas complicadas em contas maiores mas em que cada passo tem uma justificativa bem simples... se a gente tenta fazer isso com a igualdade entre integrais acima a gente acaba descobrindo que as regras pra variáveis dependentes e diferenciais são bem complicadas.

Então eu vou fazer o seguinte. A regra da mudança de variável na integral definida, que o Stewart explica nesta página,

StewPtCap5p51 (p.372) ...para as integrais definidas

é bem fácil de demonstrar usando só o [TFC2].

Eu vou usar estas quatro definições aqui – onde [MVD] é a fórmula pra mudança de variável na integral definida, [MVI] é a fórmula pra mudança de variável na integral indefinida, [MVD4] é uma demonstração da [MVD] com 4 igualdades [MVI3] é uma demonstração da [MVI] com 3 igualdades,

$$\begin{array}{rcl}
[\text{MVD}] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \right) \\
[\text{MVI}] & = & \left(\int f(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int f(u)\,du \right) \\
[\text{MVD4}] & = & \begin{pmatrix} \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & F(g(b)) - F(g(a)) \\ & = & F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{pmatrix} \\
[\text{MVI3}] & = & \begin{pmatrix} \int f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x)) \\ & = & F(u) \\ & = & \int f(u)\,du \end{pmatrix}
\end{array}$$

e a gente vai ver que dá pra tratar algumas destas fórmulas e demonstrações como abreviações pras outras, e que dá pra expandir as versões mais abreviadas em outras em que os passos são mais fáceis de justificar.

Um exemplo

Isto aqui é um exemplo de como contas com mudança de variável costumam ser feitas na prática:

$$\begin{aligned}
&\int 2\cos(3x+4)\,dx \\
&= \int 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \\
&= \frac{2}{3}\int \cos u\,du \\
&= \frac{2}{3}\operatorname{sen} u \\
&= \frac{2}{3}\operatorname{sen}(3x+4)
\end{aligned}$$

É necessário indicar em algum lugar que a relação entre a variável nova e a antiga é esta: $u = 3x + 4$.

Compare as contas acima, que não têm nem os limites de integração nem as barras de diferença, com as da coluna da direita:

$$\begin{aligned}
&\int_{x=a}^{x=b} 2\cos(3x+4)\,dx \\
&= \int_{u=3a+4}^{u=3b+4} 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \\
&= \frac{2}{3}\int_{u=3a+4}^{u=3b+4} \cos u\,du \\
&= \frac{2}{3}\left((\operatorname{sen} u)\big|_{u=3a+4}^{u=3b+4}\right) \\
&= \frac{2}{3}\left((\operatorname{sen}(3x+4))\big|_{x=a}^{x=b}\right)
\end{aligned}$$

Nós vamos tratar a versão à esquerda como uma abreviação pra versão da direita. Note que pra ir da versão "completa" pra "abreviada" é super fácil, é só apagar os limites de integração e as barras de diferença – mas pra ir da versão "abreviada" pra "completa" a gente precisa reconstruir os limites de integração e as barras de diferença, o que é bem mais difícil.

Caixinhas de anotações

O meu truque preferido pra não me enrolar nas contas de uma mudança de variável é fazer uma caixinha de anotações como essa aqui,

$$\left[\begin{array}{c} u = 3x + 4 \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(3x+4) = 3 \\ \frac{du}{dx} = 3 \\ du = 3\,dx \\ dx = \frac{1}{3}\,du \end{array}\right]$$

na qual: a) a primeira linha diz a relação entre a variável antiga e a variável nova – que nesse exemplo é $u = 3x + 4$, b) todas as outras linhas da caixinha são consequências dessa primeira, e c) dentro da caixinha a gente permite gambiarras como:

$$dx = 42\,du$$

Durante quase todo o curso de C2 a gente vai tratar esse tipo de coisa como uma igualdade entre expressões incompletas – mais ou menos como se a gente estivesse dizendo isso aqui:

$$+20) = /99]$$

Na caixinha à esquerda eu colori as linhas que são gambiarras em vermelho.

Repare que se a gente soubesse usar diferenciais a gente saberia dar um sentido pras igualdades que envolvem diferenciais, e que eu marquei em vermelho... mas a gente não sabe, então a gente vai considerar que elas são gambiarras que a gente só vai entender direito em Cálculo 3.

Aqui tem um exemplo grande:
2fT112 (C2-P1, p.5) Questão 1: gabarito

Os detalhes horríveis

Nesta página aqui – Miranda193 – o Miranda diz "Não podemos calcular uma integral que possui tanto um x e um u nela", mas ele não explica porquê... se em

$$\int_{x=a}^{x=b} 2\cos(u)\,dx$$

esse u fosse uma abreviação para $3x+4$ essa integral acima seria equivalente à do início do slide anterior, né?... =(

Neste slide eu vou tentar contar o que eu sei sobre como o método da substituição funciona – *pra convencer vocês de que não vale a pena vocês tentarem entender os detalhes agora.*

Toda mudança de variável numa integral definida é consequência da igualdade (13) do slide "Contas (2)". Por exemplo, compare:

$$\begin{aligned}
\int_{x=a}^{x=b} g(h(x))h'(x)\,dx &= \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g(u)\,du \\
\int_{x=a}^{x=b} 2\cos(3x+4)\,dx &= \int_{u=3a+4}^{u=3b+4} 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du
\end{aligned}$$

A gente pode tentar descobrir qual é a substituição certa passo a passo, começando pelas funções mais simples.... eu faria assim: olhando pra parte direita eu chuto que $g(u) = 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}$; olhando pra parte esquerda eu chuto que $h(x) = 3x+4$, e daí $h'(x) = 3$; aí eu testo esta substituição aqui,

$$(13)\begin{bmatrix} g(u) := 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3} \\ h(x) := 3x+4 \\ h'(x) := 3 \end{bmatrix}$$

e vejo que o resultado dela é *equivalente* (mas não igual!!!) à última igualdade da coluna da esquerda – não preciso nem substituir o a e o b.

Preciso reescrever este slide!

Os detalhes horríveis (2)

Estas contas aqui,

$$\begin{array}{rcl} u &=& x^4 \\ \frac{du}{dx} &=& 4x^3 \\ du &=& \frac{du}{dx}dx \\ &=& 4x^3\,dx \end{array}$$

fazem sentido se a gente considerar que:

1. x é uma variável independente,
2. u é uma variável dependente, com $u = u(x) = x^4$,
3. dx é uma variável independente,
4. du é uma variável dependente, com $du = \frac{du}{dx}dx$,
5. estas regras sobre diferenciais valem: Leit4p61 (p.275),
6. estas regras sobre variáveis dependentes valem: Stew14p53 (p.951),
7. o dx num $\int f(x)\,dx$ funciona como uma diferencial.

Eu já perguntei pra vários matemáticos fodões que eu conheço – incluindo os desenvolvedores do Maxima, na mailing list – onde eu posso encontrar alguma formalização das regras de como lidar com variáveis dependentes, diferenciais e mudança de variável na integral indefinida, e todos eles me responderam a mesma coisa: "*não faço a menor idéia! Eu sei algumas das regras mas não todas, e não sei onde você pode procurar...*" =(

Moral: é melhor a gente tratar o $du = 4x^3\,dx$ como uma gambiarra...

Caixinhas com mais anotações

$$\begin{array}{rcl}\int (\operatorname{sen}\theta)^4(\cos\theta)^7\,d\theta &=& \int (\operatorname{sen}\theta)^4(\cos\theta)^6\cos\theta\,d\theta \\ &=& \int (\operatorname{sen}\theta)^4((\cos\theta)^2)^3\cos\theta\,d\theta \\ &=& \int (\operatorname{sen}\theta)^4(1-(\operatorname{sen}\theta)^2)^3\cos\theta\,d\theta \\ &=& \int s^4(1-s^2)^3\,ds \end{array} \quad \left[\begin{array}{c} \operatorname{sen}\theta = s \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \\ ds = \cos\theta\,d\theta \\ \cos\theta\,d\theta = ds \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{rcl}\int (\operatorname{sen}\theta)^4(\cos\theta)^7\,d\theta &=& \int (\operatorname{sen}\theta)^4(\cos\theta)^6\cos\theta\,d\theta \\ &=& \int s^4(1-s^2)^3\,ds \end{array} \quad \left[\begin{array}{c} \operatorname{sen}\theta = s \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \\ ds = \cos\theta\,d\theta \\ \cos\theta\,d\theta = ds \\ (\cos\theta)^2 = 1-(\operatorname{sen}\theta^2) \\ (\cos\theta)^2 = 1-s^2 \\ (\cos\theta)^6 = (1-s^2)^3 \end{array}\right]$$

Caixinhas com mais anotações (2)

$$\begin{aligned}\int s\sqrt{1-s^2}\,ds &= \int (\operatorname{sen}\theta)\sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2}\cos\theta\,d\theta \\ &= \int (\operatorname{sen}\theta)\sqrt{(\cos\theta)^2}\cos\theta\,d\theta \\ &= \int (\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)\cos\theta\,d\theta \\ &= \int (\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)^2\,d\theta\end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{c} s=\operatorname{sen}\theta \\ \frac{ds}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta=\cos\theta \\ ds=\cos\theta\,d\theta \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned}\int s\sqrt{1-s^2}\,ds &= \int (\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)\cos\theta\,d\theta \\ &= \int (\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)^2\,d\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds &= \int \frac{1}{\cos\theta}\cos\theta\,d\theta \\ &= \int 1\,d\theta \\ &= \theta \\ &= \operatorname{arcsen} s\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{c} s=\operatorname{sen}\theta \\ \frac{ds}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta=\cos\theta \\ ds=\cos\theta\,d\theta \\ s^2=(\operatorname{sen}\theta)^2 \\ 1-s^2=1-(\operatorname{sen}\theta)^2 \\ 1-s^2=(\cos\theta)^2 \\ \sqrt{1-s^2}=\cos\theta \\ \operatorname{arcsen} s=\operatorname{arcsen}\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{arcsen} s=\theta \\ \theta=\operatorname{arcsen} s \end{array}\right]$$

Caso particular 1 (MVD)

$$[\text{MVD}] \quad = \quad \left(\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVD}]\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\int_{x=a}^{x=b} f(2x)\cdot 2\,dx \;=\; \int_{u=2a}^{u=2b} f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVD}]\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx \;=\; \int_{u=2a}^{u=2b} \operatorname{sen} u\,du \right)$$

$$[\text{MVD4}] \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx &=& F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ &=& F(g(b)) - F(g(a)) \\ &=& F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ &=& \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}]\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f(2x)\cdot 2\,dx &=& F(2x)\big|_{x=a}^{x=b} \\ &=& F(2b) - F(2a) \\ &=& F(u)\big|_{u=2a}^{u=2b} \\ &=& \int_{u=2a}^{u=2b} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}]\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx &=& F(2x)\big|_{x=a}^{x=b} \\ &=& F(2b) - F(2a) \\ &=& F(u)\big|_{u=2a}^{u=2b} \\ &=& \int_{u=2a}^{u=2b} \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}]\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx &=& (-\cos 2x)\big|_{x=a}^{x=b} \\ &=& (-\cos 2b) - (-\cos 2a) \\ &=& (-\cos u)\big|_{u=2a}^{u=2b} \\ &=& \int_{u=2a}^{u=2b} \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

Caso particular 1 (MVI)

$$\text{[MVI]} = \left(\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \right)$$

$$\text{[MVI]} \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left(\int f(2x)\cdot 2\,dx = \int f(u)\,du \right)$$

$$\text{[MVI]} \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \left(\int \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx = \int \operatorname{sen} u\,du \right)$$

$$\text{[MVI3]} = \left(\begin{array}{rcl} \int f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x)) \\ & = & F(u) \\ & = & \int f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$\text{[MVI3]} \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int f(2x)\cdot 2\,dx & = & F(2x) \\ & = & F(u) \\ & = & \int f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$\text{[MVI3]} \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx & = & F(2x) \\ & = & F(u) \\ & = & \int \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

$$\text{[MVI3]} \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx & = & (-\cos 2x) \\ & = & (-\cos u) \\ & = & \int \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

Caso particular 2 (MVD)

$$[\text{MVD}] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVD}]\begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \left(\int_{x=a}^{x=b} f(x^2)\cdot 2x\,dx = \int_{u=a^2}^{u=b^2} f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVD}]\begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \left(\int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx = \int_{u=a^2}^{u=b^2} \operatorname{sen} u\,du \right)$$

$$[\text{MVD4}] = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x))|_{x=a}^{x=b} \\ & = & F(g(b)) - F(g(a)) \\ & = & F(u)|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}]\begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f(x^2)\cdot 2x\,dx & = & F(x^2)|_{x=a}^{x=b} \\ & = & F(b^2) - F(a^2) \\ & = & F(u)|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ & = & \int_{u=a^2}^{u=b^2} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}]\begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx & = & F(x^2)|_{x=a}^{x=b} \\ & = & F(b^2) - F(a^2) \\ & = & F(u)|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ & = & \int_{u=a^2}^{u=b^2} \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}]\begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx & = & (-\cos x^2)|_{x=a}^{x=b} \\ & = & (-\cos b^2) - (-\cos a^2) \\ & = & (-\cos u)|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ & = & \int_{u=a^2}^{u=b^2} \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

Caso particular 2 (MVI)

$$[\text{MVI}] = \left(\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \left(\int f(x^2)\cdot 2x\,dx = \int f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \left(\int \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx = \int \operatorname{sen} u\,du \right)$$

$$[\text{MVI3}] = \begin{pmatrix} \int f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x)) \\ & = & F(u) \\ & = & \int f(u)\,du \end{pmatrix}$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \int f(x^2)\cdot 2x\,dx & = & F(x^2) \\ & = & F(u) \\ & = & \int f(u)\,du \end{pmatrix}$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \int \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx & = & F(x^2) \\ & = & F(u) \\ & = & \int \operatorname{sen} u\,du \end{pmatrix}$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \int \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx & = & (-\cos x^2) \\ & = & (-\cos u) \\ & = & \int \operatorname{sen} u\,du \end{pmatrix}$$

Caso particular 3 (MVI)

$$[\text{MVI}] = \left(\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI}]\begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{sen} x \\ g'(x) := \cos x \end{bmatrix} = \left(\int f(\operatorname{sen} x)\cos x\,dx = \int f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI}]\begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{sen} x \\ g'(x) := \cos x \\ f(u) := u^2(1-u^2)^2 \end{bmatrix} = \left(\int (\operatorname{sen} x)^3(1-(\operatorname{sen} x)^2)^2\cos x\,dx = \int u^2(1-u^2)^2\,du \right)$$

$$[\text{MVI3}] = \left(\begin{array}{rcl} \int f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x)) \\ & = & F(u) \\ & = & \int f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}]\begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{sen} x \\ g'(x) := \cos x \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int f(\operatorname{sen} x)\cos x\,dx & = & F(\operatorname{sen} x) \\ & = & F(u) \\ & = & \int f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}]\begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{sen} x \\ g'(x) := \cos x \\ f(u) := u^2(1-u^2)^2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int (\operatorname{sen} x)^3(1-(\operatorname{sen} x)^2)^2\cos x\,dx & = & F(\operatorname{sen} x) \\ & = & F(u) \\ & = & \int u^2(1-u^2)^2\,du \end{array} \right)$$

O macaco, de novo

Estas duas igualdades são falsas

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2} & = & \cos\theta \\ \operatorname{arcsen}\operatorname{sen}\theta & = & \theta \end{array}$$

quando $\theta=\pi$... confira!

Mas elas são verdadeiras para $\theta=0$, e para todo θ num certo intervalo em torno do 0 que eu não quero contar qual é.

Lembre quem em Cálculo 2 a gente vai primeiro fazer as contas como o macaco que faz todas as contas como se tudo funcionasse, e a gente vai deixar pra checar os detalhes, como se θ está no intervalo certo, só no final, depois de termos feito as contas todas.

O Leithold é super cuidadoso nas contas e nesses detalhes como os domínios da funções e o intervalo onde mora o θ, mas a maioria dos outros livros de Cálculo 2 que eu conheço não são – eles são meio porcalhões com esses detalhes... e a gente também vai ser, senão não vai dar tempo de cobrir o suficiente da matéria.

O truque dos intervalos

Dê uma olhada nas primeiras páginas daqui:

Leit5p3 5.1. Antidiferenciação

O Leithold usa expressões como “num intervalo I”, “para todo $x \in I$” e “definidas no mesmo intervalo” um montão de vezes. O truque de usar sempre intervalos resolve esse esse problema daqui super bem:

2fT24 Meme: expanding brain, versão ln

A minha definição preferida pra integral indefinida,

2fT23 Outra definição pra integral indefinida

também resolve o problema – de um modo bem mais simples, e que é suficiente pro tipo de conta que a gente tem que treinar em Cálculo 2.

MVI

A nossa fórmula pra mudança de variável na integral indefinida vai ser esta aqui:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int f(u)\,du \;=\; \left(\int f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int f'(u)\,du\right)$$

Dá pra demonstrar ela deste jeito,

$$\int f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; f(g(x)) \;=\; f(u) \;=\; \int f'(u)\,du$$

onde a primeira e a terceira igualdades são consequências do , e a igualdade do meio só vale se tivermos $u = g(x)$.

Os livros demonstram a $\int f(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int f(u)\,du$ de um jeitos que eu nunca achei muito convincentes – ou fingindo que tudo é óbvio, ou "derivando tudo em x". As contas abaixo me ajudaram a entender o que acontece quando a gente "deriva tudo em x":

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\int f'(g(x))g'(x)\,dx\right)}_{f'(g(x))g'(x)} \;=\; \underbrace{\frac{d}{dx}f(g(x))}_{f'(g(x))g'(x)} \;=\; \underbrace{\frac{d}{dx}\underbrace{f(u)}_{f(g(x))}}_{f'(g(x))g'(x)} \;=\; \underbrace{\frac{d}{dx}\underbrace{\underbrace{\int f'(u)\,du}_{f(u)}}_{f(g(x))}}_{f'(g(x))g'(x)}$$

Simplificando raizes quadradas

Na aula de 16/maio/2023 você aprendeu – na prática, não vendo uma definição formal – o que é transformar uma integral mais difícil numa integral mais fácil, que nós sabemos integrar...

a) Digamos que você sabe integrar $\int \sqrt{1-s^2}\,ds$.
Transforme $\int \sqrt{1-(5x)^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

b) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

c) Digamos que você sabe integrar $\int \sqrt{1-s^2}^{\,k}\,ds$ para qualquer valor de k.
Transforme $\int \sqrt{1-(5x)^2}^{\,42}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

d) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}^{\,42}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

e) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}^{\,k}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

f) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}^{\,k}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

g) Entenda este truque aqui:

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{3^2-x^2} & = & \sqrt{3^2-3^2\frac{1}{3^2}x^2} \\
& = & \sqrt{3^2-3^2(\frac{x}{3})^2} \\
& = & \sqrt{3^2(1-(\frac{x}{3})^2)} \\
& = & \sqrt{3^2}\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2} \\
& = & 3\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}
\end{array}$$

Use ele – com adaptações, óbvio – pra transformar $\int \sqrt{25-x^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

h) Use ele pra transformar $\int \sqrt{25-x^2}^{\,42}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

i) Use ele pra transformar $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

j) Use ele pra transformar $\int \sqrt{a^2-x^2}^{\,k}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

j) Use ele pra transformar $\int x^{20}\sqrt{a^2-x^2}^{\,k}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

Exercício 3

Slogan:

> *Toda integral que pode ser resolvida por uma sequência de mudanças de variável pode ser resolvida por uma mudança de variável só.*

Durante a quarentena eu dei algumas questões de prova sobre este slogan. Dê uma olhada:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=4
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=9
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-P1.pdf#page=15

a) Resolva a integral abaixo usando uma mudança de variável só (dica: $u = g(h(x))$):

$$\int f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)\,dx = ?$$

b) Resolva a integral acima usando duas mudanças de variável. Dica: comece com $u = h(x)$.

O Miranda e o Leithold preferem fazer em um passo só certas mudanças de variáveis que eu prefiro fazer em dois ou três passos. Entenda o exemplo 8.1 do Miranda – o da seção 8.4, na página 264...
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#263

c) ...e descubra como resolver a integral dele fazendo duas mudanças de variáveis ao invés de uma só. A segunda mudança de variável vai ser $s = \operatorname{sen}\theta$, e a primeira eu prefiro não contar qual é – tente usar as idéias do exercício 1 pra descobrir qual ela tem que ser.

Ainda não atualizei este slide!

