Cálculo 2 - 2024.2

Aulas 20 a 23: mais mudanças de variáveis

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

Links

CederjC2V2p19 (p.17) 17. Substituição simples
CederjC2V2p27 (p.25) 18. Substituição simples - continuação
CederjC2V2p31 (p.29) ou escrevemos todo o integrando com a variável t...
CederjC2V2p35 (p.33) 19. Integração por partes
CederjC2V2p45 (p.43) 20. Integração de potências e produtos de funções trigonométricas
CederjC2V2p55 (p.53) 21. Integração de potências e produtos de funções trigonométricas
CederjC2V2p65 (p.63) 22. Substituição trigonométrica
CederjC2V2p68 (p.66) Os três casos típicos
CederjC2V2p103 (p.101) 25. Aulas de exercícios

Links da aula 8:
2hQ21 Quadros da aula 8 (4a, 12/set/2023)
StewPtCap5p39 (p.360) 5.4 Integrais Indefinidas
StewPtCap5p48 (p.369) 5.5 A Regra da Substituição
StewPtCap7p5 (p.420) 7.1 Integração por Partes
2gT45 (2023.1) Mudança de variável: exemplo
2gT46 (2023.1) Mudança de variável: caixinhas

Mudança de variável na integral definida (MVD):
2eT131 (t-ints, p.12) Uma figura pra mudança de variável
2fT49 Meu PDF de 2022.2 sobre mudança de variáveis

Mudança de variável na integral indefinida (MVI):
2eT133 (t-ints, p.14) Um exemplo com contas
2eT135 (t-ints, p.16) Outro exemplo com contas
Leit5p13 (p.296) A regra da cadeia para a antidiferenciação
Leit9p10 (p.537) Integração de potências de sen e cos
Miranda189 6.2. Integração por substituição
Miranda192 Exemplo 6.6
Miranda193 Não podemos
Miranda196 Exercícios
Miranda255 8.3 Integrais Trigonométricas

Thomas55p11 (p.376) Theorem 5: Substitution in definite integrals
Thomas55p3 (p.370) Theorem 5: The substitution rule

Vídeo do Reginaldo:
`https://www.youtube.com/watch?v=PTCUjrEBc4g`

Introdução

O Stewart explica o truque da mudança de variável na integral usando *variáveis dependentes* e *diferenciais*. Por exemplo, se x é a variável independente, u é a variável dependente, e a relação entre elas é $u = g(x) = 2x$, então temos

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}2x = 2$$

e:

$$\int \operatorname{sen}(\underbrace{2x}_{u}) \underbrace{\underbrace{2}_{\frac{du}{dx}}\, dx}_{du} = \int \operatorname{sen}(u)\, du$$

Dê uma olhada:
StewPtCap1p5 (p.10) variável dependente
StewPtCap3p75 (p.228) Diferenciais
StewPtCap5p39 (p.360) 5.4 Integrais Indefinidas
StewPtCap5p48 (p.369) 5.5 A Regra da Substituição

Só que contas com variáveis dependentes e diferenciais são difíceis de justificar formalmente! A gente viu como expandir contas curtas em que certos passos têm justificativas complicadas em contas maiores mas em que cada passo tem uma justificativa bem simples... se a gente tenta fazer isso com a igualdade entre integrais acima a gente acaba descobrindo que as regras pra variáveis dependentes e diferenciais são bem complicadas.

Então eu vou fazer o seguinte. A regra da mudança de variável na integral definida, que o Stewart explica nesta página,

StewPtCap5p51 (p.372) ...para as integrais definidas

é bem fácil de demonstrar usando só o [TFC2].