Cálculo 2 - 2024.2

Aulas 23 a 26: revisão de números complexos

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

Links

Quadros:
2jQ55 (2024.2)
2iQ81 (2024.1)
2hQ66 (2023.2)
2fQ45 (2022.2)
2yQ63 (2019.2)

Provas:
2yT12 (Gabarito da P1 de 2019.2) A questão 3 usa o truque do E
`http://anggtwu.net/LATEX/2018-2-C2-P1.pdf#page=2` Questão 1

StewPtCap17p6 (p.1020) Equações diferenciais de 2ª ordem
StewPtCap17p20 (p.1034) Caso 3: subamortecimento
StewPtApendiceHp5 (p.A51) Apêndice H: Números complexos

BoyceDip3p5 (p.105) Capítulo 3: Equações lineares de 2ª ordem
BoyceDip3p11 (p.111) Seção 3.2: o operador diferencial L
BoyceDip3p13 (p.113) Teorema 3.2.2: o princípio da superposição
BoyceDip3p21 (p.121) 3.3. Raízes complexas da equação característica
BoyceDip3p23 (p.123) Figura 3.3.1

BoyceDipEng3p4 (p.103) Chapter 3: Second-order linear ODEs
BoyceDipEng3p11 (p.110) Section 3.2: the differential operator L
BoyceDipEng3p13 (p.112) Theorem 3.2.2: principle of superposition
BoyceDipEng3p21 (p.120) 3.3 Complex Roots of the Characteristic Equation
BoyceDipEng3p24 (p.123) Figure 3.3.1

`http://www.youtube.com/watch?v=-dhHrg-KbJ0` $e^{\pi i}$ for dummies (Mathologer)
`https://en.wikipedia.org/wiki/Complex_number` (bom)
`https://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_complexo` (ruim, cheio de erros)

HernandezP57 (p.47) principais identidades trigonométricas

```
(%i1) Re(z)    := realpart(z)$
(%i2) Im(z)    := imagpart(z)$
(%i3) sqhyp(z) := Re(z)^2 + Im(z)^2$
(%i4) tom(z)   := matrix([Re(z),-Im(z)], [Im(z),Re(z)])$
(%i5) det(M)   := determinant(M)$
(%i6) nm(z)    := Re(z) + %i*Im(z)$
(%i7) stringdisp : false$
(%i8) z : a + %i*b;
```

(%o8)

$$i\,b+a$$

```
(%i9) w : c + %i*d;
```

(%o9)

$$i\,d+c$$

```
(%i10) matrix([    z , "+",      w , "=",   nm(z+w)],
              [tom(z), "+", tom(w), "=", tom(z)+tom(w)],
              [    "",  "",     "",  "",       ""      ],
              [    z , "*",      w , "=",   nm(z*w)    ],
              [tom(z), ".", tom(w), "=", tom(z).tom(w)]);
```

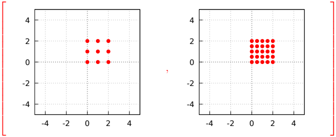
(%o10)

$$\begin{pmatrix} i\,b+a & + & i\,d+c & = & i\,(d+b)+c+a \\ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} c+a & -d-b \\ d+b & c+a \end{pmatrix} \\ & & & & \\ i\,b+a & * & i\,d+c & = & i\,(a\,d+b\,c)-b\,d+a\,c \\ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} & . & \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} a\,c-b\,d & -(a\,d)-b\,c \\ a\,d+b\,c & a\,c-b\,d \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

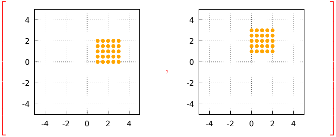
```
(%i11)  drawzpts (zs,[opts]) := myqdrawp(xyrange(), zpts(zs, opts))$
(%i12) [xmin,ymin, xmax,ymax] :  [-5,-5, 5,5]$
(%i13) myqdrawp_to_screen()$  myps(size)  := ps(size)$
(%i15) myqdrawp_to_new_pdf()$ myps(size)  := ps(size/5)$
(%i17)  as_33      : create_list(x+%i*y, y,seqn(2,0,2), x,seqn(0,2,2));
(%o17)
```

$$[2\,i, 2\,i+1, 2\,i+2, i, i+1, i+2, 0, 1, 2]$$

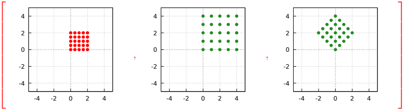
```
(%i18) as_55      : create_list(x+%i*y, y,seqn(2,0,4), x,seqn(0,2,4))$
(%i19) as_22      : create_list(x+%i*y, y,seqn(0,1,1), x,seqn(0,1,1))$
(%i20)  D1 : drawzpts(as_33,          myps(3), pc(red))$
        D2 : drawzpts(as_55,          myps(3), pc(red))$

(%i21)
(%i22) [D1, D2];
(%o22)
```




```
(%i23)  D3 : drawzpts(as_55 + 1,      myps(3), pc(orange))$

(%i24)  D4 : drawzpts(as_55 + %i,     myps(3), pc(orange))$

(%i25) [D3, D4];
(%o25)
```



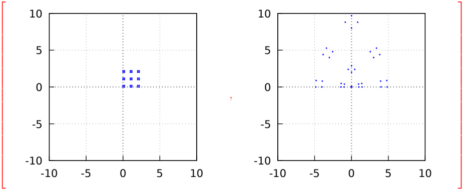
```
(%i26)  D5 : drawzpts(as_55 * 2,      myps(3), pc(forest_green))$
(%i27)  D6 : drawzpts(as_55 * (1+%i), myps(3), pc(forest_green))$
(%i28) [D2, D5, D6];
(%o28)
```



```
(%i29) topdf_opts : "height=10cm"$
(%i30) as_332    : create_list(z+w, z,as_33, w,as_22*0.2)$
(%i31) as_332_sq : makelist(z^2, z, as_332)$
(%i32) [xmin,ymin, xmax,ymax] :  [-10,-10, 10,10];
(%o32)
```

$$[-10, -10, 10, 10]$$

```
(%i33)  D7 : drawzpts(as_332,    myps(0.5))$
(%i34)  D8 : drawzpts(as_332_sq, myps(0.5))$
(%i35) [D7, D8];
(%o35)
```



```
(%i36)
```

2019.2

$$
\begin{aligned}
&(\operatorname{sen} 5\theta)^2(\cos 6\theta)^2 \\
= \quad & \left(\frac{E^5-E^{-5}}{2i}\right)^2 \left(\frac{E^6+E^{-6}}{2}\right)^2 \\
= \quad & -\tfrac{1}{16}(E^{10}-2+E^{-10})(E^{12}+2+E^{-12}) \\
= \quad & -\tfrac{1}{16}\begin{pmatrix} (E^{10}-2+E^{-10})E^{12}+ \\ (E^{10}-2+E^{-10})\cdot 2+ \\ (E^{10}-2+E^{-10})E^{-12} \end{pmatrix} \\
= \quad & -\tfrac{1}{16}\begin{pmatrix} E^{22}-2E^{12}+E^{2}+ \\ 2E^{10}-4+2E^{-10}+ \\ E^{-2}-2E^{-12}+E^{-22} \end{pmatrix} \\
= \quad & -\tfrac{1}{16}((E^{22}+E^{-22})-2(E^{12}+E^{-12})+2(E^{10}+E^{-10})+(E^2+E^{-2})-4) \\
= \quad & -\tfrac{1}{16}(2\cos 22\theta - 4\cos 12\theta + 4\cos 10\theta + 2\cos 2\theta - 4) \\
= \quad & -\tfrac{1}{8}\cos 22\theta + \tfrac{1}{4}\cos 12\theta - \tfrac{1}{4}\cos 10\theta - \tfrac{1}{8}\cos 2\theta \tfrac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int (\operatorname{sen} 5x)^2(\cos 6x)^2\,dx \quad &= \quad \int -\tfrac{1}{8}\cos 22x + \tfrac{1}{4}\cos 12x - \tfrac{1}{4}\cos 10x - \tfrac{1}{8}\cos 2x + \tfrac{1}{4}\,dx \\
&= \quad -\tfrac{1}{8\cdot 22}\operatorname{sen} 22x + \tfrac{1}{4\cdot 12}\operatorname{sen} 12x - \tfrac{1}{4\cdot 10}\operatorname{sen} 10x - \tfrac{1}{8\cdot 2}\operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{4}x
\end{aligned}
$$

Cálculo 2 - 2024.2

Aulas ?? até ??: Somas de Riemann

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

Links

Umas figuras (minhas) que mostram como
definir a integral como dois limites:
2eT95 A integral como limite

Alguns slides da introdução ao curso:
2iT19 Atirei o Pau no Gato
2iT20 Imagens de intervalos

StewPtCap5p8 (p.329) somas superiores e inferiores
StewPtCap5p10 (p.331) pontos amostrais
StewPtCap5p10 (p.331) notação de somatório
StewPtCap5p16 (p.337) definição da integral definida

Miranda207 7.1 Áreas e somas de Riemann
Miranda212 7.2 Integral definida
Miranda213 marcas; $C = \{x_i^*\}$
Miranda217 7.3. Definição 3: soma superior e inferior

Leit5p35 (p.313) Definição 5.4.1: $\sum$
Leit5p35 (p.318) Figura 3
Leit5p36 (p.319) Figura 4
Leit5p41 (p.324) 5.5. A integral definida

Livro de Análise do Ross:
RossAp16 (p.269) The Riemann Integral
2hT12 Imagens de intervalos: o Daniel leva um ano

Quadros:
2jQ65 2024.2, 25/nov/2024
2iQ51 2024.1, 01/jul/2024
2hQ39 2023.2, 25/set/2023
2gQ32 2023.2, 23/mai/2023

Spoiler: descontinuidades

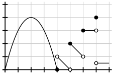
Digamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função qualquer.
Vamos definir o conjunto dos pontos de descontinuidade da f,
ou, pra abreviar, o "conjunto das descontinuidades da f", assim:

$$\mathsf{desc}(f) \;=\; \{\, x \in [a,b] \mid f \text{ é descontinua em } x \,\}$$

A expressão "f tem um número finito de pontos de descontinuidade",
que eu vou abreviar pra "f tem finitas descontinuidades" apesar
disso soar bem estranho em português, vai querer dizer:

$$\mathsf{desc}(f) \text{ é um conjunto finito}$$

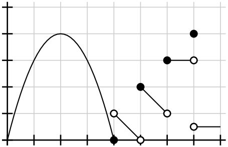
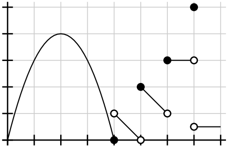
O conjunto vazio é finito, então toda f contínua "tem finitas
descontinuidades". Essa função aqui tem finitas descontinuidades:



A função de Dirichlet, que nós vimos aqui,
2dT104 (2021.2) A função de Dirichlet
tem infinitas descontinuidades.

Spoiler: descontinuidades (2)

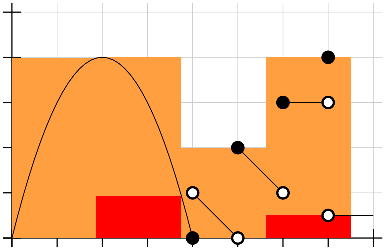
Sejam

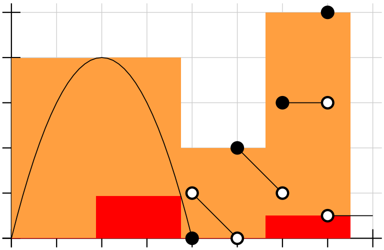
$f(x) =$  e $g(x) =$  .

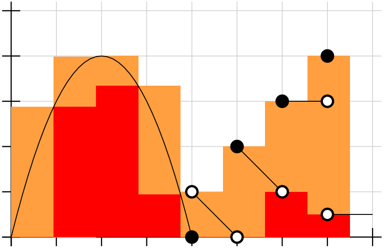
As figuras dos próximos slides mostram

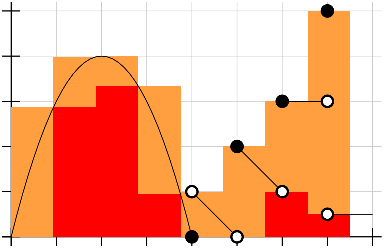
$$\overline{\int}_{[0,7.5]_{2^k}} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \overline{\int}_{[0,7.5]_{2^k}} g(x)\,dx$$

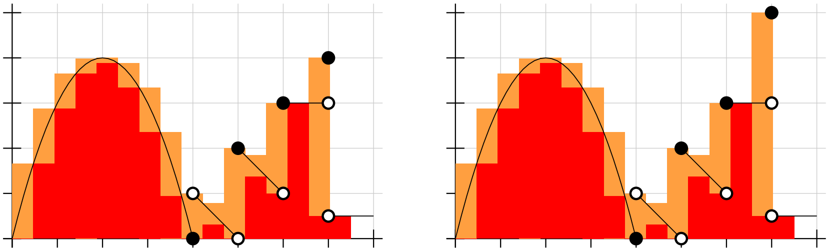
para vários valores de k. Use-as pra entender porque "na integral as descontinuidades não importam" — se só tivermos um número finito de descontinuidades.

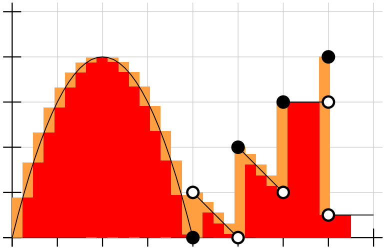


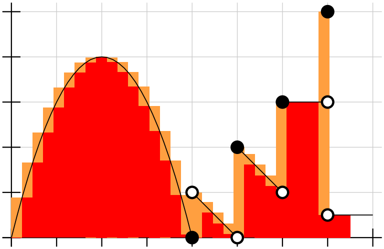


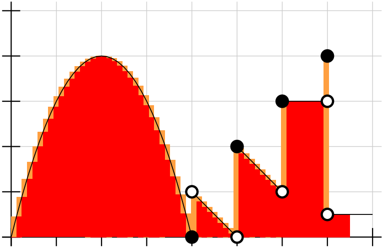


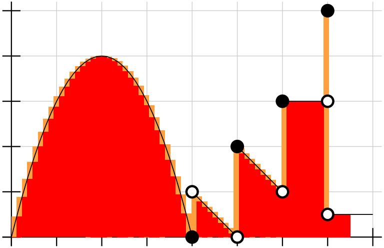


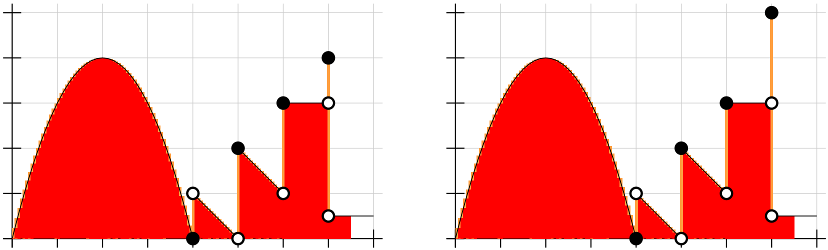










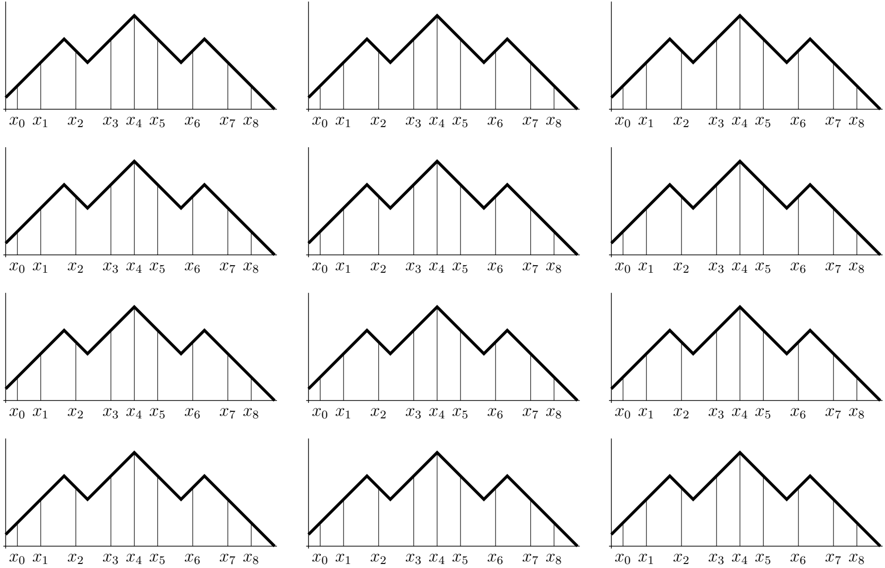


Montanhas

Seja $f(x)$ a função da próxima página – "as montanhas".
Você vai receber (pelo menos) uma cópia dessa página.
Faça cada item abaixo em um dos 12 gráficos da $f(x)$.

Represente graficamente cada um dos somatórios abaixo.
Se você tiver dificuldade com algum desses somatórios
faça ele em vários passos, como nestes slides:
2fT65 Somatórios
2gT85 Partições, informalmente

a) $\sum_{i=1}^{8} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$
b) $\sum_{i=1}^{8} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$
c) $\sum_{i=1}^{8} \max(f(x_{i-1}), f(x_i))(x_i - x_{i-1})$
d) $\sum_{i=1}^{8} \min(f(x_{i-1}), f(x_i))(x_i - x_{i-1})$
e) $\sum_{i=1}^{8} f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})(x_i - x_{i-1})$
f) $\sum_{i=1}^{8} \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1})$


x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

Miranda: somas inferiores e superiores

Nas páginas 217 e 218 o Miranda define as notações $I(f,P)$ e $S(f,P)$, e lá no meio dessas definições ele define

$$\min_{x\in I} f(x) \qquad \text{e} \qquad \max_{x\in I} f(x)$$

usando o truque do "vire-se": ele mostra uma figura e o leitor tem que se virar pra entender o que essas notações querem dizer... veja: Miranda217 (Definição 3)

Mais itens pra fazer na figura das montanhas
a) Entenda o que essas notações do Miranda querem dizer
e verifique que na figura das montanhas temos:

$$\begin{array}{rcl} \max(f(x_1), f(x_2)) & < & \displaystyle\max_{x\in[x_1,x_2]} f(x) \\ \displaystyle\min_{x\in[x_2,x_3]} f(x) & < & \min(f(x_2), f(x_3)) \end{array}$$

e depois represente nas montanhas:
b) $\sum_{i=1}^{8}(\max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x))(x_i - x_{i-1})$
c) $\sum_{i=1}^{8}(\min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x))(x_i - x_{i-1})$

Partições, informalmente

Informalmente uma partição de um intervalo $[a,b]$ é um modo de decompor $[a,b]$ em intervalos menores consecutivos. Por exemplo,

$$[2,7] = [2,3.5] \cup [3.5,4] \cup [4,6] \cup [6,7]$$

A definição "certa" é mais complicada... vamos vê-la daqui a pouco. O caso geral da igualdade acima é:

$$[a,b] = [a_1,b_1] \cup [a_2,b_2] \cup \ldots \cup [a_N,b_N],$$

onde:
N é o número de intervalos,
$a = a_1$, $b = b_N$, ("extremidades")
$a_i < b_i$ para todo i em que isto faz sentido $(i = 1,\ldots,N)$
$b_i = a_{i+1}$ para todo i e.q.i.f.s.; neste caso, $i = 1,\ldots,N-1$

Um jeito prático de definir uma partição é usando uma tabela.
Por exemplo, esta tabela

i	a_i	b_i	I_i
1	2	3.5	$[2,3.5]$
2	3.5	4	$[3.5,4]$
3	4	6	$[4,6]$
4	6	7	$[6,7]$

corresponde à partição de $[2,7]$ do início deste slide.

Compare com:
Miranda212 7.2 Integral definida
Leit5p41 (p.324) 5.5 A integral definida
StewPtCap5p8 (p.329) somas superiores e inferiores
StewPtCap5p10 (p.331) pontos amostrais
StewPtCap5p16 (p.337) definição da integral definida

Uma definição um pouco melhor de partição é a seguinte.
Digamos que P seja um subconjunto não-vazio e finito de $\mathbb{R}$,
e que o menor elemento de P seja a e o maior seja b.
Então P é uma partição do intervalo $[a,b]$.

Exemplo: a partição $P = \{2,3.5,4,6,7\}$ corresponde a:

$$[2,7] = [2,3.5] \cup [3.5,4] \cup [4,6] \cup [6,7]$$

Pra fazer a tradução da "versão conjunto" pra "versão tabela" ponha os elementos de P em ordem e chame-os de $b_0,\ldots,b_N$; defina cada a_i como sendo b_{i-1} – por exemplo, $a_1 = b_0$ – e encontre a, b, e N. Depois que você tem a "versão tabela" é bem fácil obter a "versão união de intervalos".

Quando dizemos algo como "Seja P a partição $\{2.5,4,6\}$" estamos criando um contexto no qual há uma partição "default" definida... e neste contexto vamos ter valores definidos para N, a, b, e para cada a_i e b_i. Por exemplo...

Seja P a partição $\{2.5,4,6\}$. Então

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^N f(b_i)\cdot(b_i-a_i) & = & \sum_{i=1}^2 f(b_i)\cdot(b_i-a_i) \\ & = & f(b_1)\cdot(b_1-a_1) \\ & + & f(b_2)\cdot(b_2-a_2) \\ & = & f(4)\cdot(4-2.5) \\ & + & f(6)\cdot(6-4) \end{array}$$

A definição de partição

Se P é um subconjunto finito e não-vazio de $\mathbb{R}$,
então podemos interpretar P como uma partição...
Por exemplo, se $P = \{200, 20, 42, 99, 63, 33, 20, 20\}$
então $P = \{20, 33, 42, 63, 99, 200\}$, e aí vamos interpretar
esse conjunto de 6 pontos – ordenados em ordem crescente –
como uma partição do intervalo $I = [a, b] = [20, 200]$ em
5 subintervalos ("$N = 5$"), assim:

$$\begin{array}{cccccccl}
20 & 33 & 42 & 63 & 99 & 200 & & \\
x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & & \\
a_1 & b_1 & & & & & & I_1 = [a_1, b_1] \\
 & a_2 & b_2 & & & & & I_2 = [a_2, b_2] \\
 & & a_3 & b_3 & & & & I_3 = [a_3, b_3] \\
 & & & a_4 & b_4 & & & I_4 = [a_4, b_4] \\
 & & & & a_5 & b_5 & & I_5 = [a_5, b_5] \\
a & & & & & b & & I = [a, b] = [x_0, x_N]
\end{array}$$

Exercícios sobre partições

a) Converta esta "partição"

$$[4,12] = [4,5] \cup [5,6] \cup [6,9] \cup [9,10] \cup [10,12]$$

para uma tabela. Neste caso quem são a, b e N?

b) Seja $P = \{2.5, 3, 4, 6, 10\}$.
Converta P para o "formato tabela" e para o "formato união de subintervalos", que é este aqui:

$$[a,b] = [a_1, b_1] \cup \ldots \cup [a_N, b_N].$$

c) Seja $P = \{4, 2, 1, 1.5\}$.
Interprete P como uma partição. Diga quem são o N, o a e o b dela e monte a tabela dos subintervalos dela.

d) Seja $P = [2,4]_6$.
Diga quem são os pontos da partição P.

e) Seja $P = [2,5]_{2^3}$.
Diga quem são os pontos da partição P.

Uma dica sobre simplificação
No Ensino Médio às vezes convencem a gente de que uma fração como $\frac{6}{4}$ tem que ser simplificada pra $\frac{3}{2}$, mas se a gente tem que listar uma sequência de números começando em 0 em que cada número novo é o anterior mais $\frac{1}{4}$ eu acho bem melhor escrever essa sequência como

$$\frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \ldots$$

do que como:

$$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \ldots$$

Lembre destes trechos da Dica 7: 2gT4

"Uma solução bem escrita é fácil de ler e fácil de verificar", e "Se as outras pessoas acharem que ler a sua solução é um sofrimento, isso é mau sinal; se as outras pessoas acharem que a sua solução está claríssima e que elas devem estudar com você, isso é bom sinal".

Aviso

As próximas páginas têm definições precisas de: partição, inf e sup, [inf] e [sup], integral definida, e um monte de definições intermediárias que a gente vai precisar pra entender as definições mais importantes...

O objetivo desta parte do curso é fazer vocês aprenderem um monte de $\boxed{\textit{técnicas}}$ *pra entenderem definições complicadas "visualizando o que elas querem dizer". Estas técnicas vão ser uma das partes do curso que vão ser mais úteis pras matérias seguintes.*

Aparentemente cada um dos exercícios deste PDF tem um monte de "dicas" de como fazê-lo. A gente normalmente imagina que essas dicas sejam só sugestões de um modo de chegar até o resultado final, mas aqui não é bem assim...

Lembre que neste slide daqui, da "Introdução ao curso",

2hT22 Sobre aulas expositivas

eu falei em "músculos mentais diferentes". Essa idéia vai valer aqui também; por exemplo, nos slides sobre o "Jogo colaborativo" eu digo que é pro jogador P escrever as suas jogadas num determinado formato e pro jogador O escrever as suas respostas num outro formato, e digo que se o jogador P não entender imediatamente a resposta do jogador O é porque o jogador P tem que rever certos exercícios básicos de "set comprehensions"...

Escrever as jogadas exatamente nesses formatos vai exercitar uma série de músculos mentais bem específicos.

Aviso (2)

Quando a gente vê um artista do Cirque de Soleil fazendo um número de aéreos a gente reconhece imediatamente que ele tem uma coordenação motora absurda e que ele tá usando um monte de músculos que a gente nunca usou e um monte de outros músculos que a gente nem sabia que existiam...

Quando a gente vê uma pessoa que entende bem – *e que é capaz de explicar claramente* – cada detalhe de uma definição bizarramente complicada como essa daqui, que o Stewart fez altos malabarismos pra ela caber em 9 linhas,

StewPtCap5p16 (p.337)

é a mesma coisa, só que essa pessoa treinou músculos mentais. *Nos exercícios deste PDFzinho a gente vai treinar vários dos músculos mentais que essas pessoas mais usam – e pra isso a gente vai fazer devagar e por escrito e com desenhos muitas coisas que elas fazem de cabeça.*

Também dá pra comparar o que a gente vai fazer aqui com a historinha deste slide:

2hT11 Atirei o pau no gato

Algumas mudanças de nota no Atirei o pau no gato exigem que a gente levante uns dedos da flauta ao mesmo tempo que a gente abaixa outros... a gente só consegue aprender isso treinando muitas vezes muito devagar, e enquanto a gente não treina bastante o som fica horrível.

Um jogo colaborativo

...ou: como debugar representações gráficas.
Pense num jogo colaborativo. Os jogadores se chamam P ("proponente"), e O ("oponente"). O P quer encontrar uma representação gráfica pro conjunto A, e à primeira vista o O quer mostrar que o P está errado... mas na verdade o objetivo dos dois é fazer com que o P chegue numa representação gráfica que não tem erro nenhum.

Digamos que

$$A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1, 2),\ y \in [1, 2) \,\}.$$

O P desenha uma representação gráfica com um nome diferente de A e "propõe" ela — por exemplo, o P diz isso aqui:

$A' =$ 

O oponente O diz: "verifica o ponto $(1, 1)$". Os dois verificam o ponto $(1, 1)$ do A' e vêem que o desenho do A' é ambíguo no ponto $(1, 1)$, já que esse é um ponto de fronteira e o P não desenhou ele nem como linha grossa sólida nem com linha tracejada... então a resposta pra pergunta "$(1, 1) \in A'$?" não é nem **V** nem **F**, é "erro", e portanto $A \neq A'$, e o P ainda não conseguiu a representação gráfica certa. O oponente O ganha essa rodada, e o P tem que propôr outra representação gráfica.

Aí o P propõe uma outra representação gráfica, com um outro nome, diferente de A e de A'. Por exemplo, P propõe isso aqui:

$A'' =$ 

O oponente O diz: "verifica o ponto $(0, 0)$". Os dois verificam, e vêem que:

$$(0, 0) \notin A, \quad (0, 0) \in A''$$

E portanto $A \neq A''$, e o P ainda não conseguiu a representação gráfica certa. O oponente O ganha mais essa rodada.

Quando o P propõe um desenho que o O não consegue mostrar que está errado o P ganha a rodada.

Até vocês terem prática vocês vão jogar como o P, vão me mostrar as representações gráficas de vocês, e eu vou jogar como o O. Quando vocês tiverem mais prática vocês vão conseguir chutar representações gráficas (como o jogador P) e testá-las (fazendo o papel do jogador O vocês mesmos).

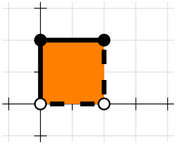
Um jogo colaborativo (2)

Represente graficamente os seguintes conjuntos:

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[1,2),\ y\in[1,2)\,\} \\ B & = & \{\,(x,2x) \mid x\in[1,2)\,\} \\ C & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x \ \wedge\ x+y<2\,\} \end{array}$$

Dica: todos eles vão dar subconjuntos do plano feitos de infinitos pontos, e você vai ter que adaptar as convenções que usamos pra desenhar intervalos pra desenhar *regiões*.

Use bolinhas cheias pra indicar "este ponto pertence ao conjunto", bolinhas ocas pra indicar "este ponto não pertence ao conjunto", linhas grossas contínuas pra indicar "esse trecho da fronteira pertence ao conjunto" e linhas tracejadas pra indicar "esse trecho da fronteira não pertence ao conjunto". Por exemplo:



Dica: se você não tem nenhuma prática com as duas notações da forma $\{\ldots \mid \ldots\}$ – por exemplo:

$$\begin{array}{rcl} \{\underbrace{a\in\{1,2,3,4\}}_{\text{gerador}} \mid \underbrace{a\ge 3}_{\text{filtro}}\} & = & \{3,4\} \\ \{\underbrace{10a}_{\text{expr}} \mid \underbrace{a\in\{1,2,3,4\}}_{\text{gerador}}\} & = & \{10,20,30,40\} \end{array}$$

então comece fazendo alguns exercícios daqui:

MpgP8 (até a p.12) Set Comprehensions

Todos os exercícios dessa parte do MPG dão conjuntos finitos, e os conjuntos A, B e C da coluna da esquerda são infinitos.

Imagens de intervalos

Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ então em princípio a expressão $f(\{7,8,9\})$ deveria dar um erro, porque f é uma função que espera receber um número, e $\{7,8,9\}$ é um conjunto... mas aí normalmente a gente define que o comportamento da f quando ela recebe um conjunto vai ser este aqui:

$$f(A) \quad = \quad \{\, f(a) \mid a \in A \,\}$$

A gente diz que $f(A)$ é a imagem do conjunto A.

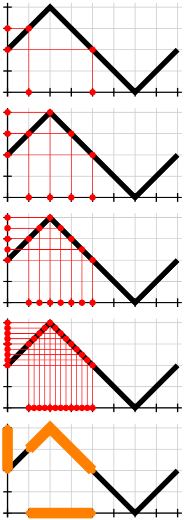
Algumas pessoas – como o Carlos, aqui: 2gT12 – acham que isto é sempre verdade:

$$f([a,b]) = [f(a), f(b)].$$

Não seja como o Carlos!!! Seja como o Bob!!!

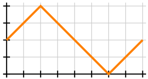
Nas figuras à direita temos:

$$\begin{aligned}
f(\{1,4\}) &= \{f(1), f(4)\} \\
&= \{3,2\} \\
&= \{2,3\} \\
f(\{1,2,3,4\}) &= \{f(1), f(2), f(3), f(4)\} \\
&= \{2,3,4,3\} \\
&= \{2,3,4\} \\
f([1,4]) &= [2,4] \\
[f(1), f(4)] &= [3,2] \\
&= \{\, y \in \mathbb{R} \mid 3 \le y \le 2 \,\} \\
&= \emptyset \\
&\neq f([1,4])
\end{aligned}$$



Imagens de intervalos: exercício

Seja $f(x)$ esta função:

$f(x) =$ 

Calcule estas imagens de intervalos:

a) $f([0,1])$	a') $f((0,1))$
b) $f([1,2])$	b') $f((1,2))$
c) $f([0,2])$	c') $f((0,2))$
d) $f([2,3])$	d') $f((2,3))$
e) $f([1,3])$	e') $f((1,3))$
f) $f([0,3])$	f') $f((0,3))$
g) $f([0,4])$	g') $f((0,4))$
h) $f([4,8])$	h') $f((4,8))$
i) $f([0,8])$	i') $f((0,8))$
j) $f([1,7])$	j') $f((1,7))$

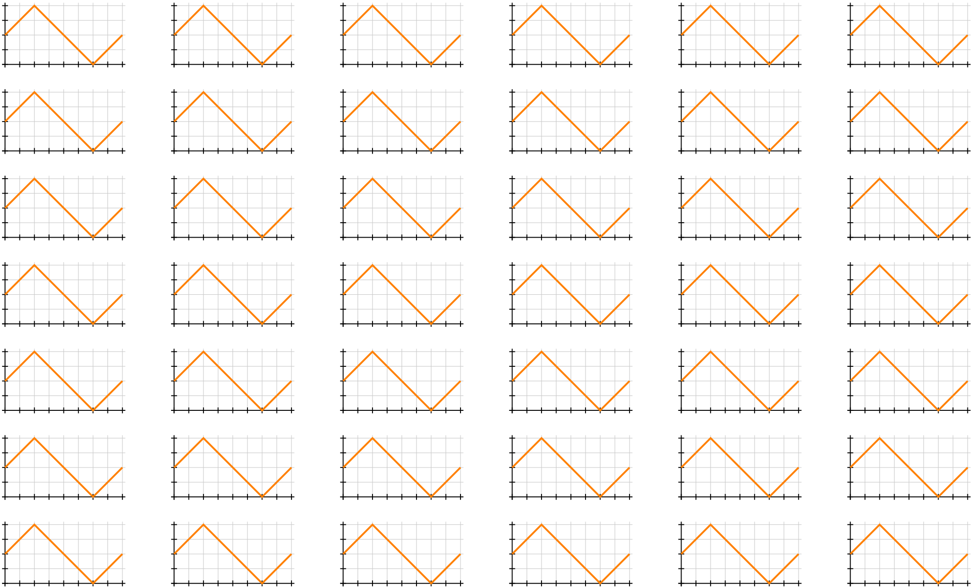
Dicas:

1) Faça os itens (a) até (j) primeiro. Os itens (a') até (j') são bem mais difíceis, e em alguns deles os resultados vão ser conjuntos fechados ou "semi-abertos".

2) O Leithold define intervalos semi-abertos aqui: Leit1p7

3) Nos casos em que você tiver dificuldade de encontrar o $f(I)$ desenhe num gráfico só:

a função $f(x)$,
o conjunto I (no eixo x),
o conjunto $\{\,(x, f(x)))\mid x \in I\,\}$
(sobre o gráfico da f),
e o conjunto $f(I)$ (no eixo y).

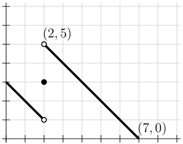


As definições de inf e sup

Digamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$.
Vamos definir $\inf(f(B))$ e $\sup(f(B))$ —
e também $\inf(D)$ e $\sup(D)$, pra $D \subset \mathbb{R}$ —
desta forma:

$$\begin{array}{rcl}
\overline{\mathbb{R}} & = & \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \\
C & = & \{\, (x, f(x)) \mid x \in B \,\} \\
D & = & \{\, f(x) \mid x \in B \,\} \\
E & = & \{\, y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in B.\ f(x) = y \,\} \\
U & = & \{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall d \in D.\ d \leq y \,\} \\
L & = & \{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall d \in D.\ y \leq d \,\} \\
(\alpha = \sup(D)) & = & \alpha \in U \land (\forall u \in U.\ \alpha \leq u) \\
(\beta = \inf(D)) & = & \beta \in L \land (\forall \ell \in L.\ \ell \leq \beta)
\end{array}$$

Agora uma função descontínua

Sejam $f(x) =$ 

e $B = [1,3]$.

Exercício
a) Represente graficamente estes conjuntos — as definições deles são as mesmas do slide anterior:

$$\begin{array}{rcl} C & = & \{\,(x, f(x)) \mid x \in B\,\} \\ D & = & \{\,f(x) \mid x \in B\,\} \\ E & = & \{\,y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in B.\ f(x) = y\,\} \\ U & = & \{\,y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall d \in D.\ d \leq y\,\} \\ L & = & \{\,y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall d \in D.\ y \leq d\,\} \end{array}$$

Dica pro L e pro U: desenhe o infinito perto, como na figura da próxima página.

Lembre que

$$\begin{array}{rcl} B & = & [1,3] \\ D & = & f(B) \end{array}$$

e que definimos o inf e o sup desta forma:

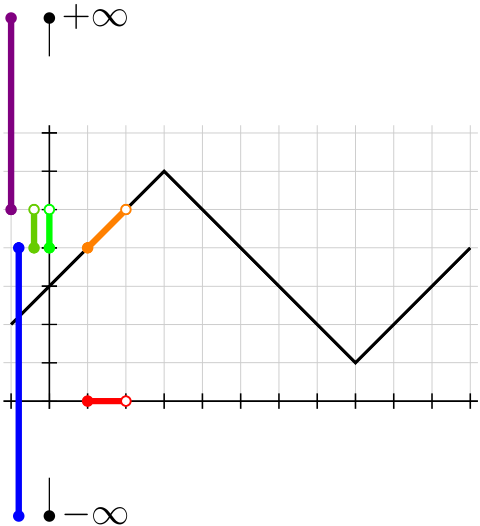
$$\begin{array}{rcl} (\alpha = \sup(D)) & = & \alpha \in U \land (\forall u \in U.\ \alpha \leq u) \\ (\beta = \inf(D)) & = & \beta \in L \land (\forall \ell \in L.\ \ell \leq \beta) \end{array}$$

Isso é uma definição estranha e indireta... pode ser que a gente calcule $(42 = \inf(D))$ e $(99 = \inf(D))$ por ela e os dois dêem verdadeiro – se isso acontecer então $\inf(D)$ não vai um número!!!

Exercício (cont.)

Calcule:

b) $(6 = \sup(D))$
c) $(5 = \sup(D))$
d) $(4 = \sup(D))$
e) $(2 = \sup(D))$
f) $(1 = \sup(D))$
g) $(0 = \sup(D))$



$+\infty$
$-\infty$

“Para todo” (∀) e “existe” (∃)

$$
\begin{array}{rcl}
(\forall a \in \{2,3,5\}.a^2 < 10) & = & (a^2 < 10)[a := 2] \land \\
 & & (a^2 < 10)[a := 3] \land \\
 & & (a^2 < 10)[a := 5] \\
 & = & (2^2 < 10) \land (3^2 < 10) \land (5^2 < 10) \\
 & = & (4 < 10) \land (9 < 10) \land (25 < 10) \\
 & = & \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \\
 & = & \mathbf{F}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
(\exists a \in \{2,3,5\}.a^2 < 10) & = & (a^2 < 10)[a := 2] \lor \\
 & & (a^2 < 10)[a := 3] \lor \\
 & & (a^2 < 10)[a := 5] \\
 & = & (2^2 < 10) \lor (3^2 < 10) \lor (5^2 < 10) \\
 & = & (4 < 10) \lor (9 < 10) \lor (25 < 10) \\
 & = & \mathbf{V} \lor \mathbf{V} \lor \mathbf{F} \\
 & = & \mathbf{V}
\end{array}
$$

Visualizando '∀'s e '∃'s

Dá pra *visualizar* o que a expressão

$$(\forall x \in \{1, \ldots, 7\}.\, 2 \le x < 4 \lor x = 6)$$

"quer dizer" visualizando os '**V**'s e '**F**'s de expressões mais simples, e combinando esses "mapas" de '**V**'s e '**F**'s. E digamos que:

$$\begin{array}{rcl} F(x) &=& (2 \le x), \\ G(x) &=& (x \le 4), \\ H(x) &=& (x = 6) \end{array}$$

Então temos:

$$\begin{array}{rl} & (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}.\, 2 \le x < 4 \lor x = 6) \\ = & (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}.\, (2 \le x \land x < 4) \lor x = 6) \\ = & (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}.\, (F(x) \land G(x)) \lor H(x)) \end{array}$$

Às vezes vamos ter que fazer figuras com muitos '**V**'s e '**F**'s, e vai ser mais fácil visualizar onde estão os '**V**'s e '**F**'s delas se usarmos sinais mais fáceis de distinguir...

Vou usar essa convenção aqui:
O **V** é uma bolinha preta, ou sólida: $\bullet$
O **F** é uma bolinha branca, ou oca: $\circ$

Compare:

$$\begin{array}{lcl} (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}.2 \le x) &=& \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \\ (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}. \qquad x < 4) &=& \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}.2 \le x < 4) &=& \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}. \qquad\qquad x = 6) &=& \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}.2 \le x < 4 \lor x = 6) &=& \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}.F(x)) &=& \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \\ (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}. \qquad G(x)) &=& \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}.F(x) \land G(x)) &=& \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}. \qquad\qquad H(x)) &=& \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}.F(x) \land G(x) \lor H(x)) &=& \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}.F(x)) &=& \circ \land \bullet \land \bullet \land \bullet \land \bullet \land \bullet \land \bullet \\ (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}. \qquad G(x)) &=& \bullet \land \bullet \land \bullet \land \circ \land \circ \land \circ \land \circ \\ (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}.F(x) \land G(x)) &=& \circ \land \bullet \land \bullet \land \circ \land \circ \land \circ \land \circ \\ (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}. \qquad\qquad H(x)) &=& \circ \land \circ \land \circ \land \circ \land \circ \land \bullet \land \circ \\ (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}.F(x) \land G(x) \lor H(x)) &=& \circ \land \bullet \land \bullet \land \circ \land \circ \land \bullet \land \circ \end{array}$$

É isso que a gente vai fazer pra analisar expressões como $(\forall x \in A.\underline{\qquad})$ e $(\exists x \in A.\underline{\qquad})$ e descobrir quais são verdadeiras e quais não — mesmo quando o conjunto A é um conjunto infinito, como $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ ou $[2, 10]$.

Você pode fazer as suas próprias definições — como o meu "$\bullet = \mathbf{V}$ e $\circ = \mathbf{F}$" — mas elas têm que ficar claras o suficiente... releia isto:

2gT4 "Releia a Dica 7"

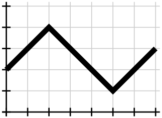
Retângulos acima e abaixo

Lembre que eu contei que em cursos tradicionais de Cálculo 2 – aqueles em que as pessoas passam centenas de horas fazendo contas à mão, e mais outras centenas de horas estudando por aqueles livros que fingem que certas coisas dificílimas são óbvias – as pessoas acabam aprendendo algumas coisas super úteis que não aparecem listadas explicitamente no programa do curso...

Uma dessas coisas é aprender a entender definições que *aparentemente* envolvem um número infinito de contas. Se a gente for como o Bob a gente consegue visualizar o que essas definições "querem dizer".

As definições formais de "retângulo acima (ou abaixo) da curva" e "melhor retângulo acima (ou abaixo) da curva" são assim – elas aparentemente precisam de infinitas contas.

Instruções de desenho (explícitas)

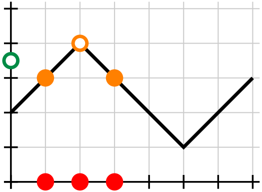
Sejam $f(x) =$  ,

e $P(y) \;=\; \underbrace{\forall x \in \{1,2,3\}.\, \underbrace{f(\underbrace{\;x\;}_{\text{em }(x,0)}) < y}_{\text{em }(x,f(x))}}_{\text{em }(0,y)}$.

As anotações sob as chaves são "instruções de desenho" que o Bob vai usar pra calcular cada $P(y)$ de cabeça, e pra visualizar o que $P(y)$ "quer dizer"...

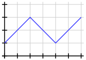
Na próxima página eu fiz as figuras pra $P(3.5)$.

$$
\begin{aligned}
P(3.5) &= \underbrace{\forall x \in \{1,2,3\}.\, \underbrace{f(\underbrace{\ x\ }_{\text{em }(x,0)}) < 3.5}_{\text{em }(x,f(x))}}_{\text{em }(0,3.5)} \\
&= \underbrace{\underbrace{(f(\underbrace{\ 1\ }_{\text{em }(1,0)}) < 3.5)}_{\text{em }(1,f(1))} \;\land\; \underbrace{(f(\underbrace{\ 2\ }_{\text{em }(2,0)}) < 3.5)}_{\text{em }(2,f(2))} \;\land\; \underbrace{(f(\underbrace{\ 3\ }_{\text{em }(3,0)}) < 3.5)}_{\text{em }(3,f(3))}}_{\text{em }(0,3.5)} \\
&= \underbrace{(\underbrace{3 < 3.5}_{\text{em }(1,3)}) \;\land\; (\underbrace{4 < 3.5}_{\text{em }(2,4)}) \;\land\; (\underbrace{3 < 3.5}_{\text{em }(3,3)})}_{\text{em }(0,3.5)} \\
&= \underbrace{(\underbrace{\ \bullet\ }_{\text{em }(1,3)}) \;\land\; (\underbrace{\ \circ\ }_{\text{em }(2,4)}) \;\land\; (\underbrace{\ \bullet\ }_{\text{em }(3,3)})}_{\text{em }(0,3.5)} \\
&= \underbrace{\ \circ\ }_{\text{em }(0,3.5)}
\end{aligned}
$$



Instruções de desenho: exercício

Sejam:

$f(x) =$  ,

$$\begin{aligned}
P(y) &= \forall x \in \{1,2,3\}.f(x) < y \ , \\
Q(y) &= \forall x \in \{1,2,3\}.f(x) \leq y \ , \\
R(y) &= \forall x \in \{1,2,3\}.f(x) \geq y \ , \\
S(y) &= \forall x \in \{1,2,3\}.f(x) > y \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P'(y) &= \forall x \in [3,5].f(x) < y \ , \\
Q'(y) &= \forall x \in [3,5].f(x) \leq y \ , \\
R'(y) &= \forall x \in [3,5].f(x) \geq y \ , \\
S'(y) &= \forall x \in [3,5].f(x) > y \ .
\end{aligned}$$

Para cada uma das expressões à direita visualize-a, represente-a graficamente numa das cópias do gráfico da $f(x)$ da próxima página, e dê o resultado dela.

Note que aqui eu não estou dando instruções de desenho *explícitas* – você vai ter que escolher como você vai fazer pra visualizar cada expressão.

a) $P(3.5), P(3.0), \ldots, P(0.5)$
b) $Q(3.5), Q(3.0), \ldots, Q(0.5)$
c) $R(3.5), R(3.0), \ldots, R(0.5)$
d) $S(3.5), S(3.0), \ldots, S(0.5)$

e) $P'(3.5), P'(3.0), \ldots, P'(0.5)$
f) $Q'(3.5), Q'(3.0), \ldots, Q'(0.5)$
g) $R'(3.5), R'(3.0), \ldots, R'(0.5)$
h) $S'(3.5), S'(3.0), \ldots, S'(0.5)$

Nos itens (e) até (f) os seus desenhos vão ter infinitas bolinhas... aliás, você vai ter que fazer desenhos que *finjam* que têm infinitas bolinhas, e nos quais o leitor consiga entender o que você quis representar... veja este slide antigo:

2dT142 “E pra conjuntos infinitos?”

Instruções de desenho: outro exercício

A seção "Mais sobre bolinhas" daqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2-4.pdf#page=29
tem dicas sobre como visualizar subconjuntos "definidos por proposições", como este aqui:

$$\{\, x \in A \mid P(a) \,\}$$

A gente primeiro marca cada ponto de A com uma bolinha ou preta ou branca, e depois a gente pega o conjunto das bolinhas pretas e interpreta ele como um outro conjunto – o resultado.

Use isto pra visualizar cada um dos conjuntos à direita e pra encontrar uma descrição mais simples para cada um deles. Geralmente essas "descrições mais simples" vão ser em notação de intervalos.