Eu vou usar estas quatro definições aqui – onde [MVD] é a fórmula pra mudança de variável na integral definida, [MVI] é a fórmula pra mudança de variável na integral indefinida, [MVD4] é uma demonstração da [MVD] com 4 igualdades [MVI3] é uma demonstração da [MVI] com 3 igualdades,

$$\begin{array}{lcl}
[\mathrm{MVD}] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \right) \\
[\mathrm{MVI}] & = & \left(\int f(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int f(u)\,du \right) \\
[\mathrm{MVD4}] & = & \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & F(g(b)) - F(g(a)) \\ & = & F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right) \\
[\mathrm{MVI3}] & = & \left(\begin{array}{rcl} \int f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x)) \\ & = & F(u) \\ & = & \int f(u)\,du \end{array} \right)
\end{array}$$

e a gente vai ver que dá pra tratar algumas destas fórmulas e demonstrações como abreviações pras outras, e que dá pra expandir as versões mais abreviadas em outras em que os passos são mais fáceis de justificar.

Um exemplo

Isto aqui é um exemplo de como contas com mudança de variável costumam ser feitas na prática:

$$\begin{aligned}
&\int 2\cos(3x+4)\,dx \\
=&\quad \int 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \\
=&\quad \frac{2}{3}\int \cos u\,du \\
=&\quad \frac{2}{3}\operatorname{sen} u \\
=&\quad \frac{2}{3}\operatorname{sen}(3x+4)
\end{aligned}$$

É necessário indicar em algum lugar que a relação entre a variável nova e a antiga é esta: $u = 3x+4$.

Compare as contas acima, que não têm nem os limites de integração nem as barras de diferença, com as da coluna da direita:

$$\begin{aligned}
&\int_{x=a}^{x=b} 2\cos(3x+4)\,dx \\
=&\quad \int_{u=3a+4}^{u=3b+4} 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \\
=&\quad \frac{2}{3}\int_{u=3a+4}^{u=3b+4} \cos u\,du \\
=&\quad \frac{2}{3}\Big((\operatorname{sen} u)\big|_{u=3a+4}^{u=3b+4}\Big) \\
=&\quad \frac{2}{3}\Big((\operatorname{sen}(3x+4))\big|_{x=a}^{x=b}\Big)
\end{aligned}$$

Nós vamos tratar a versão à esquerda como uma abreviação pra versão da direita. Note que pra ir da versão "completa" pra "abreviada" é super fácil, é só apagar os limites de integração e as barras de diferença – mas pra ir da versão "abreviada" pra "completa" a gente precisa reconstruir os limites de integração e as barras de diferença, o que é bem mais difícil.

Caixinhas de anotações

O meu truque preferido pra não me enrolar nas contas de uma mudança de variável é fazer uma caixinha de anotações como essa aqui,

$$\left[\begin{array}{c} u = 3x+4 \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(3x+4) = 3 \\ \frac{du}{dx} = 3 \\ \color{red}{du = 3\,dx} \\ \color{red}{dx = \frac{1}{3}\,du} \end{array}\right]$$

na qual: a) a primeira linha diz a relação entre a variável antiga e a variável nova – que nesse exemplo é $u = 3x+4$, b) todas as outras linhas da caixinha são consequências dessa primeira, e c) dentro da caixinha a gente permite gambiarras como:

$$\color{red}{dx = 42\,du}$$

Durante quase todo o curso de C2 a gente vai tratar esse tipo de coisa como uma igualdade entre expressões incompletas – mais ou menos como se a gente estivesse dizendo isso aqui:

$$+20) = /99]$$

Na caixinha à esquerda eu colori as linhas que são gambiarras em vermelho.

Repare que se a gente soubesse usar diferenciais a gente saberia dar um sentido pras igualdades que envolvem diferenciais, e que eu marquei em vermelho... mas a gente não sabe, então a gente vai considerar que elas são gambiarras que a gente só vai entender direito em Cálculo 3.

Aqui tem um exemplo grande:
2fT112 (C2-P1, p.5) Questão 1: gabarito

Os detalhes horríveis

Nesta página aqui – Miranda193 – o Miranda diz "Não podemos calcular uma integral que possui tanto um x e um u nela", mas ele não explica porquê... se em

$$\int_{x=a}^{x=b} 2\cos(u)\,dx$$

esse u fosse uma abreviação para $3x+4$ essa integral acima seria equivalente à do início do slide anterior, né?... =(

Neste slide eu vou tentar contar o que eu sei sobre como o método da substituição funciona – *pra convencer vocês de que não vale a pena vocês tentarem entender os detalhes agora*.