As funções $P, \ldots, S, P', \ldots, S'$ são as do exercício 8. O símbolo $\overline{\mathbb{R}}$ denota a "reta real estendida":

$$\begin{array}{rcl} \overline{\mathbb{R}} & = & \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \\ & = & (-\infty, +\infty) \cup \{-\infty, +\infty\} \\ & = & [-\infty, +\infty] \end{array}$$

Para mais detalhes, veja:
https://en.wikipedia.org/wiki/Extended_real_number_line

a) $\{\, y \in [0,3] \mid P(y) \,\}$
b) $\{\, y \in [0,3] \mid Q(y) \,\}$
c) $\{\, y \in [0,3] \mid R(y) \,\}$
d) $\{\, y \in [0,3] \mid S(y) \,\}$

a') $\{\, y \in [0,3] \mid P'(y) \,\}$
b') $\{\, y \in [0,3] \mid Q'(y) \,\}$
c') $\{\, y \in [0,3] \mid R'(y) \,\}$
d') $\{\, y \in [0,3] \mid S'(y) \,\}$

e) $\{\, y \in \mathbb{R} \mid P(y) \,\}$
f) $\{\, y \in \mathbb{R} \mid Q(y) \,\}$
g) $\{\, y \in \mathbb{R} \mid R(y) \,\}$
h) $\{\, y \in \mathbb{R} \mid S(y) \,\}$

i) $\{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid P(y) \,\}$
j) $\{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid Q(y) \,\}$
k) $\{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid R(y) \,\}$
l) $\{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid S(y) \,\}$

Algumas somas de Riemann

Vou definir:

$$\begin{array}{rcl}
[\mathrm{L}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{R}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(b_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{Trap}] & = & \sum_{i=1}^{N} \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i - a_i) \\
[\mathrm{M}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(\frac{a_i+b_i}{2})(b_i - a_i) \\
[\min] & = & \sum_{i=1}^{N} \min(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\max] & = & \sum_{i=1}^{N} \max(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\inf] & = & \sum_{i=1}^{N} \inf(f([a_i, b_i]))(b_i - a_i) \\
[\sup] & = & \sum_{i=1}^{N} \sup(f([a_i, b_i]))(b_i - a_i)
\end{array}$$

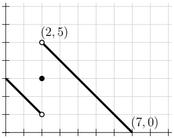
Compare com: os exercícios das montanhas,
as páginas 208–210 do Miranda (Miranda208), e:
`https://pt.wikipedia.org/wiki/Soma_de_Riemann`

Nas duas últimas linhas o $f([a_i, b_i])$ é a imagem de um intervalo. Temos:

$$\begin{array}{rcl}
f(A) & = & \{\, f(a) \mid a \in A \,\} \\
f(\{7,8,9\}) & = & \{\, f(a) \mid a \in \{7,8,9\} \,\} \\
 & = & \{f(7), f(8), f(9)\}
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
[a,b]_N &= \{\, a + k(\tfrac{b-a}{N}) \mid k \in \{0,\ldots,N\} \,\} \\
&= \{a + 0(\tfrac{b-a}{N}),\ a + 1(\tfrac{b-a}{N}),\ \ldots,\ a + N(\tfrac{b-a}{N})\} \\
&= \{a,\ a + \tfrac{b-a}{N},\ a + 2\tfrac{b-a}{N},\ a + 3\tfrac{b-a}{N},\ \ldots,\ b\} \\
\overline{\int}_P f(x)\,dx &= [\sup]_P \\
&= \sum_{i=1}^{N} \sup(f([a_i,b_i]))(b_i - a_i) \\
\underline{\int}_P f(x)\,dx &= [\inf]_P \\
&= \sum_{i=1}^{N} \inf(f([a_i,b_i]))(b_i - a_i) \\
\overline{\underline{\int}}_P f(x)\,dx &= \overline{\int}_P f(x)\,dx - \underline{\int}_P f(x)\,dx \\
\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= \lim_{k\to\infty} \overline{\int}_{[a,b]_{2^k}} f(x)\,dx \\
\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= \lim_{k\to\infty} \underline{\int}_{[a,b]_{2^k}} f(x)\,dx \\
\overline{\underline{\int}}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx - \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \\
\left(\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \ \text{ existe}\right) &= \left(\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx\right) \\
&= \left(\overline{\underline{\int}}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = 0\right) \\
\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \qquad \text{(se a integral existir)} \\
&= \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \qquad \text{(se a integral existir)}
\end{aligned}
$$

Aproximações por cima e por baixo

Sejam: $f(x) =$ 

,

$P = \{3, 4, 5\}$,
$Q = \{1, 3, 4, 5\}$,

e por enquanto considere que:

$$\begin{array}{rcl} \sup(f(B)) & = & \max_{x \in B} f(x) \quad \text{e} \\ \inf(f(B)) & = & \min_{x \in B} f(x). \end{array}$$

Exercício.
Represente graficamente:

a) $\overline{\int}_P f(x)\,dx$

b) $\underline{\int}_P f(x)\,dx$

c) $\overline{\underline{\int}}_P f(x)\,dx$

d) $\overline{\int}_Q f(x)\,dx$

e) $\underline{\int}_Q f(x)\,dx$

f) $\overline{\underline{\int}}_Q f(x)\,dx$

g) $\overline{\underline{\int}}_{[1,5]_2} f(x)\,dx$

h) $\overline{\underline{\int}}_{[1,5]_4} f(x)\,dx$

```
(%i1) a : 2;
(%o1)
```

$$2$$

```
(%i2) b : 4;
(%o2)
```

$$4$$

```
(%i3) b[i] := a + i*(b-a)/6;
(%o3)
```

$$b_i := a + \frac{i\,(b-a)}{6}$$

```
(%i4) a[i] := b[i-1];
(%o4)
```

$$a_i := b_{i-1}$$

```
(%i5) I[i] := [a[i], b[i]];
(%o5)
```

$$I_i := [a_i, b_i]$$

```
(%i6)
      [I[1], I[2], I[3], I[4], I[5], I[6]];
(%o6)
```

$$\left[\left[2, \frac{7}{3}\right], \left[\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right], \left[\frac{8}{3}, 3\right], \left[3, \frac{10}{3}\right], \left[\frac{10}{3}, \frac{11}{3}\right], \left[\frac{11}{3}, 4\right]\right]$$

```
(%i7) makelist(I[i], i, 1, 6);
(%o7)
```

$$\left[\left[2, \frac{7}{3}\right], \left[\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right], \left[\frac{8}{3}, 3\right], \left[3, \frac{10}{3}\right], \left[\frac{10}{3}, \frac{11}{3}\right], \left[\frac{11}{3}, 4\right]\right]$$

```
(%i8)
```

Cálculo 2 - 2024.2

Aulas 31 e 32: a função de Dirichlet

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

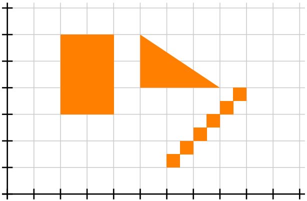
Links

Quadros:
2jQ69 2024.2
2iQ58 2024.1
2hQ44 2023.2
2gQ39 2023.1

2hT145 Meu material de 2023.2 sobre a definição da integral
2hT147 Meu material de 2023.2 sobre a função de Dirichlet
2hT152 "A função de Dirichlet (3)"

Áreas no olhômetro
A partir daqui eu vou supor que todo mundo sabe calcular determinadas áreas "no olho" — contando quadradinhos, fazendo "base · altura" (pra retângulos), ou fazendo "(base · altura)/2" (pra triângulos)...

Tente calcular a área da figura abaixo de cabeça.
Se você não conseguir peça ajuda URGENTE!!!



A função de Dirichlet

A *função de Dirichlet* é definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{quando } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{quando } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ela não tem um nome oficial, então
vamos chamá-la de 'f' nos próximos slides.

O gráfico dela alterna freneticamente entre $y = 0$ e $y = 1$.

Lembre que:
os números racionais são os cuja expansão decimal é "periódica", e os irracionais são os que não são assim; entre cada dois racionais diferentes há um irracional, e entre cada dois irracionais diferentes há um racional...

A função de Dirichlet (2)

Lembre que podemos obter um irracional entre, digamos, $a = \frac{10}{7} = 1.42857\underline{142857}$ e $b = \frac{1285715}{900000} = 1.428572\underline{2}$, modificando a expansão decimal de um dele e trocando-a pela expansão decimal de $\sqrt{2}$ a partir de um certo ponto... Por exemplo:

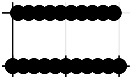
$$\begin{array}{rcl} \sqrt{2} & = & 1.41421356237... \\ b & = & 1.42857\underline{222222}... \\ c & = & 1.42857156237... \\ a & = & 1.42857\underline{142857}... \end{array}$$

Neste caso temos $a < c < b$, com $a, b \in \mathbb{Q}$ e $c \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Dá pra fazer algo parecido pra obter um racional entre dois irracionais.

A função de Dirichlet (3)

Dá pra desenhar o gráfico da função de Dirichlet assim:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{quando } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{quando } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases} \quad =$$



Repare que isso só funciona porque o desenho é claramente ambíguo... um leitor "normal" não consegue descobrir no olho quais são as coordenadas das bolinhas em $y = 1$ e em $y = 0$, então ele é obrigado a olhar pra definição formal da $f(x)$...

e aí quando ele entende a definição formal da $f(x)$ ele descobre que o desenho quer dizer "muitas bolinhas em $y = 1$, muito próximas umas das outras, e muitas bolinhas em $y = 0$ muito próximas das outras"...

...e ele entende que esse "muitas" quer dizer "infinitas".

Exercício 19.
A função de Dirichlet é um dos exemplos mais simples de uma função que não é integrável.

Sejam $f(x)$ a função de Dirichlet,
e $d_k = \overline{\underline{\int}}_{[0,1]_{2^k}} f(x)\,dx$.

a) Represente graficamente d_0, d_1, d_2, d_3.
b) Calcule no olhômetro o limite $\lim_{k\to\infty} d_k$.
(Dica: esse limite não dá zero...)

c) Represente graficamente $[\max]_{[0,1]_{2^2}}$ e $[\min]_{[0,1]_{2^2}}$.
(Dica: o método do máximo "não enxerga" os pontos com $y = 1$...)

Cálculo 2 - 2024.2

Aula 33: o TFC1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

Links

2hT27 (2023.2) Exercício 1: faça um gráfico da $G'(x)$
2hT32 (2023.2) Exercício 5: $G(x) = \int_{t=3}^{t=x} g(t)\,dt$

StewPtCap2p26 (p.97) O teorema do confronto
StewPtCap5p30 (p.351) TFC1
StewPtCap5p31 (p.352) TFC1, demonstração

Leit2p61 (p.114) 2.8 Teorema do confronto ou do sanduíche
Leit5p62 (p.345) 5.8.1 TFC1

MirandaP29 Teorema do confronto
MirandaP225 TFC1

RossP304 (p.291) Fundamental Theorem of Calculus

Introdução (2021.2)

Digamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função integrável.
Digamos que $c \in [a,b]$.
Digamos que a função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$F(t) \;\; = \int_{x=c}^{x=t} f(x)\,dx.$$

O TFC1 tem duas versões.
A versão mais simples diz o seguinte:
se a função f é contínua então para todo $t \in (a,b)$ vale:

$$F'(t) \;\; = f(t). \qquad\qquad (*)$$

A versão mais complicada do TFC1, que vamos ver depois, não supõe que a função f é contínua.

Nós vamos ver um argumento visual que mostra que a igualdade $(*)$ é verdade. Esse argumento visual é quase uma demonstração formal, num sentido que eu vou explicar depois.

Introdução (2)

Digamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.
Digamos que $c \in [a,b]$.
Digamos que a função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$F(t) \;=\; \int_{x=c}^{x=t} f(x)\,dx.$$

Então:

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(t+\varepsilon) - F(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\int_{x=c}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx - \int_{x=c}^{x=t} f(x)\,dx}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx \\
&\overset{???}{=} f(t)
\end{aligned}$$

Introdução (3)
Digamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.
Digamos que $c \in [a, b]$.
Digamos que a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$F(t) \;\; = \int_{x=c}^{x=t} f(x)\,dx.$$

O nosso argumento visual vai mostrar que:

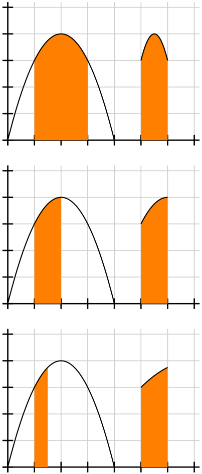
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx \;\; = \;\; f(t).$$

Primeiro exemplo:
$f(x)$ é a nossa parábola preferida, e $t = 1$.

Primeira figura: $\varepsilon = 2$.
Segunda figura: $\varepsilon = 1$.
Terceira figura: $\varepsilon = 1/2$.

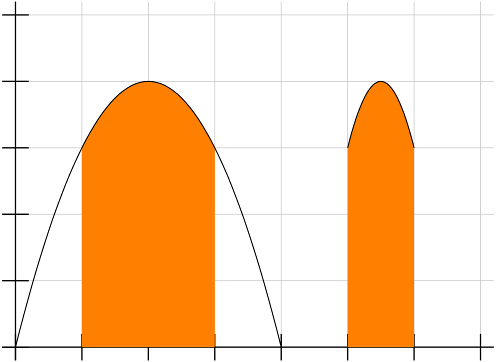
À esquerda: $\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$.
À direita: $\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$.

Repare que a área em laranja à esquerda sempre tem base ε e a área em laranja à direita sempre tem base $\varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1$.



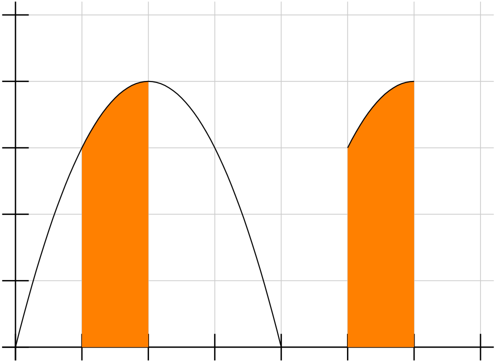
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 2\text{:}$$



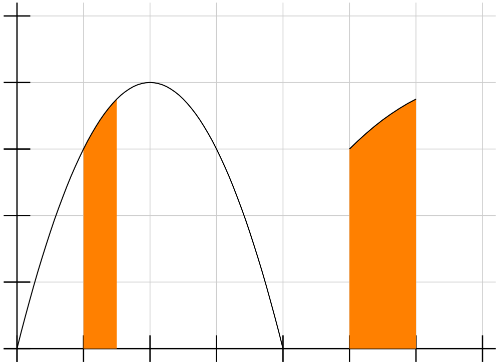
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1\text{:}$$



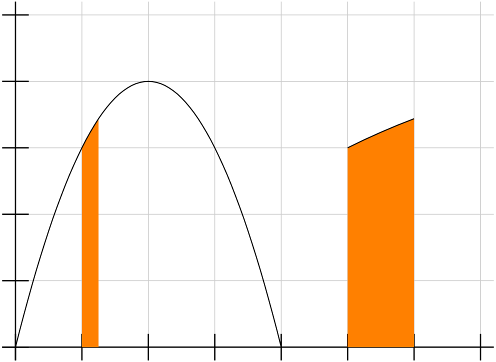
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/2\text{:}$$



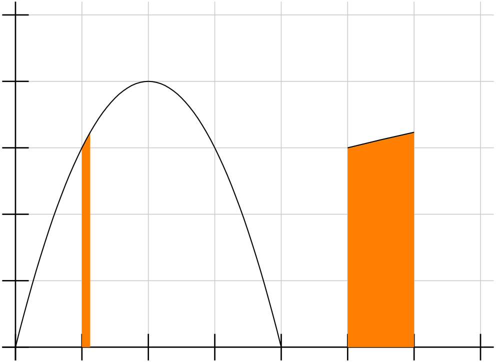
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/4\text{:}$$



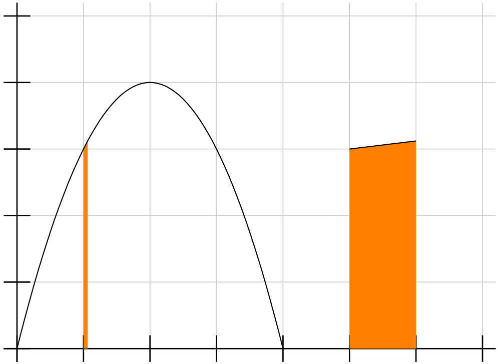
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/8\text{:}$$



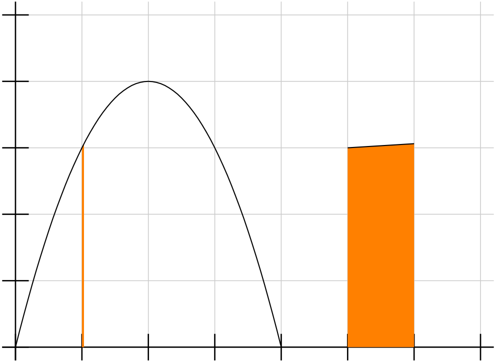
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/16\text{:}$$



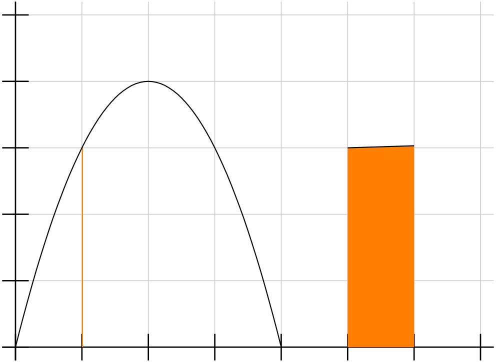
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/32\text{:}$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/64\text{:}$$

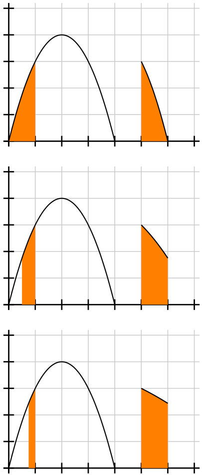


Agora com ε negativo!...

$f(x)$ é a nossa parábola preferida, e $t = 1$.

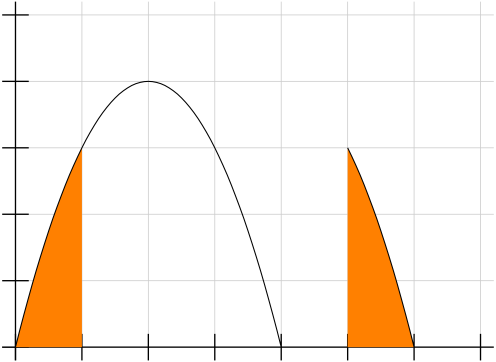
Primeira figura: $\varepsilon = -1$.
Segunda figura: $\varepsilon = -1/2$.
Terceira figura: $\varepsilon = -1/4$.

À esquerda: $\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$.
À direita: $\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$.



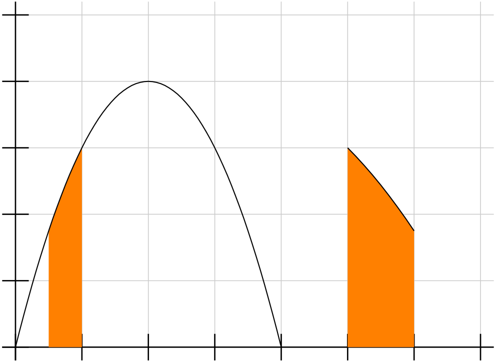
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1:$$



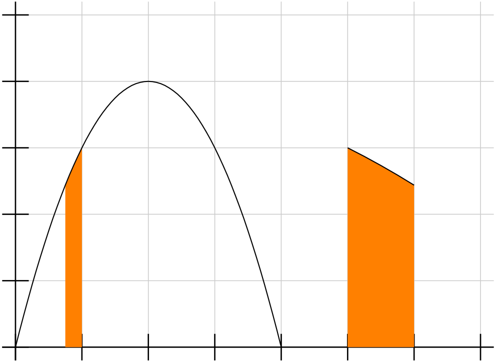
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/2\text{:}$$



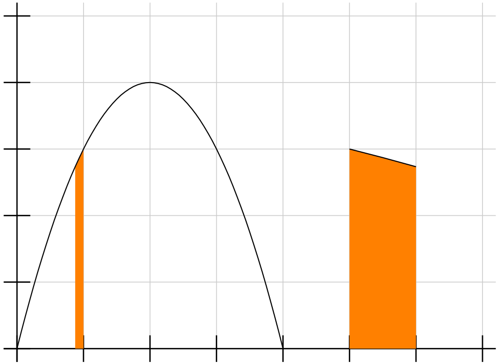
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/4\text{:}$$



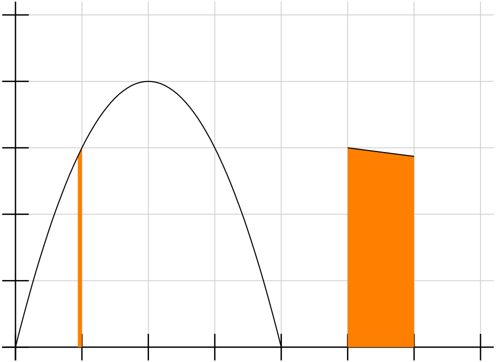
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/8:$$



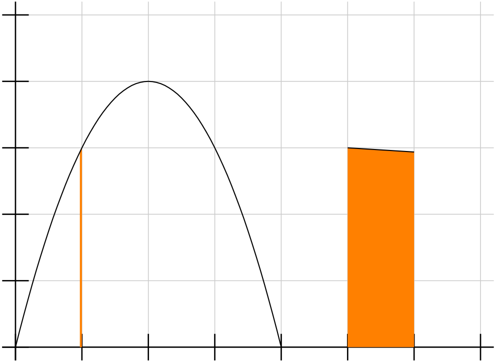
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/16:$$



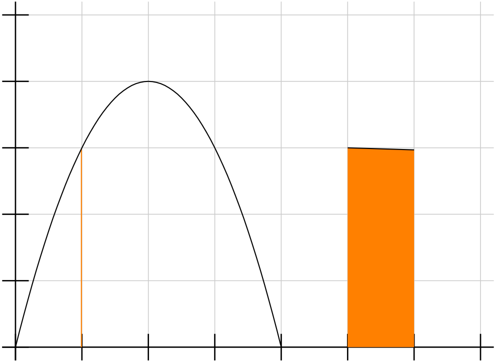
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/32\text{:}$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/64:$$



Exercício 5.
Seja $f(x)$ a função à direita.
Seja $t=2$.

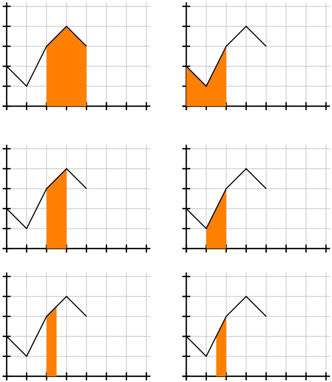
a) Desenhe $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$
para $\varepsilon=2$, $\varepsilon=1$, $\varepsilon=1/2$.

b) Desenhe $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$
para $\varepsilon=-2$, $\varepsilon=-1$, $\varepsilon=-1/2$.

Dica: comece entendendo as
áreas em laranja à direita!

c) Quanto você acha que dá
$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$?

d) Quanto você acha que dá
$\lim_{\varepsilon\to 0^-}\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$?



Exercício 6.
Seja $f(x)$ a função à direita.
Seja $t = 2$.

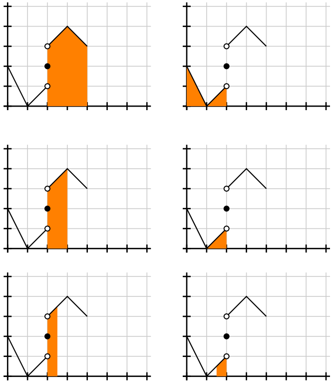
a) Desenhe $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$
para $\varepsilon = 2$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 1/2$.

b) Desenhe $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$
para $\varepsilon = -2$, $\varepsilon = -1$, $\varepsilon = -1/2$.

Dica: comece entendendo as áreas em laranja à direita!

c) Quanto você acha que dá
$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$?

d) Quanto você acha que dá
$\lim_{\varepsilon\to 0^-} \frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$?



Cálculo 2 - 2024.2

Aula 31: dicas pra P1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

Links

Frações parciais:
StewPtCap7p24 (p.439) ...no seguinte sistema de equações para A, B, C:
StewPtCap7p25 (p.440) Podemos usar um método alternativo
2hT90 PDFzinho de 2023.2 sobre frações parciais

Números complexos:
`http://anggtwu.net/LATEX/2024-2-C2-numeros-complexos.pdf`

Substituição trigonométrica:
2iT116 Simplificando raízes quadradas

Dicas sobre as questões

A prova vai ter uma questão de frações parciais. O Stewart ensina dois modos de fazer a decomposição em frações parciais, um que usa sistemas e um "método alternativo". *Se vocês usarem o método que usa sistemas vocês isso vai valer mais pontos* – porque se vocês treinarem sistemas isso vai ajudar vocês com EDOs depois, e o "método alternativo" do Stewart só serve pra frações parciais.

A prova vai ter uma questão que vocês só vão conseguir resolver se vocês usarem aquele truque com números complexos pra obter identidades trigonométricas.

E a prova vai ter uma questão de substituição trigonométrica dividida em vários itens. Alguns dos itens vão ser sobre transformar uma integral como $\int x^\alpha \sqrt{a^2 - b^2x^2}^\beta dx$ numa integral da forma $\int u^\alpha \sqrt{1 - u^2}^\beta du$.

Muito importante

Eu vou corrigir as questões das provas de vocês com os critérios que eu expliquei no PDFzinho de introdução ao curso!!! Link:
`http://anggtwu.net/LATEX/2024-2-C2-intro.pdf`
Ou seja, eu vou considerar que uma das coisas mais importantes do curso é vocês aprenderem a fazer contas fáceis de revisar, e se vocês errarem um número ou um sinal é porque vocês não fizeram contas que vocês conseguissem revisar rápido o suficiente. *Então a minha correção vai ser super rígida.*

Se vocês fizerem "requerimentos de revisão de prova" o departamento vai montar uma banca com três professores pra recorrigir as provas de vocês usando critérios diferentes dos meus – e geralmente mais benevolentes que os meus.

Cálculo 2 - 2024.2

P1 (Primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

Links

Dicas:

1) Nestas questões o que vai contar mais pontos é você organizar as contas de modo que cada passo seja fácil de entender, de verificar, e de justificar – "chegar no resultado certo" vai valer relativamente pouco.

2) Recomendo que vocês usem o método das "caixinhas de anotações" nas mudanças de variável... numa caixinha de anotações a primeira linha diz a relação entre a variável nova e a antiga, todas as outras linhas são consequências da primeira, e dentro da caixinha de anotações você pode usar as gambiarras com variáveis dependentes e diferenciais, como isto aqui: $dx = 42\,du$...

3) ...por exemplo:

$$\begin{bmatrix} s = \operatorname{sen}\theta \\ \sqrt{1-s^2} = \cos\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos\theta \\ ds = \cos\theta\, d\theta \\ \theta = \operatorname{arcsen} s \end{bmatrix}$$

4) Façam o requerimento de revisão de prova! Eu vou ser super rígido na correção mas a banca de revisão não costuma ser!

Anexo

Os *meus* critérios de correção vão ser os que estão no PDFzinho "Introdução ao curso":

http://anggtwu.net/LATEX/2024-2-C2-intro.pdf

A gente já discutiu eles em sala muitas vezes, e vocês já devem ter relido eles muitas vezes também. *Esse PDFzinho tem várias páginas sobre as bancas de revisão de provas e sobre porque em muitos casos eu vou recomendar que as pessoas façam requerimentos de revisão de provas pra que as provas delas sejam recorrigidas com outros critérios.*

Eu avisei no dia da prova que depois eu iria escrever bem mais coisas sobre como essas bancas de revisão têm funcionado. Esse material que eu só consegui organizar depois da prova está neste link:

http://anggtwu.net/2024-rev.html

Vou copiar as seções 3 e 5 dessa página pra cá.

3. Para alinhar...

No processo administrativo contra mim apareceram várias frases como:

- Para alinhar o trabalho dos professores...
- Reprove todo os alunos que não souberem o suficiente
- Com respeito às boas práticas de ensino...
- Com base na experiência que os professores desta banca têm com as disciplinas...
- O seu material não está dando o resultado que você acha que está
- Peça ajuda

...mas eu *continuo* sem saber praticamente nada...

- sobre como eles dão os cursos deles,
- sobre o que eles consideram "suficiente" em cada matéria,
- sobre o que eles consideram "boas práticas",
- sobre qual é "a experiência que os professores desta banca têm com as disciplinas",
- sobre o material que eles usam nos cursos deles,
- sobre o que eles consideram que é "pedir ajuda",
- e sobre o que eles consideram que é "ajudar"...

Anexo (cont.)

5. Isso me atrapalha?

Isso - das bancas de revisão usando critérios de correção que eu não consigo descobrir quais são - me atrapalha? Olha, *sim* - deixa eu explicar porquê.

Durante um certo tempo eu consegui convencer os meus alunos de que o meu curso de Cálculo 2 seria “muito presencial”: eu iria adaptar ele pro nível dos alunos, e os alunos que não sabiam o suficiente de Matemática do Ensino Médio iriam conseguir se virar bem - *se eles participassem das aulas, fizessem os exercícios, me mostrassem as dúvidas que eles estavam tendo, e treinassem um pouco em casa...* e os alunos que tentassem só aprender métodos de resolver integrais e EDOs em casa por vídeos que eles nunca me mostram quais são provavelmente iriam se dar mal nas provas, porque eles não iriam aprender as técnicas pra evitar erros que a gente iria aprender em sala, e além disso ia ser relativamente difícil colar nas provas...

Aí as bancas de revisão começaram a aprovar alunos que só mostravam que sabiam um pouquinho de como aplicar certos métodos, e resolveram não dar bola pros casos em que vários alunos cometiam exatamente o mesmo erro bobo exatamente no mesmo ponto das contas... e com isso a “moral da tropa” em sala caiu muito - antes muitos alunos faziam muitos exercícios em grupo na sala ”porque não tem outro jeito”, mas agora esse “porque não tem outro jeito” não é mais verdade... aí com isso vários alunos desistem de participar ativamente das aulas, e resolvem que vão só tentar descobrir os critérios de correção da banca de revisão - e vão tentar descobrir a) os vídeos certos pra assistir em casa, e b) jeitos que colar que a banca de revisão aceite.

Várias páginas da minha “Introdução ao curso de Cálculo 2” de 2024.2 são sobre isso. Dê uma olhada:

`http://anggtwu.net/LATEX/2024-2-C2-intro.pdf`

Questão 1
(Total: 4.0 pts)
Sejam $(*)$ e $(**)$ estas integrais:

$$\int x^3\sqrt{1-x^2}^3\,dx \qquad (*)$$

$$\int 4x^3\sqrt{25-x^2}^3\,dx \qquad (**)$$

a) **(2.0 pts)** Suponha que a gente sabe integrar $(*)$. Transforme a $(**)$ em algo que a gente sabe integrar.
b) **(1.0 pts)** Suponha que a gente não sabe integrar $(*)$. Resolva $(*)$ por subtituição trigonométrica.
c) **(1.0 pts)** Teste o resultado que você obteve no item (b).

Questão 2
(Total: 2.5 pts)
a) **(2.0 pts)** Transforme

$$\frac{x^3+6\,x^2-22\,x-55}{x^2+4\,x-21}$$

em algo fácil de integrar.
b) **(0.5 pts)** Integre:

$$\int \frac{x^3+6\,x^2-22\,x-55}{x^2+4\,x-21}\,dx$$

Questão 3
(Total: 2.5 pts)
a) **(2.0 pts)** Transforme

$$(\cos x)(\cos 5x)^2$$

em algo fácil de integrar usando o "método do E", que na terminologia do Maxima é o método do `exponentialize` e do `demoivre`. As dicas são essas aqui:

$$\begin{array}{llll}
c=\cos\theta & c^2+s^2=1 & \frac{ds}{d\theta}=c & E=c+is \\
s=\operatorname{sen}\theta & z^2=t^2+1 & \frac{dc}{d\theta}=-s & c=\frac{E+E^{-1}}{2} \\
t=\tan\theta & \sqrt{1-s^2}=c & \frac{dt}{d\theta}=z^2 & s=\frac{E-E^{-1}}{2i} \\
z=\sec\theta & \sqrt{t^2+1}=z & \frac{dz}{d\theta}=zt & e^{ik\theta}+e^{-ik\theta}=2\cos k\theta \\
E=e^{i\theta} & \sqrt{z^2-1}=t & & e^{ik\theta}-e^{-ik\theta}=2i\operatorname{sen} k\theta
\end{array}$$

b) **(0.5 pts)** Integre:

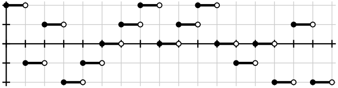
$$\int (\cos x)(\cos 5x)^2\,dx$$

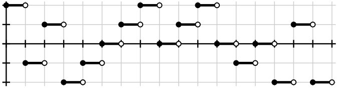
Questão 4
(Total: 1.0 pts)

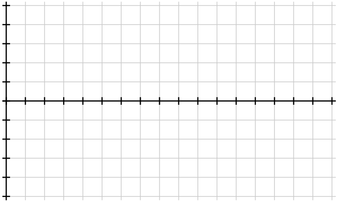
Seja $f(t)$ a função no topo da página seguinte.
Seja

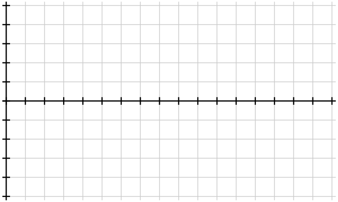
$$F(x) \;=\; \int_{t=3}^{t=x} f(t)\,dt.$$

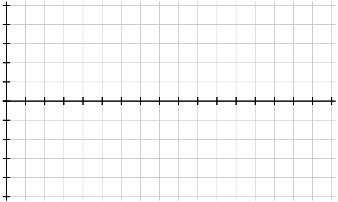
Desenhe o gráfico de $F(x)$ em algum dos grids vazios da próxima página. Indique claramente qual é a versão final e quais desenhos são rascunhos.

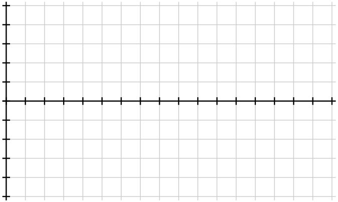












Questão 1: gabarito

1a) $\int 4x^3\sqrt{25-x^2}^3\,dx$

$$
\begin{aligned}
&= \int 4x^3\sqrt{5^2-x^2}^3\,dx \\
&= \int 4x^3\sqrt{5^2-(5^2)\tfrac{x^2}{5^2}}^3\,dx \\
&= \int 4x^3\sqrt{5^2(1-\tfrac{x^2}{5^2})}^3\,dx \\
&= \int 4x^3\left(\sqrt{5^2(1-\tfrac{x^2}{5^2})}\right)^3\,dx \\
&= \int 4x^3\left(\sqrt{5^2}\sqrt{(1-\tfrac{x^2}{5^2})}\right)^3\,dx \\
&= \int 4x^3\sqrt{5^2}^3\sqrt{1-\tfrac{x^2}{5^2}}^3\,dx \\
&= \int 4x^3\cdot 5^3\sqrt{1-\tfrac{x^2}{5^2}}^3\,dx \\
&= 4\cdot 5^3\int x^3\sqrt{1-\tfrac{x^2}{5^2}}^3\,dx \\
&= 4\cdot 5^3\int x^3\sqrt{1-(\tfrac{x}{5})^2}^3\,dx \\
&= 4\cdot 5^3\int (5u)^3\sqrt{1-u^2}^3\cdot 5\,du \\
&= 4\cdot 5^3\int 5^3u^3\cdot 5\sqrt{1-u^2}^3\,du \\
&= 4\cdot 5^3\int 5^4u^3\sqrt{1-u^2}^3\,du \\
&= 4\cdot 5^4\cdot 5^3\int u^3\sqrt{1-u^2}^3\,du
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} u = x/5 \\ x = 5u \\ dx = 5du \end{bmatrix}
$$

1b) $\int x^3\sqrt{1-x^2}^3\,dx$

$$
\begin{aligned}
&= \int s^3\sqrt{1-s^2}^3\,ds \\
&= \int (\operatorname{sen}\theta)^3(\cos\theta)^3\cos\theta\,d\theta \\
&= \int (\operatorname{sen}\theta)^3(\cos\theta)^4\,d\theta \\
&= \int (\cos\theta)^4(\operatorname{sen}\theta)^3\,d\theta \\
&= \int (\cos\theta)^4(\operatorname{sen}\theta)^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\
&= \int (\cos\theta)^4(1-(\cos\theta)^2)\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\
&= \int c^4(1-c^2)(-1)\,dc \\
&= \int c^4(c^2-1)\,dc \\
&= \int c^6-c^4\,dc \\
&= \tfrac{c^7}{7}-\tfrac{c^5}{5} \\
&= \tfrac{(\cos\theta)^7}{7}-\tfrac{(\cos\theta)^5}{5} \\
&= \tfrac{(\sqrt{1-s^2})^7}{7}-\tfrac{(\sqrt{1-s^2})^5}{5} \\
&= \tfrac{(\sqrt{1-x^2})^7}{7}-\tfrac{(\sqrt{1-x^2})^5}{5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} s = \operatorname{sen}\theta \\ \sqrt{1-s^2} = \cos\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos\theta \\ ds = \cos\theta\,d\theta \\ \theta = \operatorname{arcsen} s \end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix} c = \cos\theta \\ \frac{dc}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\,d\theta = (-1)dc \end{bmatrix}
$$

Questão 2: gabarito

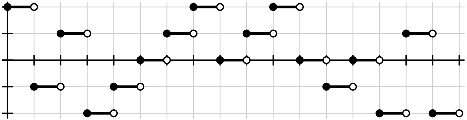
$$
\begin{aligned}
x^3+6x^2-22x-55 &= (x^2+4x-21)(x+2)-9x-13 \\
x^2+4x-21 &= (x-3)(x+7) \\
\frac{x^3+6x^2-22x-55}{x^2+4x-21} &= \frac{(x^2+4x-21)(x+2)-9x-13}{x^2+4x-21} \\
&= x+2+\frac{-9x-13}{x^2+4x-21} \\
&= x+2+\frac{-9x-13}{(x-3)(x+7)} \\
&= x+2+\frac{-4}{x-3}+\frac{-5}{x+7} \\
\int \frac{x^3+6x^2-22x-55}{x^2+4x-21}\,dx &= \int x+2+\frac{-4}{x-3}+\frac{-5}{x+7}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}+2x-4\log(x-3)-5\log(x+7)
\end{aligned}
$$

Questão 3: gabarito

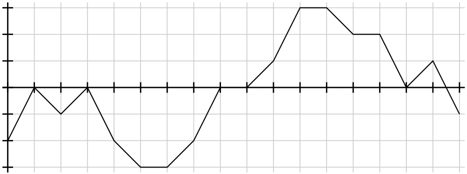
$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \tfrac{1}{2}(E + E^{-1}) \\
\cos 5\theta &= \tfrac{1}{2}(E^5 + E^{-5}) \\
(\cos 5\theta)^2 &= (\tfrac{1}{2}(E^5 + E^{-5}))^2 \\
&= \tfrac{1}{4}(E^{10} + 2 + E^{-10}) \\
(\cos\theta)(\cos 5\theta)^2 &= \tfrac{1}{2}(E + E^{-1}) \cdot \tfrac{1}{4}(E^{10} + 2 + E^{-10}) \\
&= \tfrac{1}{8}(E + E^{-1})(E^{10} + 2 + E^{-10}) \\
&= \tfrac{1}{8}\begin{pmatrix} E \quad (E^{10} + 2 + E^{-10}) \\ +E^{-1}(E^{10} + 2 + E^{-10}) \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{8}\begin{pmatrix} E^{11} + 2E + E^{-9} \\ +E^{9} + 2E^{-1} + E^{-11} \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{8}((E^{11} + E^{-11}) + (E^9 + E^{-9}) + 2(E + E^{-1})) \\
&= \tfrac{1}{8}(2\cos 11\theta + 2\cos 9\theta + 4\cos\theta) \\
&= \tfrac{1}{4}\cos 11\theta + \tfrac{1}{4}\cos 9\theta + \tfrac{1}{2}\cos\theta \\
\int (\cos\theta)(\cos 5\theta)^2\, d\theta &= \int \tfrac{1}{4}\cos 11\theta + \tfrac{1}{4}\cos 9\theta + \tfrac{1}{2}\cos\theta\, d\theta \\
&= \tfrac{1}{4\cdot 11}\operatorname{sen} 11\theta + \tfrac{1}{4\cdot 9}\operatorname{sen} 9\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta \\
\int (\cos x)(\cos 5x)^2\, dx &= \tfrac{1}{4\cdot 11}\operatorname{sen} 11x + \tfrac{1}{4\cdot 9}\operatorname{sen} 9x + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} x
\end{aligned}
$$

Questão 4: gabarito

$$f(x) \;=$$



$$F(x) \;=\; \int_{t=3}^{t=x} f(t)\,dt \;=$$



Cálculo 2 - 2024.2

Aulas 36 a 39: EDOs com variáveis separáveis

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

Links

2dT293 Material sobre EDOVSs de 2021.2
2dT306 Slides sobre inversas de 2021.2
2gT120 Slides sobre inversas de 2023.2
Leit7 Funções inversas, logarítmicas e exponenciais

StewPtCap9p11 (p.531) 9.2 Campos de Direções e Método de Euler
StewPtCap9p18 (p.538) 9.3 Equações Separáveis
StewPtCap14p10 (p.796) Curvas de nível

ZillCullenInicioP13 (p.6) Soluções implícitas e explícitas
ZillCullenInicioP16 (p.9) parâmetros, solução particular
ZillCullenInicioP51 (p.44) 2.2 Variáveis separáveis
ZillCullenInicioP57 (p.50) Exercícios

ZillCullenEngCap2p17 (p.44) 2.2 Separable Variables
ZillCullenEngCap2p23 (p.50) Exercises 2.2

BoyceDip2p13 (p.31) 2.2. Equações separáveis
BoyceDipEng2p13 (p.33) 2.2 Separable Differential Equations

DiffyQsP27 1.2 Slope fields
DiffyQsP33 1.3 Separable equations

Thomas11cap9 9.1 Slope Fields and Separable Differential Equations

2eT214 Algumas figuras de campos de direções

Provas:
2hT278 2023.2, P2
2gT134 2023.1, P2
2fT123 2022.2, P2
2fT130 2022.2, VR
2fT135 2022.2, VS

Quadros:
2jQ79 (2024.2)
2iQ69 (2024.1)
2hQ53 (2023.2)
2gQ41 (2023.1)
2fQ39 (2022.2)

EDOs por chutar-e-testar

Lembre que lá no início do curso eu mostrei – aqui: 2dT13 – que a gente podia resolver equações como esta

$$x + 2 = 5$$

por chutar-e-testar, e a gente podia escrever os chutes-e-testes usando o [:=]... cada "chute" virava uma substituição e cada "teste" virava verificar se o resultado da substituição era uma igualdade verdadeira. Por exemplo:

$$\begin{array}{rcll} (x+2=5)[x:=42] & = & (42+2=5) & =(\\ (x+2=5)[x:=3] & = & (3+2=5) & =) \end{array}$$

Eu costumo usar o '=)' pra indicar "deu certo / chegamos numa igualdade verdadeira" e o '=(' pra indicar "deu errado / chegamos numa igualdade falsa". *Os smileys '=)' e '=(' não tem cara de notações "sérias", e isso é de propósito: é pra lembrar vocês de procurarem nos livros como eles fazem isso – usando português e supondo que o leitor vai ser capaz de fazer muitas contas de cabeça.*

Uma outra notação pra isso – e que também não costuma ser usada em livros básicos, e que eu usei no gabarito da P1, – é esta aqui:

$$(x+2=5)[x:=42] \;=\; \underbrace{(\underbrace{42+2}_{44}=5)}_{\mathbf{F}}$$

Agora seja $(*)$ esta EDO ("equação diferencial ordinária"):

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \qquad (*)$$

Podemos verificar que $f(x) = x^4$ não é uma solução pra $(*)$, e que $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ é uma solução pra $(*)$, calculando os resultado das duas substituições abaixo e vendo que uma dá uma igualdade verdadeira e a outra dá uma igualdade falsa:

$$\begin{array}{lcl} \left(f'(x) = -\dfrac{x}{f(x)}\right)\begin{bmatrix} f(x) := x^4 \\ f'(x) := 4x^3 \end{bmatrix} & = & ? \\ \left(f'(x) = -\dfrac{x}{f(x)}\right)\begin{bmatrix} f(x) := \sqrt{1-x^2} \\ f'(x) := -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{bmatrix} & = & ? \end{array}$$

Campos de direções

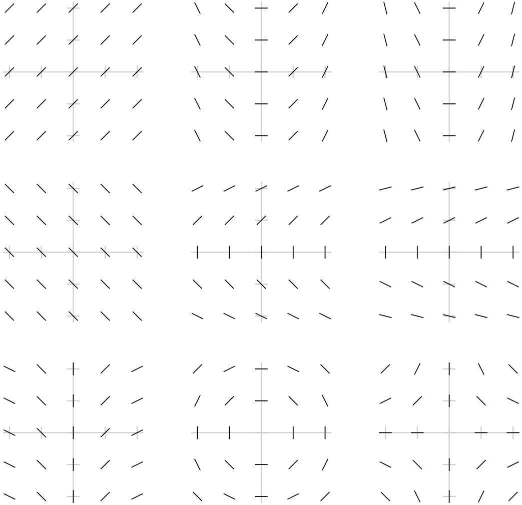
StewPtCap9p11 (p.531) 9.2 Campos de Direções e Método de Euler
Os gráficos que usam tracinhos em certos pontos pra indicar coeficientes angulares naqueles pontos são gráficos de *campos de direções*.