Toda mudança de variável numa integral definida é consequência da igualdade (13) do slide "Contas (2)". Por exemplo, compare:

$$\begin{aligned} \int_{x=a}^{x=b} g(h(x))h'(x)\,dx &= \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g(u)\,du \\ \int_{x=a}^{x=b} 2\cos(3x+4)\,dx &= \int_{u=3a+4}^{u=3b+4} 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \end{aligned}$$

A gente pode tentar descobrir qual é a substituição certa passo a passo, começando pelas funções mais simples.... eu faria assim: olhando pra parte direita eu chuto que $g(u) = 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}$; olhando pra parte esquerda eu chuto que $h(x) = 3x+4$, e daí $h'(x) = 3$; aí eu testo esta substituição aqui,

$$(13)\begin{bmatrix} g(u) := 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3} \\ h(x) := 3x+4 \\ h'(x) := 3 \end{bmatrix}$$

e vejo que o resultado dela é *equivalente* (mas não igual!!!) à última igualdade da coluna da esquerda – não preciso nem substituir o a e o b.

Preciso reescrever este slide!

Os detalhes horríveis (2)

Estas contas aqui,

$$\begin{array}{rcl} u & = & x^4 \\ \frac{du}{dx} & = & 4x^3 \\ du & = & \frac{du}{dx}dx \\ & = & 4x^3\,dx \end{array}$$

fazem sentido se a gente considerar que:

1. x é uma variável independente,
2. u é uma variável dependente, com $u = u(x) = x^4$,
3. dx é uma variável independente,
4. du é uma variável dependente, com $du = \frac{du}{dx}dx$,
5. estas regras sobre diferenciais valem: Leit4p61 (p.275),
6. estas regras sobre variáveis dependentes valem: Stew14p53 (p.951),
7. o dx num $\int f(x)\,dx$ funciona como uma diferencial.

Eu já perguntei pra vários matemáticos fodões que eu conheço – incluindo os desenvolvedores do Maxima, na mailing list – onde eu posso encontrar alguma formalização das regras de como lidar com variáveis dependentes, diferenciais e mudança de variável na integral indefinida, e todos eles me responderam a mesma coisa: "*não faço a menor idéia! Eu sei algumas das regras mas não todas, e não sei onde você pode procurar...*" =(

Moral: é melhor a gente tratar o $du = 4x^3\,dx$ como uma gambiarra...

Caixinhas com mais anotações

$$\begin{array}{rcl}
\int (\operatorname{sen}\theta)^4(\cos\theta)^7\,d\theta & = & \int (\operatorname{sen}\theta)^4(\cos\theta)^6\cos\theta\,d\theta \\
& = & \int (\operatorname{sen}\theta)^4((\cos\theta)^2)^3\cos\theta\,d\theta \\
& = & \int (\operatorname{sen}\theta)^4(1-(\operatorname{sen}\theta)^2)^3\cos\theta\,d\theta \\
& = & \int s^4(1-s^2)^3\,ds
\end{array}
\qquad
\left[\begin{array}{c}
\operatorname{sen}\theta = s \\
\frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \\
ds = \cos\theta\,d\theta \\
\cos\theta\,d\theta = ds
\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{rcl}
\int (\operatorname{sen}\theta)^4(\cos\theta)^7\,d\theta & = & \int (\operatorname{sen}\theta)^4(\cos\theta)^6\cos\theta\,d\theta \\
& = & \int s^4(1-s^2)^3\,ds
\end{array}
\qquad
\left[\begin{array}{c}
\operatorname{sen}\theta = s \\
\frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \\
ds = \cos\theta\,d\theta \\
\cos\theta\,d\theta = ds \\
(\cos\theta)^2 = 1-(\operatorname{sen}\theta^2) \\
(\cos\theta)^2 = 1-s^2 \\
(\cos\theta)^6 = (1-s^2)^3
\end{array}\right]$$