Exercício 1.
Represente graficamente os campos de direções abaixo desenhando tracinhos com os coeficientes angulares adequados nos pontos com $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; ou seja, em cada item você vai ter que desenhar 25 tracinhos. Quando $\frac{dy}{dx} = \infty$ desenhe o tracinho na vertical, e quando $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ desenhe só um pontinho ao invés de um tracinho.

a) $\frac{dy}{dx} = -1$
b) $\frac{dy}{dx} = x$
c) $\frac{dy}{dx} = 2x$
d) $\frac{dy}{dx} = -x/y$
e) $\frac{dy}{dx} = 1/y$
f) $\frac{dy}{dx} = 2/y$
g) $\frac{dy}{dx} = -y/x$

Exercício 2.
Tente imaginar o resto de cada um dos 7 campos de direções que você desenhou no exercício 1. Para cada um dos campos tente imaginar as curvas que você obteria se ligasse todos os tracinhos, e tente interpretar essas curvas como o conjunto de soluções da EDO que representamos graficamente como o campo de direções. Neste exercício você vai tentar encontrar soluções para EDOs no olhômetro a partir dos campos de direções delas.
Para cada uma das funções abaixo diga quais das 7 EDOs do exercício 1 podem ter aquela função como solução.

a) $y = x^2$
b) $y = \sqrt{x}$
c) $y = 1/x$
d) $y = \sqrt{1 - x^2}$



$$[\mathrm{M}] = \left(\begin{array}{rcl} \frac{dy}{dx} & = & \frac{g(x)}{h(y)} \\ h(y)\,dy & = & g(x)\,dx \\ \int h(y)\,dy & = & \int g(x)\,dx \\ \parallel & & \parallel \\ H(y)+C_1 & & G(x)+C_2 \\ H(y) & = & G(x)+C_2-C_1 \\ & = & G(x)+C_3 \\ H^{-1}(H(y)) & = & H^{-1}(G(x)+C_3) \\ \parallel & & \\ y & & \end{array} \right) \qquad [\mathrm{M}][\mathrm{S}_1] = \left(\begin{array}{rcl} \frac{dy}{dx} & = & \frac{-2x}{2y} \\ 2y\,dy & = & -2x\,dx \\ \int 2y\,dy & = & \int -2x\,dx \\ \parallel & & \parallel \\ y^2+C_1 & & -x^2+C_2 \\ y^2 & = & -x^2+C_2-C_1 \\ & = & -x^2+C_3 \\ \sqrt{y^2} & = & \sqrt{-x^2+C_3} \\ \parallel & & \\ y & & \end{array} \right)$$

$$[\mathrm{F}_3] = \left(\begin{array}{rcl} \frac{dy}{dx} & = & \frac{g(x)}{h(y)} \\ H^{-1}(H(y)) & = & H^{-1}(G(x)+C_3) \\ \parallel & & \\ y & & \end{array} \right) \qquad [\mathrm{F}_3][\mathrm{S}_1] = \left(\begin{array}{rcl} \frac{dy}{dx} & = & \frac{-2x}{2y} \\ \sqrt{y^2} & = & \sqrt{-x^2+C_3} \\ \parallel & & \\ y & & \end{array} \right)$$

$$[\mathrm{F}_2] = \left(\begin{array}{rcl} \frac{dy}{dx} & = & \frac{g(x)}{h(y)} \\ y & = & H^{-1}(G(x)+C_3) \end{array} \right) \qquad [\mathrm{F}_2][\mathrm{S}_1] = \left(\begin{array}{rcl} \frac{dy}{dx} & = & \frac{-2x}{2y} \\ y & = & \sqrt{-x^2+C_3} \end{array} \right)$$

$$[\mathrm{S}_1] = \left[\begin{array}{rcl} g(x) & := & -2x \\ h(y) & := & 2y \\ G(x) & := & -x^2 \\ H(y) & := & y^2 \\ H^{-1}(u) & := & \sqrt{u} \end{array} \right]$$

Funções inversas por chutar e testar

Digamos que

$$\begin{array}{rcl} y &=& 3+\sqrt{x+4}, \quad \text{isto é,} \\ f(x) &=& 3+\sqrt{x+4}, \end{array}$$

e sejam:

$$\begin{array}{rcl} g(y) &=& (y-3)^2+4, \\ h(y) &=& (y-4)^2+3. \end{array}$$

Eu acho difícil ver só fazendo contas de cabeça se $f^{-1}(y)=g(y)$ ou se $f^{-1}(y)=h(y)$... então é bom a gente saber testar se as inversas que a gente obteve de cabeça estão certas. O teste é:

$$\begin{array}{rcl} (f^{-1}(f(x))=x)\left[\begin{smallmatrix} f(x):=3+\sqrt{x+4} \\ f^{-1}(y):=(y-3)^2+4 \end{smallmatrix}\right] &=& \color{red}{?} \\ (f^{-1}(f(x))=x)\left[\begin{smallmatrix} f(x):=3+\sqrt{x+4} \\ f^{-1}(y):=(y-4)^2+3 \end{smallmatrix}\right] &=& \color{red}{?} \end{array}$$

Funções inversas por chutar e testar (2)
O modo tradicional de obter inversas é por uma série de passos, como:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 3+\sqrt{x+4} \\ y & = & 3+\sqrt{x+4} \\ y-3 & = & \sqrt{x+4} \\ (y-3)^2 & = & x+4 \\ (y-3)^2-4 & = & x \\ (y-3)^2-4 & = & f^{-1}(y) \end{array}$$

...mas é importante a gente saber testar se chegou na inversa certa.

Exercício 4.
Obtenha inversas para as seguintes funções:

$$\begin{array}{rcl}
f_1(x) & = & 2+3\sqrt{5x+6} \\
f_2(x) & = & 2+3\sqrt[4]{5x+6} \\
f_3(x) & = & 2+3(4x+5)^6 \\
f_4(x) & = & 2+3\ln(4x+5) \\
f_5(x) & = & 2+3e^{4x+5} \\
f_6(x) & = & \sqrt{2+3e^{4x+5}}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
f_7(x) & = & \ln x \\
f_8(x) & = & \ln -x \\
f_9(x) & = & |x| \\
f_{10}(x) & = & \ln |x|
\end{array}$$

Porque é que $f_9^{-1}(x)$ e $f_{10}^{-1}(x)$ não existem?

Inversas: introdução

Dê uma olhada nestes links:
ZillCullenInicioP13 (p.6) Soluções implícitas e explícitas
ZillCullenInicioP16 (p.9) parâmetros, solução particular
ZillCullenInicioP51 (p.44) 2.2: Variáveis separáveis

O método pra resolver EDOs com variáveis separáveis nos dá primeiro "soluções implícitas", como $x^2 + y^2 = C$ or $x^2 + y^2 = 42$, e aí depois disso a gente tem que transformar essas soluções implícitas em "soluções explícitas", em que y é uma função de x... por exemplo:

$$\begin{array}{rcl}
x = \sqrt{C - x^2} & \Rightarrow & f_1(x) = \sqrt{C - x^2} \\
x = -\sqrt{C - x^2} & \Rightarrow & f_2(x) = -\sqrt{C - x^2} \\
x = \sqrt{42 - x^2} & \Rightarrow & f_3(x) = \sqrt{42 - x^2} \\
x = -\sqrt{42 - x^2} & \Rightarrow & f_4(x) = -\sqrt{42 - x^2}
\end{array}$$

Praticamente todo mundo se enrola na hora de passar das "soluções implícitas" pras "soluções implícitas", principalmente nos casos em que a gente tem "várias inversas"...

Eu vou usar uma terminologia que é meio errada, e vou dizer que $g_1(y) = \sqrt{y}$ e $g_2(y) = -\sqrt{y}$ são duas inversas diferentes para $f(x) = x^2$. Um bom lugar pra aprender a terminologia correta – que precisa que a gente especifique os domínios! – é o capítulo 7 do Leithold: Leit7.

Inversas: um exemplo complicado

Digamos que queremos inverter esta função:

$$f(x) = (x+3)^4 + 5$$

O método é este aqui, mas repare que ele tem uma bifurcação...

$$\begin{array}{rcl} y &=& (x+3)^4+5 \\ y-5 &=& (x+3)^4 \\ \sqrt[4]{y-5} &=& \sqrt[4]{(x+3)^4} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \sqrt[4]{y-5} &=& x+3 \\ -3+\sqrt[4]{y-5} &=& x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \sqrt[4]{y-5} &=& -(x+3) \\ \sqrt[4]{y-5} &=& -x-3 \\ \sqrt[4]{y-5} &=& -x-3 \\ 3+\sqrt[4]{y-5} &=& -x \\ -(3+\sqrt[4]{y-5}) &=& x \end{array}$$

Se a gente segue o caminho da esquerda a gente obtém

$$f^{-1}(y) = -3 + \sqrt[4]{y-5},$$

e se a gente segue o caminho da direita a gente obtém

$$f^-1(y) = -(3 + \sqrt[4]{y-5}).$$

Sabemos que $\sqrt[4]{\alpha^4} = |\alpha|$, e portanto:

$$\begin{array}{rcl} \alpha \geq 0 &\Rightarrow& \sqrt[4]{\alpha^4} = \alpha \\ \alpha \leq 0 &\Rightarrow& \sqrt[4]{\alpha^4} = -\alpha \\ x+3 \geq 0 &\Rightarrow& \sqrt[4]{(x+3)^4} = x+3 \\ x+3 \leq 0 &\Rightarrow& \sqrt[4]{(x+3)^4} = -(x+3) \end{array}$$

Ou seja, nas contas à esquerda se $x+3 \geq 0$ nós temos que seguir o caminho da esquerda, e se $x+3 \leq 0$ nós temos que seguir o caminho da direita.

O melhor modo da gente entender essas duas inversas é esse aqui. Considere estes três conjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rcl} A_1 &=& \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x+3)^4+5\,\} \\ A_2 &=& \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x+3)^4+5,\ x+3 \geq 0\,\} \\ A_3 &=& \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x+3)^4+5,\ x+3 \leq 0\,\} \end{array}$$

Os conjuntos A_2 e A_3 são gráficos de funções inversíveis e A_1 é o gráfico de uma função não-inversível. Os domínios dessas funções são relativamente fáceis de calcular – eles são $\mathbb{R}$, $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x+3 \geq 0\,\}$ e $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x+3 \leq 0\,\}$ respectivamente – mas as imagens são um pouco mais complicadas...

...mas lembre que em C2 a gente costuma fazer as contas em duas etapas: na primeira etapa a gente finge que as hipóteses vão ser todas obedecidas e a gente nem escreve quais são essas hipóteses, e só na segunda etapa a gente escreve explicitamente quais são essas hipóteses e a gente vê se tudo realmente dá certo quando elas são obedecidas. *E neste curso a gente raramente vai ter tempo pra segunda etapa.*

Quatro inversas

```
(%i1) [xmin,ymin, xmax,ymax] : [-2,-2, 2,2]$
(%i2) colors :  [gray, blue, forest_green, orange, red, dark_violet]$
(%i3) f(x)   := (x^2-1)^2;
```
(%o3)
$$f(x) := (x^2-1)^2$$

```
(%i4) sols   :  solve(y=f(x), x);
```
(%o4)
$$\left[x=-\sqrt{\sqrt{y}+1}, x=\sqrt{\sqrt{y}+1}, x=-\sqrt{1-\sqrt{y}}, x=\sqrt{1-\sqrt{y}}\right]$$

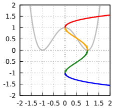
```
(%i5) define(g1(y), rhs(sols[1]));
```
(%o5)
$$\mathrm{g1}(y) := -\sqrt{\sqrt{y}+1}$$

```
(%i6) define(g2(y), rhs(sols[3]));
```
(%o6)
$$\mathrm{g2}(y) := -\sqrt{1-\sqrt{y}}$$

```
(%i7) define(g3(y), rhs(sols[4]));
```
(%o7)
$$\mathrm{g3}(y) := \sqrt{1-\sqrt{y}}$$

```
(%i8) define(g4(y), rhs(sols[2]));
```
(%o8)
$$\mathrm{g4}(y) := \sqrt{\sqrt{y}+1}$$

```
(%i9) myqdrawp(xyrange(),
            ex1(f(x), x, -4, 4, lc(colors[1])),
            ex1(g1(y), y, 0, 4, lc(colors[2])),
            ex1(g2(y), y, 0, 1, lc(colors[3])),
            ex1(g3(y), y, 0, 1, lc(colors[4])),
            ex1(g4(y), y, 0, 4, lc(colors[5])));
```
(%o9)



```
(%i10) f(g1(y));
```
(%o10)
$$y$$

```
(%i11) f(g2(y));
```
(%o11)
$$y$$

```
(%i12) f(g3(y));
```
(%o12)
$$y$$

```
(%i13) f(g4(y));
```
(%o13)
$$y$$

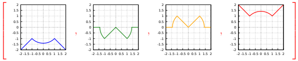
```
(%i14) g1(f(x));
```
(%o14)
$$-\sqrt{|x^2-1|+1}$$

```
(%i15) g2(f(x));
```
(%o15)
$$-\sqrt{1-|x^2-1|}$$

```
(%i16) g3(f(x));
```
(%o16)
$$\sqrt{1-|x^2-1|}$$

```
(%i17) g4(f(x));
```
(%o17)
$$\sqrt{|x^2-1|+1}$$

```
(%i18) [myqdrawp(xyrange(), myex1(g1(f(x)), lc(colors[2]))),
        myqdrawp(xyrange(), myex1(g2(f(x)), lc(colors[3]))),
        myqdrawp(xyrange(), myex1(g3(f(x)), lc(colors[4]))),
        myqdrawp(xyrange(), myex1(g4(f(x)), lc(colors[5])))];
```
(%o18)



```
(%i19)
```

assume

```
(%i1) f(x)  := (x^2-1)^2;
(%o1)
```
$$f(x) := \left(x^2-1\right)^2$$

```
(%i2) e1 : y = (x^2-1)^2;
(%o2)
```
$$y = \left(x^2-1\right)^2$$

```
(%i3) e2 : sqrt(e1);
(%o3)
```
$$\sqrt{y} = \left|x^2-1\right|$$

```
(%i4)     assume(x^2-1 >= 0);
(%o4)
```
$$[x^2 \geq 1]$$

```
(%i5) e2 : sqrt(e1);
(%o5)
```
$$\sqrt{y} = x^2-1$$

```
(%i6) e3 : e2 + 1;
(%o6)
```
$$\sqrt{y}+1 = x^2$$

```
(%i7) e4 : sqrt(e3);
(%o7)
```
$$\sqrt{\sqrt{y}+1} = |x|$$

```
(%i8)     assume(x <= 0);
(%o8)
```
$$[x \leq 0]$$

```
(%i9) e4 : sqrt(e3);
(%o9)
```
$$\sqrt{\sqrt{y}+1} = -x$$

```
(%i10) e5 : - e4;
(%o10)
```
$$-\sqrt{\sqrt{y}+1} = x$$

```
(%i11) e6 : rhs(e5) = lhs(e5);
(%o11)
```
$$x = -\sqrt{\sqrt{y}+1}$$

```
(%i12) define(g1(y), rhs(e6));
(%o12)
```
$$\mathrm{g1}(y) := -\sqrt{\sqrt{y}+1}$$

```
(%i13) g1(u);
(%o13)
```
$$-\sqrt{\sqrt{u}+1}$$

```
(%i14) simp : false;
(%o14)
```
false

```
(%i15) g1(f(x));
(%o15)
```
$$-1\left(1+\left(\left(x^2-1\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

```
(%i16) simp : true;
(%o16)
```
true

```
(%i17) g1(f(x));
(%o17)
```
$$x$$

```
(%i18)
```

Cálculo 2 - 2024.2

Aula 46: EDOs lineares

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

Links

StewPtCap9p37 (p.557) 9.5 Equações Lineares
StewPtCap9p41 (p.561) 9.5 Exercícios

BoyceDip2p5 (p.23) 2.1 Equações lineares; método dos fatores integrantes
BoyceDip2p11 (p.29) Problemas
BoyceDipEng2p4 (p.24) 2.1 Linear Differential Equations; Method of Integrating Factors
BoyceDipEng2p11 (p.31) Problems

ZillCullenCap2p33 (p.68) 2.5 Equações lineares
ZillCullenCap2p42 (p.77) 2.5 Exercícios
ZillCullenEngCap2p26 (p.53) 2.3 Linear equations
ZillCullenEngCap2p33 (p.60) Exercises 2.3

DiffyQsP40 1.4 Linear equations and the integrating factor
DiffyQsP43 1.4.1 Exercises

Quadros:
2jQ93 2024.2
2iQ86 2024.1
2hQ77 2023.2

O método

Aqui a gente tem a explicação do Stewart de como resolver EDOs lineares *com todas as partes em português deletadas*:

$$\begin{array}{rcll}
\frac{dy}{dx} + P(x)y &=& Q(x) & [1] \\
I(x)(y' + P(x)y) &=& (I(x)y)' & [3] \\
(I(x)y)' &=& I(x)Q(x) & \\
I(x)y &=& \int I(x)Q(x)\,dx + C & \\
y(x) &=& \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)Q(x)\,dx + C\right] & [4] \\
I(x)y' + I(x)P(x)y &=& (I(x)y)' \;=\; I'(x)y + I(x)y' & \\
I(x)P(x) &=& I'(x) & \\
\int \frac{1}{I}\,dI &=& \int P(x)\,dx & \\
I(x) &=& Ae^{\int P(x)\,dx} & \\
A &=& \pm e^C & \\
A &=& 1 & \\
I(x) &=& e^{\int P(x)\,dx} & [5]
\end{array}$$

Repare que sem as partes em português ela vira algo que só gênios conseguem decifrar – e um dos nossos objetivos neste curso é aprender a organizar as contas de modo que elas fiquem fáceis de entender, de justificar e de verificar.

Se a gente deixa só as linhas [1], [4] e [5] e põe elas nesta ordem,

$$\begin{array}{rcll}
\frac{dy}{dx} + P(x)y &=& Q(x) & [1] \\
I(x) &=& e^{\int P(x)\,dx} & [5] \\
y(x) &=& \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)Q(x)\,dx + C\right] & [4]
\end{array}$$

o *método* fica bem claro: pra resolver uma EDO da forma [1] a gente define um fator integrante $I(x)$ usando a definição da linha [5], e aí as nossas soluções vão ser as funções $y(x)$ da linha [4], onde C é uma constante qualquer.

Agora se a gente precisar *resolver* EDOs lineares basta aplicar um método que cabe em três linhas. Eu prefiro escrever ele usando outras letras,

$$\begin{array}{rcl}
y(x) &\Rightarrow& f(x) \\
P(x) &\Rightarrow& g(x) \\
\int P(x)\,dx &\Rightarrow& G(x) \\
Q(x) &\Rightarrow& h(x) \\
I(x) &\Rightarrow& m(x)
\end{array}$$

o omitindo os '(x)' na maioria dos lugares. A tradução é isto,

$$\begin{array}{rcl}
f' + gf &=& h \\
m &=& e^G \\
f &=& \frac{1}{m}(\int mh\,dx + C)
\end{array}$$

mas eu vou preferir escrever ela deste jeito:

$$[\mathrm{EL}_3] = \left(\begin{array}{rcl}
f' + fg &=& h \\
G' &=& g \\
f &=& e^{-G}(\int e^G h\,dx + C)
\end{array}\right)$$

Exercício 0

O Stewart começa por este exemplo, que ele chama de [2]:
StewPtCap9p37 (p.557) $y' + \frac{1}{x}y = 2$

Seja $[\mathrm{S}_1] = \left[\begin{smallmatrix} g:=1/x \\ h:=2 \\ G:=\ln x \end{smallmatrix}\right]$.

a) Use $[\mathrm{EL}_3][\mathrm{S}_1]$ pra obter a solução geral da EDO [2].
b) Chame esta solução geral de $f_1(x)$ – use um "seja"! – e teste-a.
c) Encontre a solução particular que passa pelo ponto $(2, 5)$.
d) Chame esta solução particular de $f_2(x)$ – use um "seja"! – e teste-a.

O que realmente importa

Exercício importantíssimo!!!
Entenda isto aqui e reescreva num formato BEM mais fácil de entender:

$$
\begin{array}{rcll}
\frac{dy}{dx} + P(x)y & = & Q(x) & [1] \\
I(x)(y' + P(x)y) & = & (I(x)y)' & [3] \\
(I(x)y)' & = & I(x)Q(x) & \\
I(x)y & = & \int I(x)Q(x)\,dx + C & \\
y(x) & = & \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)Q(x)\,dx + C\right] & [4] \\
I(x)y' + I(x)P(x)y & = & (I(x)y)' \;=\; I'(x)y + I(x)y' & \\
I(x)P(x) & = & I'(x) & \\
\int \frac{1}{I}\,dI & = & \int P(x)\,dx & \\
I(x) & = & Ae^{\int P(x)\,dx} & \\
A & = & \pm e^C & \\
A & = & 1 & \\
I(x) & = & e^{\int P(x)\,dx} & [5]
\end{array}
$$

```
(%i1) e1 : 'diff(y,x) + 1/x * y = 2;
(%o1)
```

$$\frac{d}{d\,x}\,y+\frac{y}{x}=2$$

```
(%i2) e2 : ode2(e1,y,x);
(%o2)
```

$$y=\frac{x^2+\%c}{x}$$

```
(%i3)       solve(e2, %c);
(%o3)
```

$$[\%c=x\,y-x^2]$$

```
(%i4) e3 : solve(e2, %c)[1];
(%o4)
```

$$\%c=x\,y-x^2$$

```
(%i5) e4 : subst([x=2,y=5], e2);
(%o5)
```

$$5=\frac{\%c+4}{2}$$

```
(%i6)       solve(e4, %c);
(%o6)
```

$$[\%c=6]$$

```
(%i7) e4 : solve(e4, %c)[1];
(%o7)
```

$$\%c=6$$

```
(%i8)                   subst(e4,e2);
(%o8)
```

$$y=\frac{x^2+6}{x}$$

```
(%i9) define(f2(x), rhs(subst(e4,e2)));
(%o9)
```

$$\mathrm{f2}\,(x):=\frac{x^2+6}{x}$$

```
(%i10) e5 : subst([y=f2(x)], e1);
(%o10)
```

$$\frac{d}{d\,x}\left(\frac{x^2+6}{x}\right)+\frac{x^2+6}{x^2}=2$$

```
(%i11) ev(e5, diff);
(%o11)
```

$$2=2$$

```
(%i12)
```

Cálculo 2 - 2024.2

Aulas 47 e 48: EDOs exatas

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

Links

StewPtCap14p25 (p.811) 14.3 Derivadas Parciais
StewPtCap14p45 (p.831) 14.5 A Regra da Cadeia
StewPtCap14p47 (p.833) A Regra da Cadeia (versão geral)

BoyceDip2p54 (p.72) 2.6 Equações Exatas e Fatores Integrantes
BoyceDip2p58 (p.76) Problemas
BoyceDipEng2p50 (p.70) 2.6 Exact Differential Equations and Integrating Factors
BoyceDipEng2p55 (p.75) Problems

ZillCullenCap2p25 (p.60) 2.4 Equações exatas
ZillCullenCap2p32 (p.67) Exercícios
ZillCullenEngCap2p35 (p.62) 2.4 Exact equations
ZillCullenEngCap2p41 (p.68) Exercises 2.4

DiffyQsP63 1.8 Exact Equations
DiffyQsP70 1.8.3 Exercises

2yT14 (2019.2) P2
`http://angg.twu.net/LATEX/2019-2-C2-P2.pdf`
2jQ97 (2024.2) Quadros das aulas sobre EDOs exatas
2iQ93 (2024.1) Quadros das aulas sobre EDOs exatas
2iQ93 (2024.1) Quadros das aulas sobre EDOs exatas
2hQ73 (2023.2) Quadros das aulas sobre EDOs exatas
2yQ106 (2019.2) Quadros das aulas sobre EDOs exatas

Método e exemplo

$$[E_5] = \begin{pmatrix} dz &=& z_x dx + z_y dy &=& 0 \\ \frac{d}{dx}z &=& z_x + z_y \frac{dy}{dx} &=& 0 \\ z &=& C \end{pmatrix} \qquad [E_5][S_1] = \begin{pmatrix} d(x^2y^3) &=& (2xy^3)dx + (3x^2y^2)dy &=& 0 \\ \frac{d}{dx}(x^2y^3) &=& (2xy^3) + (3x^2y^2)\frac{dy}{dx} &=& 0 \\ (x^2y^3) &=& C \end{pmatrix}$$

$$[E_3] = \begin{pmatrix} z_x dx + z_y dy &=& 0 \\ z_x + z_y \frac{dy}{dx} &=& 0 \\ z &=& C \end{pmatrix} \qquad [E_3][S_1] = \begin{pmatrix} (2xy^3)dx + (3x^2y^2)dy &=& 0 \\ (2xy^3) + (3x^2y^2)\frac{dy}{dx} &=& 0 \\ (x^2y^3) &=& C \end{pmatrix}$$

$$[E_2] = \begin{pmatrix} z_x + z_y \frac{dy}{dx} &=& 0 \\ z &=& C \end{pmatrix} \qquad [E_2][S_1] = \begin{pmatrix} (2xy^3) + (3x^2y^2)\frac{dy}{dx} &=& 0 \\ (x^2y^3) &=& C \end{pmatrix}$$

$$[S_1] = \begin{bmatrix} z &:=& (x^2y^3) \\ z_x &:=& (2xy^3) \\ z_y &:=& (3x^2y^2) \end{bmatrix}$$

Uma questão da P2 de 2019.2

4) Sejam $(***)$ e $(****)$ estas EDOs:

$$\begin{array}{rl} 2xy^3\,dx + 3x^2y^2\,dy = 0 & (***) \\ 2x^2y^3\,dx + 3x^3y^2\,dy = 0 & (****) \end{array}$$

a) **(0.5 pts)** Mostre que $(***)$ é exata.
b) **(0.5 pts)** Encontre a solução geral de $(***)$.
c) **(1.0 pts)** Teste a sua solução geral da $(***)$.
d) **(0.5 pts)** Mostre que a solução geral da EDO $(***)$ também é solução da $(****)$.
e) **(0.5 pts)** Mostre que $(****)$ não é exata.
f) **(0.5 pts)** Mostre que o fator integrante obtido por

$$\begin{array}{rcl} p(x) & = & (M_y - N_x)/N, \\ \mu(x) & = & e^{\int p(x)\,dx} \end{array}$$

transforma $(****)$ em $(***)$.

Versão original:
http://angg.twu.net/LATEX/2019-2-C2-P2.pdf

Cálculo 2 - 2024.2

Aulas 49 e 50: EDOLCCs

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

Links

StewPtCap17p6 (p.1020) Equações diferenciais de 2ª ordem
StewPtCap17p20 (p.1034) Caso 3: subamortecimento
StewPtApendiceHp5 (p.A51) Apêndice H: Números complexos

Leit3p22 (p.158) $D_x[c \cdot f(x)] = c \cdot D_x f(x)$
Leit3p22 (p.158) $D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$

BoyceDip3p5 (p.105) Capítulo 3: Equações lineares de 2ª ordem
BoyceDip3p11 (p.111) Seção 3.2: o operador diferencial L
BoyceDip3p13 (p.113) Teorema 3.2.2: o princípio da superposição
BoyceDip3p21 (p.121) 3.3. Raízes complexas da equação característica
BoyceDip3p23 (p.123) Figura 3.3.1

BoyceDipEng3p4 (p.103) Chapter 3: Second-order linear ODEs
BoyceDipEng3p11 (p.110) Section 3.2: the differential operator L
BoyceDipEng3p13 (p.112) Theorem 3.2.2: principle of superposition
BoyceDipEng3p21 (p.120) 3.3 Complex Roots of the Characteristic Equation
BoyceDipEng3p24 (p.123) Figure 3.3.1

ZillCullenCap4p33 (p.173) 4.3. Equações lineares homogêneas com coeficientes constantes
ZillCullenCap4p60 (p.196) Exemplo 1: ...pode ser fatorado... $(D + 3)(D + 2)$
ZillCullenCap4p61 (p.197) Exemplo 3
ZillCullenCap4p64 (p.200) Exercícios
ZillCullenEngCap4p40 (p.150) Factoring operators ... $(D + 3)(D + 2)$

Quadros:
2iQ74 2024.1
2hQ61 2023.2
2gQ46 2023.1
2gQ50 2023.1

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

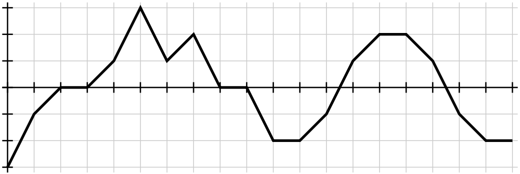
$$\begin{pmatrix}a&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac+bd\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac&bc\\ad&bd\end{pmatrix}$$

$$S=\begin{pmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&0&1&\\&&&0&1\\&&&&0\end{pmatrix}\quad 1=\begin{pmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&1&&\\&&&1&\\&&&&1\end{pmatrix}\quad S-1=\begin{pmatrix}-1&1&&&\\&-1&1&&\\&&-1&1&\\&&&-1&1\\&&&&-1\end{pmatrix}$$

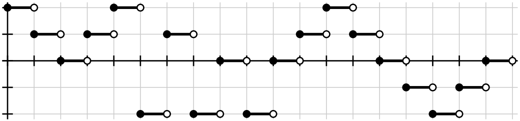
$$v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\end{pmatrix}\quad f=\begin{pmatrix}f(1)\\f(2)\\f(3)\\f(4)\\f(5)\end{pmatrix}\quad Sf=\begin{pmatrix}f(2)\\f(3)\\f(4)\\f(5)\\0\end{pmatrix}\quad (S-1)f=\begin{pmatrix}f(2)-f(1)\\f(3)-f(2)\\f(4)-f(3)\\f(5)-f(4)\\0-f(5)\end{pmatrix}$$

Obs: não usei isso aqui –
não deu tempo de LaTeXar tudo...

$g(x) \quad =$



$g'(x) \quad =$



```
(%i1) D (f) := diff(f,x);
(%o1)
```

$$D(f) := \mathrm{diff}(f, x)$$

```
(%i2) DD(f) := diff(f,x,2);
(%o2)
```

$$\mathrm{DD}(f) := \mathrm{diff}(f, x, 2)$$

```
(%i3) L (f) := D(D(f)) + D(f) - 6*f;
(%o3)
```

$$L(f) := D(D(f)) + D(f) + (-6)\ f$$

```
(%i1) f   : exp( 3*x);
(%o1)
```

$$e^{3x}$$

```
(%i2) f   : exp(-3*x);
(%o2)
```

$$e^{-3x}$$

```
(%i3) f   : exp( 2*x);
(%o3)
```

$$e^{2x}$$

```
(%i4) fp  : diff(f,x);
(%o4)
```

$$2\,e^{2x}$$

```
(%i5) fpp : diff(f,x,2);
(%o5)
```

$$4\,e^{2x}$$

```
(%i6) Lf  : fpp + fp - 6*f;
(%o6)
```

$$0$$

```
(%i7)
```

```
(%i4)   D(x^2);
(%o4)
```

$$2\,x$$

```
(%i5) D(D(x^2));
(%o5)
```

$$2$$

```
(%i6) L(x^2);
(%o6)
```

$$-\left(6\,x^2\right) + 2\,x + 2$$

```
(%i7) L(exp( 3*x));
(%o7)
```

$$6\,e^{3x}$$

```
(%i8) L(exp(-3*x));
(%o8)
```

$$0$$

```
(%i9) L(exp( 2*x));
(%o9)
```

$$0$$

```
(%i10)
```

Soluções não-básicas

$$
\begin{aligned}
M(\alpha v + \beta w) &= M(\alpha v) + M(\beta w) \\
&= \alpha(Mv) + \beta(Mw)
\end{aligned}
$$

$$
\underbrace{(D-2)(D+3)}_{M}(\underbrace{42}_{\alpha}\,\underbrace{e^{2x}}_{v} + \underbrace{99}_{\beta}\,\underbrace{e^{-3x}}_{w})
$$

$$
\begin{aligned}
&(D-2)(D+3)(42e^{2x} + 99e^{-3x}) \\
&= 42(D-2)(D+3)e^{2x} + 99(D-2)(D+3)e^{-3x} \\
&= \underbrace{42\,\underbrace{(D+3)\,\underbrace{\underbrace{\underbrace{(D-2)e^{2x}}_{De^{2x}-2e^{2x}}}_{2e^{2x}-2e^{2x}}}_{0}}_{0}}_{0} + \underbrace{99\,\underbrace{(D-2)\,\underbrace{\underbrace{\underbrace{(D+3)e^{-3x}}_{De^{-3x}+3e^{-3x}}}_{-3e^{-3x}+3e^{-3x}}}_{0}}_{0}}_{0}
\end{aligned}
$$

Raízes por chutar-e-testar

```
(%i1) poly0 : (x-2)*(x+5);
(%o1)
```
$$(x-2)\,(x+5)$$

```
(%i2) poly1 : expand(poly0);
(%o2)
```
$$x^2+3\,x-10$$

```
(%i3) b : ratcoef(poly1, x, 1);    /* coeficiente do x^1 */
(%o3)
```
$$3$$

```
(%i4) c : ratcoef(poly1, x, 0);    /* coeficiente do x^0 */
(%o4)
```
$$-10$$

```
(%i5)                 divisors(c);
(%o5)
```
$$\{1,2,5,10\}$$

```
(%i6) divs0 : listify(divisors(c));
(%o6)
```
$$[1,2,5,10]$$

```
(%i7)                 reverse(divs0);
(%o7)
```
$$[10,5,2,1]$$

```
(%i8)                -reverse(divs0);
(%o8)
```
$$[-10,-5,-2,-1]$$

```
(%i9) divs1 : append(-reverse(divs0), divs0);
(%o9)
```
$$[-10,-5,-2,-1,1,2,5,10]$$

```
(%i10) line(d1) := block([d2:c/d1], [d1,d2,d1*d2,d1+d2])$
(%i11) line(2);
(%o11)
```
$$[2,-5,-10,-3]$$

```
(%i12) lines0 : makelist(line(d1), d1, divs1)$
(%i13) lines1 : append([["d1", "d2", "d1*d2", "d1+d2"]], lines0)$
(%i14) apply('matrix, lines1);
(%o14)
```
$$\begin{pmatrix} \mathrm{d1} & \mathrm{d2} & \mathrm{d1{*}d2} & \mathrm{d1{+}d2} \\ -10 & 1 & -10 & -9 \\ -5 & 2 & -10 & -3 \\ -2 & 5 & -10 & 3 \\ -1 & 10 & -10 & 9 \\ 1 & -10 & -10 & -9 \\ 2 & -5 & -10 & -3 \\ 5 & -2 & -10 & 3 \\ 10 & -1 & -10 & 9 \end{pmatrix}$$

```
(%i15)
```

Cálculo 2 - 2024.2

Aulas 52 e 53: sequências e séries

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

Links

Cálculo 2 - 2024.2

Aula 54: volumes

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

Links

StewPtCap6p12 (p.389) 6.2 Volumes
StewPtCap6p13 (p.390) volume da esfera
StewPtCap6p18 (p.395) pirâmide de base quadrada
StewPtCap6p19 (p.396) Figura 15
StewPtCap6p20 (p.397) Exercícios: façam do 1 ao 5!
StewPtCap8p17 (p.500) trombeta de Gabriel
StewPtCap13p18 (p.768) 13.3 Comprimento de Arco e Curvatura
StewPtCap15p6 (p.874) 15.1 Integrais múltiplas sobre retângulos
StewPtCap15p9 (p.877) aproximações do volume

Miranda285 9.3 Volume
Miranda288 O volume da esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$
Miranda285 9.3.1 Secções transversais
Miranda289 9.3.2 Sólidos de revolução
Miranda292 Façam os exercícios 2, 3, 4 e 5!

Leit6p3 (p.374) 6.1 Volumes de sólidos por cortes
Leit6p17 (p.388) 6.3 Comprimento de arco

3cT75 Pirâmide (3D)
2gT105 Um jogo colaborativo
2gT137 P2 de 2023.1, questão sobre volumes
Quadros:
2iQ62 2024.1
2hQ47 2023.2
2gQ59 2023.1

MpgP8 Set comprehensions

Exercício 1

Sejam:

$$\begin{array}{rcl}
A &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\,\}\\
B &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le x\,\}\\
C &=& \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1\,\}\\
D &=& \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le x\,\}\\
E &=& \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le x, 0\le z\le x\,\}\\
[x=\alpha] &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=\alpha\,\}\\
[y=\beta] &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=\beta\,\}\\
[[x=\alpha]] &=& \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=\alpha\,\}\\
[[y=\beta]] &=& \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=\beta\,\}\\
[[z=\gamma]] &=& \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=\gamma\,\}
\end{array}$$

Lembre das técnicas do “jogo colaborativo”, e:
a) Represente graficamente A.
b) Represente graficamente B.
c) Represente graficamente C.
d) Represente graficamente D.
e) Represente graficamente E.
f) Represente num gráfico só A e $A\cap[x=0.5]$. Qual é o comprimento de $A\cap[x=0.5]$?
g) Represente num gráfico só B e $B\cap[x=0.5]$. Qual é o comprimento de $B\cap[x=0.5]$?
h) Represente num gráfico só D e $D\cap[[x=0.5]]$. Qual é a área de $D\cap[[x=0.5]]$?
i) Represente num gráfico só D e $D\cap[[y=0.5]]$. Qual é a área de $D\cap[[y=0.5]]$?
j) Represente num gráfico só D e $D\cap[[z=0.5]]$. Qual é a área de $D\cap[[z=0.5]]$?
k) Represente num gráfico só E e $E\cap[[x=0.5]]$. Qual é a área de $E\cap[[x=0.5]]$?
l) Represente num gráfico só E e $E\cap[[y=0.5]]$. Qual é a área de $E\cap[[y=0.5]]$?
m) Represente num gráfico só E e $E\cap[[z=0.5]]$. Qual é a área de $E\cap[[z=0.5]]$?

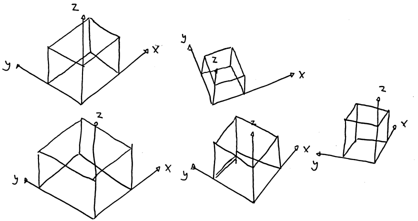
Calcule:
n) $\text{área}(E\cap[[x=0.2]])$
o) $\text{área}(E\cap[[x=0.8]])$
p) $\displaystyle\int_{t=0}^{t=1}\text{área}(E\cap[[x=t]])\,dt$

Dicas pro exercício 1

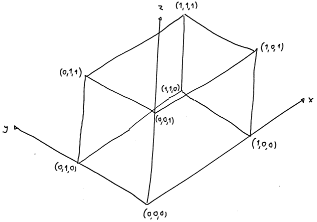
O conjunto C é um cubo e os conjuntos D e E vão ser pedaços do cubo C.

Existem 8 pontos de $\mathbb{R}^3$ que obedecem isto aqui: $x, y, z \in \{0, 1\}$. Vou inventar um nome pra eles: eles vão ser os pontos "simples". O conjunto C contém todos os pontos simples mas os conjuntos D e E só contém alguns pontos simples cada um... quais?

Pra fazer os itens que envolvem os conjuntos D e E comece fazendo um MONTE de desenhos de cubos à mão, SEM USAR RÉGUA – como eu fiz na figura de cima à direita. Se você não usar régua o seu ganho de velocidade vai ser tão grande que você não vai se incomodar muito pra descartar os desenhos que ficarem tortos demais, e você vai poder escolher quais são os desenhos nos quais os eixos estão numa posição melhor pra desenhar o conjunto E, que é meio complicado.



Quando você encontrar uma posição pros eixos que você ache que está boa faça uma versão ampliada do seu cubo naquela posição ocupando uma folha inteira, e depois escreva do lado de cada um dos pontos "simples" as coordenadas dele – como eu fiz na figura de baixo à direita. Use essa figura pra tentar entender os conjuntos D e E.



A melhor posição pra desenhar o conjunto E não é a da figura de baixo à direita.

Exercício 2

StewPtCap6p19 (p.396) Figura 15

Cálculo 2 - 2024.2

Dicas pra P2

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

Links

Quadros
2jQ92 C2 como filtro, nomear
2jQ110 C2 como filtro, nomear

Mangas

Dê uma olhada na no PDFzinho de introdução ao curso de C2 – a página 4 dele é sobre "mangas" e a página 38 termina com esse parágrafo aqui:

> ...ah, e na parte final do curso, que é sobre equações diferenciais, você vai (ter que) aprender a usar corretamente um monte de "partículas", como "seja", "então", "temos", "isto é", "queremos", "sabemos que", "lembre que", "digamos que" e "vamos testar se".

E na aula de 15/jan/2025 (2jQ110) eu pus este aviso no quadro:

> Provavelmente a prova vai ter um aviso bem grande sobre o MEU critério de correção, no qual eu vou cobrar que vocês saibam fazer definições e usar o "sejam", o "então", etc, corretamente... *quem não souber usar isso vai tirar 0 no meu critério de correção e 10 no critério da banca de revisão.*

O sinal de '=' é uma espécie de manga, e eu pedi pras pessoas aprenderem Maxima porque eu achei que isso seria o jeito mais rápido das pessoas entenderem as diferenças entre os vários significados do '='.

Dê uma olhada na figura à direita – ela tem 6 subfiguras, numeradas de (1) a (6).

A (1) tem um exemplo de como a gente pode usar as partículas "digamos que" e "então" pra distinguir um '=' que é uma definição dos '='s que são consequências dessa definição.

A (2) mostra que em Maxima o '=' que é uma definição vira um ':=', e os outros dois '='s viram algo como "o resultado de [blá] é [blá]".

A (3) mostra um modo de reorganizar as informação da (1) numa tabela. *Em C2 a gente não viu direito como interpretar e como fazer tabelas – a gente vai ver isso em C3.*

A (4) é uma versão da (1) sem as partículas em português. *Em várias das questões da P2 eu vou considerar a falta das partículas em português como erro grave* – veja este slide: 2iT28 ("Contexto").

A (5) é um erro GRAVÍSSIMO – eu vou interpretar ela como a afirmação de que $10 = a_2 = 20$ é verdade, e portanto $10 = 20$ é verdade.

A (6) é outro erro gravíssimo. Se alguém escrever algo como ela eu vou considerar que a pessoa está me dizendo algo como "sabemos que $1 = 10$"... eu não vou nem ler o resto da questão da pessoa, e vou escrever na prova dela "Faça um requerimento de revisão de prova!" – porque eu acho que a banca considera isso um erro bem pequeno e super perdoável.

(1) $$\begin{array}{rrcl} \text{Digamos que} & a_n & = & 10n. \\ \text{Então} & a_1 & = & 10 \\ \text{e} & a_2 & = & 20. \end{array}$$

(2)

```
(%i1) a[n] := 10*n;
(%o1)
        a_n := 10 n
(%i2) a[1];
(%o2)
        10
(%i3) a[2];
(%o3)
        20
```

(3)

n	$a_n = 10_n$
1	10
2	20

(4) $$\begin{array}{rcl} a_n & = & 10n \\ a_1 & = & 10 \\ a_2 & = & 20 \end{array}$$

(5) $$\begin{array}{rrcl} & a_n & = & 10n \\ = & a_1 & = & 10 \\ = & a_2 & = & 20 \end{array}$$

(6) $$\begin{array}{rcl} a_n & = & 10n \\ 1 & = & 10 \\ 2 & = & 20 \end{array}$$

Gabaritos

Nos últimos semestres os gabaritos das minhas provas de C2 foram quase sempre ou "mini-gabaritos" ou "gabaritos em Maxima", então não dá pra estudar por eles pra aprender como usar as partículas em português...

Os melhores lugares pra aprender a usar as partículas direito são 1) as fotos dos quadros e 2) os livros.

(Mais em breve!)

As questões da prova

A P2 vai ter questões sobre os quatro tipos de EDOs que nós vimos no curso – EDOVSs, EDOs lineares, EDOs exatas, e EDOLCCs – e uma questão sobre encontrar o termo geral de uma sequência por chutar e testar.

A P2 não vai ter uma questão sobre volumes, mas a VR e a VS provavelmente vão ter.

Mais detalhes em breve!

Cálculo 2 - 2024.2

P2 (segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

Links

Gabarito em Maxima:
http://anggtwu.net/e/maxima.e.html#2024-2-C2-P2
`(find-es "maxima" "2024-2-C2-P2")`

Questão 1

(Total: 3.0 pts)
Lembre que no curso eu mostrei que o meu modo preferido de escrever o "método" para resolver EDOs com variáveis separáveis — "EDOVSs" — é o "método" [M] abaixo... eu pus o termo "método" entre aspas porque alguns dos passos da [M] são gambiarras nas quais a gente não pode confiar totalmente, e aí a gente precisa sempre testar as nossas soluções. O abaixo — a "fórmula" — é uma versão resumida do [M].

$$[\mathrm{M}] = \left(\begin{array}{rcl} \frac{dy}{dx} &=& \frac{g(x)}{h(y)} \\ h(y)\,dy &=& g(x)\,dx \\ \int h(y)\,dy &=& \int g(x)\,dx \\ \| && \| \\ H(y)+C_1 && G(x)+C_2 \\ H(y) &=& G(x)+C_2-C_1 \\ &=& G(x)+C_3 \\ H^{-1}(H(y)) &=& H^{-1}(G(x)+C_3) \\ \| && \\ y && \end{array} \right)$$

$$[\mathrm{F}_3] = \left(\begin{array}{rcl} \frac{dy}{dx} &=& \frac{g(x)}{h(y)} \\ H^{-1}(H(y)) &=& H^{-1}(G(x)+C_3) \\ \| && \\ y && \end{array} \right)$$

Seja $(*_1)$ esta EDOVSs:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8x}{2y} \qquad (*_1)$$

a) **(1.0 pts)** Desenhe os tracinhos do campo de direções da EDO (*) nos pontos com $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Aqui você vai ter que desenhar 25 tracinhos e vai ter que caprichar – um tracinho com coeficiente angular $\frac{1}{2}$ tem que ser visualmente bem diferente de um com coeficiente angular 1 e de um com coeficiente angular 2.

b) **(0.5 pts)** Encontre as duas soluções gerais da EDO $(*)$ – a solução "positiva" e a "negativa" – e dê nomes para elas.

c) **(0.5 pts)** Teste a sua solução "negativa".

d) **(0.5 pts)** Encontre a solução particular que passa pelo ponto $(-2, 3)$.

e) **(0.5 pts)** Encontre a solução particular que passa pelo ponto $(2, -3)$.

Muito importante: em todas as questões desta prova eu vou corrigir as respostas de vocês como se eu fosse o "colega menos seu amigo e sem paciência pra adivinhar nada" da Dica 7 e do slide sobre contextos... por exemplo, se você escrever só "$a = 42$" eu vou interpretar isso como "aqui essa pessoa tá dizendo que é óbvio que '$a = 42$' é sempre verdade – e isso é falso!!!", e aí babau. Ou seja, a parte em português das questões de vocês vai ser MUUUUITO importante!

Questão 2
(Total: 3.0 pts)

Sejam $(*_2)$ e $(*_3)$ as EDOs abaixo:

$$\begin{array}{rcll} y'' - 3y' - 28y & = & 0 & \quad (*_2) \\ y'' + 4y' + 104y & = & 0 & \quad (*_3) \end{array}$$

a) **(0.5 pts)** Encontre as soluções básicas e a solução geral da EDO $(*_2)$. Dê um nome para cada uma delas.

b) **(1.0 pts)** Encontre uma solução $g(x)$ da EDO $(*_2)$ que obedeça isto aqui: $g(0) = 2$, $g'(0) = 3$.

c) **(0.5 pts)** Encontre as solução básicas complexas e as soluções básicas reais da EDO $(*_3)$.

d) **(1.0 pts)** Teste se $f = e^{2x}\cos(3x)$ é solução da EDO $(*_3)$. *Defina funções intermediárias pras suas contas ficarem menores.*

Questão 3
(Total: 1.0 pts)

Seja $(*_4)$ esta EDO:

$$y' - \frac{2y}{x} = 3x$$

a) **(0.3 pts)** Encontre a solução geral dela.
b) **(0.7 pts)** Teste a sua solução.
Lembre que você pode usar este método:

$$[\mathrm{EL}_3] = \left(\begin{array}{rcl} f' + fg & = & h \\ G' & = & g \\ f & = & e^{-G}(\int e^G h\,dx + C) \end{array} \right)$$

Questão 4
(Total: 2.0 pts)

4) Sejam $(*_5)$, $(*_6)$ e $(*_7)$ estas EDOs:

$$\begin{array}{rl} 20xy^3\,dx + 30x^2y^2\,dy = 0 & (*_5) \\ 20x^2y^3\,dx + 30x^3y^2\,dy = 0 & (*_6) \\ (8xy^2 + 14x)\,dx + (8x^2y + 5)\,dy = 0 & (*_7) \end{array}$$

a) **(0.1 pts)** Mostre que a $(*_5)$ é exata.
b) **(0.1 pts)** Mostre que $(*_6)$ não é exata.
c) **(0.4 pts)** Encontre a solução geral de $(*_5)$.
d) **(0.4 pts)** Teste a sua solução geral da $(*_5)$.
e) **(0.1 pts)** Mostre que $(*_7)$ é exata.
f) **(0.9 pts)** Encontre a solução geral *implícita* da $(*_7)$. Aqui você não precisa encontrar a solução geral explícita – as contas pra encontrar a solução geral explícita são grandes demais.

Lembre que você pode usar este método:

$$[\mathrm{E}_5] = \left(\begin{array}{rcrcl} dz & = & z_x dx + z_y dy & = & 0 \\ \frac{d}{dx} z & = & z_x + z_y \frac{dy}{dx} & = & 0 \\ z & = & C & & \end{array} \right)$$

Questão 5
(Total: 1.0 pts)

Digamos que

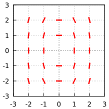
$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) = \left(\frac{2^2}{4!}, \frac{7^2}{5!}, \frac{12^2}{6!}, \ldots \right).$$

Dê uma fórmula pro termo geral desse sequência – ou seja, pro a_n.

Questão 1: gabarito em Maxima

```
(%i1) /* (1a): 1.0 */
      [xmin,ymin, xmax,ymax] : [-3,-3, 3,3]$
(%i2) tracinhos : directionfield(h(y),g(x), lc(red))$
(%i3) myqdrawp(xyrange(), tracinhos);
```

(%o3)



```
(%i4) /* (1b): 0.5 */
      e1     : M[1][1] = M[1][3];
```

(%o4)

$$\frac{d}{d\,x}\,y=-\left(\frac{4\,x}{y}\right)$$

```
(%i5) sols   : ode2(e1,y,x);
```

(%o5)

$$-\left(\frac{y^2}{8}\right)=\frac{x^2}{2}+\%c$$

```
(%i6) solss  : solve(sols,y);
```

(%o6)

$$\left[y=-\left(2\,\sqrt{-x^2-2\,\%c}\right),y=2\,\sqrt{-x^2-2\,\%c}\right]$$

```
(%i7) define(fp(x),   M[6][3]);
```

(%o7)

$$\mathrm{fp}\left(x\right):=\sqrt{\mathrm{C3}-4\,x^2}$$

```
(%i8) define(fn(x), - M[6][3]);
```

(%o8)

$$\mathrm{fn}\left(x\right):=-\sqrt{\mathrm{C3}-4\,x^2}$$

```
(%i9) /* (1c): 0.5 */
      e2     : subst(y=fn(x), e1);
```

(%o9)

$$\frac{d}{d\,x}\left(-\sqrt{\mathrm{C3}-4\,x^2}\right)=\frac{4\,x}{\sqrt{\mathrm{C3}-4\,x^2}}$$

```
(%i10) e3     : ev(e2,diff);
```

(%o10)

$$\frac{4\,x}{\sqrt{\mathrm{C3}-4\,x^2}}=\frac{4\,x}{\sqrt{\mathrm{C3}-4\,x^2}}$$

```
(%i11) /* (1d): 0.5 */
       e4 : y=fp(x);
```

(%o11)

$$y=\sqrt{\mathrm{C3}-4\,x^2}$$

```
(%i12) e5 : subst([x=-2,y=3], e4);
```

(%o12)

$$3=\sqrt{\mathrm{C3}-16}$$

```
(%i13) e6 : solve(e5, C3);
```

(%o13)

$$[\mathrm{C3}=25]$$

```
(%i14) subst(e6, e4);
```

(%o14)

$$y=\sqrt{25-4\,x^2}$$

```
(%i15) /* (1e): 0.5 */
       e7 : y=fn(x);
```

(%o15)

$$y=-\sqrt{\mathrm{C3}-4\,x^2}$$

```
(%i16) e8 : subst([x=2,y=-3], e7);
```

(%o16)

$$-3=-\sqrt{\mathrm{C3}-16}$$

```
(%i17) e9 : solve(e8, C3);
```

(%o17)

$$[\mathrm{C3}=25]$$

```
(%i18) subst(e6, e7);
```

(%o18)

$$y=-\sqrt{25-4\,x^2}$$

Questão 2: gabarito em Maxima

```
(%i1) /* (2a): 0.5 pts */
      star2 : 'diff(y,x,2) - 3*'diff(y,x) - 28*y = 0;
(%o1)
```
$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y-3\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)-28\,y=0$$
```
(%i2) factor(D^2 - 3*D - 28);
(%o2)
```
$$(D-7)\,(D+4)$$
```
(%i3) e1 : ode2(star2, y, x);
(%o3)
```
$$y=\%k1\,e^{7\,x}+\%k2\,e^{-4\,x}$$
```
(%i4) /* (2b): 1.0 pts */
      gg  : rhs(e1);
(%o4)
```
$$\%k1\,e^{7\,x}+\%k2\,e^{-4\,x}$$
```
(%i5)           subst([%k1=0, %k2=1], e1);
(%o5)
```
$$y=e^{-4\,x}$$
```
(%i6)           subst([%k1=1, %k2=0], e1);
(%o6)
```
$$y=e^{7\,x}$$
```
(%i7) f1  : rhs(subst([%k1=0, %k2=1], e1));
(%o7)
```
$$e^{-4\,x}$$
```
(%i8) f2  : rhs(subst([%k1=1, %k2=0], e1));
(%o8)
```
$$e^{7\,x}$$
```
(%i9) e2  : at(gg,          x=0) = 2;
(%o9)
```
$$\%k2+\%k1=2$$
```
(%i10) e3  : at(diff(gg,x), x=0) = 3;
(%o10)
```
$$7\,\%k1-4\,\%k2=3$$
```
(%i11) sol : solve([e2,e3],[%k1,%k2]);
(%o11)
```
$$[[\%k1=1,\%k2=1]]$$
```
(%i12) g   : subst(sol, gg);
(%o12)
```
$$e^{7\,x}+e^{-4\,x}$$
```
(%i13) /* (2c): 0.5 pts */
       star3 : 'diff(y,x,2) + 4*'diff(y,x) + 104*y = 0;
(%o13)
```
$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y+4\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+104\,y=0$$
```
(%i14) e1 : ode2(star3, y, x);
(%o14)
```
$$y=e^{-2\,x}\,\left(\%k1\,\sin\left(10\,x\right)+\%k2\,\cos\left(10\,x\right)\right)$$
```
(%i15) gg : rhs(e1);
(%o15)
```
$$e^{-2\,x}\,\left(\%k1\,\sin\left(10\,x\right)+\%k2\,\cos\left(10\,x\right)\right)$$
```
(%i16) fr1 : rhs(subst([%k1=0, %k2=1], e1));
(%o16)
```
$$e^{-2\,x}\,\cos\left(10\,x\right)$$
```
(%i17) fr2 : rhs(subst([%k1=1, %k2=0], e1));
(%o17)
```
$$e^{-2\,x}\,\sin\left(10\,x\right)$$
```
(%i18) fc1 : exp((-2+10*%i)*x);
(%o18)
```
$$e^{(10\,i-2)\,x}$$
```
(%i19) fc2 : exp((-2-10*%i)*x);
(%o19)
```
$$e^{(-(10\,i)-2)\,x}$$
```
(%i20) ec1 : subst([y=fc1], star3);
(%o20)
```
$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,e^{(10\,i-2)\,x}+4\,\left(\frac{d}{d\,x}\,e^{(10\,i-2)\,x}\right)+104\,e^{(10\,i-2)\,x}=0$$
```
(%i21) ec2 : subst([y=fc2], star3);
(%o21)
```
$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,e^{(-(10\,i)-2)\,x}+4\,\left(\frac{d}{d\,x}\,e^{(-(10\,i)-2)\,x}\right)+104\,e^{(-(10\,i)-2)\,x}=0$$
```
(%i22) expand(ev(ec1, diff));
(%o22)
```
$$0=0$$
```
(%i23) expand(ev(ec2, diff));
(%o23)
```
$$0=0$$
```
(%i24) /* (2d): 1.0 */
       kill(g,s,c)$
(%i25) gradef(g,x, 2*g)$
(%i26) gradef(s,x, 3*c)$
(%i27) gradef(c,x,-3*s)$
(%i28) [diff(g*c,x,2), diff(g*c,x), y];
(%o28)
```
$$[-(12\,g\,s)-5\,c\,g,2\,c\,g-3\,g\,s,y]$$
```
(%i29) star3 : 'diff(y,x,2) + 4*'diff(y,x) + 104*y = 0;
(%o29)
```
$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y+4\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+104\,y=0$$
```
(%i30) e1 : subst([y=g*c], star3);
(%o30)
```
$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,(c\,g)+4\,\left(\frac{d}{d\,x}\,(c\,g)\right)+104\,c\,g=0$$
```
(%i31) ev(e1, diff);
(%o31)
```
$$4\,(2\,c\,g-3\,g\,s)-12\,g\,s+99\,c\,g=0$$
```
(%i32) expand(ev(e1, diff));
(%o32)
```
$$107\,c\,g-24\,g\,s=0$$

Questão 3, 4 e 5: gabarito em Maxima

```
(%i1) /* (3a): 0.3 */
      e1  : 'diff(y,x) - 2*y/x = 3*x;
(%o1)
```
$$\frac{d}{d\,x}\,y-\frac{2\,y}{x}=3\,x$$
```
(%i2) sol : ode2(e1,y,x);
(%o2)
```
$$y=x^2\,\left(3\,\log x+\%c\right)$$
```
(%i3) /* (3b): 0.7 */
      e2  : subst(sol, e1);
(%o3)
```
$$\frac{d}{d\,x}\,\left(x^2\,\left(3\,\log x+\%c\right)\right)-2\,x\,\left(3\,\log x+\%c\right)=3\,x$$
```
(%i4) ev(e2, diff);
(%o4)
```
$$3\,x=3\,x$$
```
(%i1) load("~/MAXIMA/2024-2-C2-E5.mac")$
(%i2) [star5_x, star5_y] : [20*  x*y^3, 30*x^2*y^2];
(%o2)
```
$$\left[20\,x\,y^3,30\,x^2\,y^2\right]$$
```
(%i3) [star6_x, star6_y] : [20*x*2*y^3, 30*x^2*y^2];
(%o3)
```
$$\left[40\,x\,y^3,30\,x^2\,y^2\right]$$
```
(%i4) [star7_x, star7_y] : [8*x*y^2,     8*x^2*y+5];
(%o4)
```
$$\left[8\,x\,y^2,8\,x^2\,y+5\right]$$
```
(%i5) /* (4a): 0.1 pts */
      [diff(star5_x,y), diff(star5_y,x)];
(%o5)
```
$$\left[60\,x\,y^2,60\,x\,y^2\right]$$
```
(%i6) /* (4b): 0.1 pts */
      [diff(star6_x,y), diff(star6_y,x)];
(%o6)
```
$$\left[120\,x\,y^2,60\,x\,y^2\right]$$
```
(%i7) /* (4c): 0.4 pts */
      caixinhas_2           (star5_x,star5_y);
(%o7)
```
$$\left[\begin{pmatrix}0&20&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&30&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right]$$
```
(%i8) caixinhas_3(10*x^2*y^3, star5_x, star5_y);
(%o8)
```
$$\left[\begin{pmatrix}0&0&10&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&20&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&30&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right]$$
```
(%i9) caixinhas_1(10*x^2*y^3);
(%o9)
```
$$\left[\begin{pmatrix}0&0&10&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&20&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&30&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right]$$
```
(%i10) e1 : star5_x + star5_y * 'diff(y,x) = 0;
(%o10)
```
$$30\,x^2\,y^2\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+20\,x\,y^3=0$$
```
(%i11) e2 : 10*x^2*y^3 = C;
(%o11)
```
$$10\,x^2\,y^3=C$$
```
(%i12)       solve(e2, y);
(%o12)
```
$$\left[y=\frac{\left(\sqrt{3}\,i-1\right)\,C^{\frac{1}{3}}}{2\,10^{\frac{1}{3}}\,x^{\frac{2}{3}}},y=-\left(\frac{\left(\sqrt{3}\,i+1\right)\,C^{\frac{1}{3}}}{2\,10^{\frac{1}{3}}\,x^{\frac{2}{3}}}\right),y=\frac{C^{\frac{1}{3}}}{10^{\frac{1}{3}}\,x^{\frac{2}{3}}}\right]$$
```
(%i13) e3 : solve(e2, y)[3];
(%o13)
```
$$y=\frac{C^{\frac{1}{3}}}{10^{\frac{1}{3}}\,x^{\frac{2}{3}}}$$
```
(%i1) /* (5): 1.0 pts */
      [a0, a1, a2] : [2^2/4!, 7^2/5!, 12^2/6!];
(%o1)
```
$$\left[\frac{1}{6},\frac{49}{120},\frac{1}{5}\right]$$
```
(%i2) a(n) := (5*n+2)^2/(n+4)!;
(%o2)
```
$$a\left(n\right):=\frac{\left(5\,n+2\right)^2}{\left(n+4\right)!}$$
```
(%i3) [a(0), a(1), a(2)];
(%o3)
```
$$\left[\frac{1}{6},\frac{49}{120},\frac{1}{5}\right]$$

Cálculo 2 - 2024.2

Prova de reposição (VR)
pra quem perdeu a P1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

Links

Dicas:

1) Nestas questões o que vai contar mais pontos é você organizar as contas de modo que cada passo seja fácil de entender, de verificar, e de justificar – "chegar no resultado certo" vai valer relativamente pouco.

2) Recomendo que vocês usem o método das "caixinhas de anotações" nas mudanças de variável... numa caixinha de anotações a primeira linha diz a relação entre a variável nova e a antiga, todas as outras linhas são consequências da primeira, e dentro da caixinha de anotações você pode usar as gambiarras com variáveis dependentes e diferenciais, como isto aqui: $dx = 42\,du$...

3) ...por exemplo:

$$\begin{bmatrix} s = \operatorname{sen}\theta \\ \sqrt{1-s^2} = \cos\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos\theta \\ ds = \cos\theta\,d\theta \\ \theta = \operatorname{arcsen} s \end{bmatrix}$$

4) Façam o requerimento de revisão de prova! Eu vou ser super rígido na correção mas a banca de revisão não costuma ser!

Anexo

Os *meus* critérios de correção vão ser os que estão no PDFzinho "Introdução ao curso":

http://anggtwu.net/LATEX/2024-2-C2-intro.pdf

A gente já discutiu eles em sala muitas vezes, e vocês já devem ter relido eles muitas vezes também. *Esse PDFzinho tem várias páginas sobre as bancas de revisão de provas e sobre porque em muitos casos eu vou recomendar que as pessoas façam requerimentos de revisão de provas pra que as provas delas sejam recorrigidas com outros critérios.*

Eu avisei no dia da prova que depois eu iria escrever bem mais coisas sobre como essas bancas de revisão têm funcionado. Esse material que eu só consegui organizar depois da prova está neste link:

http://anggtwu.net/2024-rev.html

Vou copiar as seções 3 e 5 dessa página pra cá.

3. Para alinhar...

No processo administrativo contra mim apareceram várias frases como:

- Para alinhar o trabalho dos professores...
- Reprove todo os alunos que não souberem o suficiente
- Com respeito às boas práticas de ensino...
- Com base na experiência que os professores desta banca têm com as disciplinas...
- O seu material não está dando o resultado que você acha que está
- Peça ajuda

...mas eu *continuo* sem saber praticamente nada...

- sobre como eles dão os cursos deles,
- sobre o que eles consideram "suficiente" em cada matéria,
- sobre o que eles consideram "boas práticas",
- sobre qual é "a experiência que os professores desta banca têm com as disciplinas",
- sobre o material que eles usam nos cursos deles,
- sobre o que eles consideram que é "pedir ajuda",
- e sobre o que eles consideram que é "ajudar"...

Anexo (cont.)

5. Isso me atrapalha?

Isso - das bancas de revisão usando critérios de correção que eu não consigo descobrir quais são - me atrapalha? Olha, *sim* - deixa eu explicar porquê.

Durante um certo tempo eu consegui convencer os meus alunos de que o meu curso de Cálculo 2 seria "muito presencial": eu iria adaptar ele pro nível dos alunos, e os alunos que não sabiam o suficiente de Matemática do Ensino Médio iriam conseguir se virar bem - *se eles participassem das aulas, fizessem os exercícios, me mostrassem as dúvidas que eles estavam tendo, e treinassem um pouco em casa...* e os alunos que tentassem só aprender métodos de resolver integrais e EDOs em casa por vídeos que eles nunca me mostram quais são provavelmente iriam se dar mal nas provas, porque eles não iriam aprender as técnicas pra evitar erros que a gente iria aprender em sala, e além disso ia ser relativamente difícil colar nas provas...

Aí as bancas de revisão começaram a aprovar alunos que só mostravam que sabiam um pouquinho de como aplicar certos métodos, e resolveram não dar bola pros casos em que vários alunos cometiam exatamente o mesmo erro bobo exatamente no mesmo ponto das contas... e com isso a "moral da tropa" em sala caiu muito - antes muitos alunos faziam muitos exercícios em grupo na sala "porque não tem outro jeito", mas agora esse "porque não tem outro jeito" não é mais verdade... aí com isso vários alunos desistem de participar ativamente das aulas, e resolvem que vão só tentar descobrir os critérios de correção da banca de revisão - e vão tentar descobrir a) os vídeos certos pra assistir em casa, e b) jeitos que colar que a banca de revisão aceite.

Várias páginas da minha "Introdução ao curso de Cálculo 2" de 2024.2 são sobre isso. Dê uma olhada:

`http://anggtwu.net/LATEX/2024-2-C2-intro.pdf`

Questão 1
(Total: 5.0 pts)
Sabemos que:

$$\int x^3\sqrt{1-x^2}^3\,dx \;=\; \frac{\sqrt{1-x^2}^7}{7} - \frac{\sqrt{1-x^2}^5}{5}$$

Integre:

$$\int x^3\sqrt{4-25x^2}^3\,dx$$

Sugestões: 1) faça várias mudanças de variável simples ao invés de procurar uma mudança de variável complicada que resolve tudo de uma vez, 2) comece montando as caixinhas de anotações das mudanças de variável e só depois resolva a integral, 3) aqui é muito fácil errar nas contas, então faça tudo bem passo a passo.

Questão 2
(Total: 2.5 pts)
a) **(2.0 pts)** Transforme

$$\frac{x^3+2x^2-23\,x+64}{x^2+4x-21}$$

em algo fácil de integrar.
b) **(0.5 pts)** Integre:

$$\int \frac{x^3+2x^2-23\,x+64}{x^2+4x-21}\,dx$$

Questão 3
(Total: 2.5 pts)
a) **(2.0 pts)** Transforme

$$(\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} 5x)^2$$

em algo fácil de integrar usando o "método do E", que na terminologia do Maxima é o método do exponentialize e do demoivre. As dicas são essas aqui:

$$\begin{array}{llll}
c=\cos\theta & c^2+s^2=1 & \frac{ds}{d\theta}=c & E=c+is \\
s=\operatorname{sen}\theta & z^2=t^2+1 & \frac{dc}{d\theta}=-s & c=\frac{E+E^{-1}}{2} \\
t=\tan\theta & \sqrt{1-s^2}=c & \frac{dt}{d\theta}=z^2 & s=\frac{E-E^{-1}}{2i} \\
z=\sec\theta & \sqrt{t^2+1}=z & \frac{dz}{d\theta}=zt & e^{ik\theta}+e^{-ik\theta}=2\cos k\theta \\
E=e^{i\theta} & \sqrt{z^2-1}=t & & e^{ik\theta}-e^{-ik\theta}=2i\operatorname{sen} k\theta
\end{array}$$

b) **(0.5 pts)** Integre:

$$\int (\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} 5x)^2\,dx$$

Questão 4
(Total: 1.0 pts)

Seja $f(t)$ a função no topo da página seguinte.
Seja

$$F(x) \;=\; \int_{t=3}^{t=x} f(t)\,dt.$$

Desenhe o gráfico de $F(x)$ em algum dos grids vazios da próxima página. Indique claramente qual é a versão final e quais desenhos são rascunhos.