Caixinhas com mais anotações (2)

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int s\sqrt{1-s^2}\,ds & = & \displaystyle\int (\operatorname{sen}\theta)\sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2}\cos\theta\,d\theta \\ & = & \displaystyle\int (\operatorname{sen}\theta)\sqrt{(\cos\theta)^2}\cos\theta\,d\theta \\ & = & \displaystyle\int (\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)\cos\theta\,d\theta \\ & = & \displaystyle\int (\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)^2\,d\theta \end{array} \qquad \left[\begin{array}{c} s = \operatorname{sen}\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \\ ds = \cos\theta\,d\theta \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int s\sqrt{1-s^2}\,ds & = & \displaystyle\int (\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)\cos\theta\,d\theta \\ & = & \displaystyle\int (\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)^2\,d\theta \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds & = & \displaystyle\int \frac{1}{\cos\theta}\cos\theta\,d\theta \\ & = & \displaystyle\int 1\,d\theta \\ & = & \theta \\ & = & \operatorname{arcsen} s \end{array} \qquad \left[\begin{array}{c} s = \operatorname{sen}\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \\ ds = \cos\theta\,d\theta \\ s^2 = (\operatorname{sen}\theta)^2 \\ 1-s^2 = 1-(\operatorname{sen}\theta)^2 \\ 1-s^2 = (\cos\theta)^2 \\ \sqrt{1-s^2} = \cos\theta \\ \operatorname{arcsen} s = \operatorname{arcsen}\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{arcsen} s = \theta \\ \theta = \operatorname{arcsen} s \end{array}\right]$$

Caso particular 1 (MVD)

$$\text{[MVD]} = \left(\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \right)$$

$$\text{[MVD]}\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left(\int_{x=a}^{x=b} f(2x)\cdot 2\,dx \;=\; \int_{u=2a}^{u=2b} f(u)\,du \right)$$

$$\text{[MVD]}\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \left(\int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx \;=\; \int_{u=2a}^{u=2b} \operatorname{sen} u\,du \right)$$

$$\text{[MVD4]} = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & F(g(b)) - F(g(a)) \\ & = & F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$\text{[MVD4]}\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f(2x)\cdot 2\,dx & = & F(2x)\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & F(2b) - F(2a) \\ & = & F(u)\big|_{u=2a}^{u=2b} \\ & = & \int_{u=2a}^{u=2b} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$\text{[MVD4]}\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx & = & F(2x)\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & F(2b) - F(2a) \\ & = & F(u)\big|_{u=2a}^{u=2b} \\ & = & \int_{u=2a}^{u=2b} \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

$$\text{[MVD4]}\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx & = & (-\cos 2x)\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & (-\cos 2b) - (-\cos 2a) \\ & = & (-\cos u)\big|_{u=2a}^{u=2b} \\ & = & \int_{u=2a}^{u=2b} \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

Caso particular 1 (MVI)

$$[\text{MVI}] = \left(\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI}]\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left(\int f(2x)\cdot 2\,dx = \int f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI}]\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \left(\int \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx = \int \operatorname{sen} u\,du \right)$$

$$[\text{MVI3}] = \begin{pmatrix} \int f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x)) \\ & = & F(u) \\ & = & \int f(u)\,du \end{pmatrix}$$

$$[\text{MVI3}]\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \int f(2x)\cdot 2\,dx & = & F(2x) \\ & = & F(u) \\ & = & \int f(u)\,du \end{pmatrix}$$

$$[\text{MVI3}]\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \int \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx & = & F(2x) \\ & = & F(u) \\ & = & \int \operatorname{sen} u\,du \end{pmatrix}$$

$$[\text{MVI3}]\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \int \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx & = & (-\cos 2x) \\ & = & (-\cos u) \\ & = & \int \operatorname{sen} u\,du \end{pmatrix}$$

Caso particular 2 (MVD)

$$[\text{MVD}] \quad = \quad \left(\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \quad = \quad \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVD}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\int_{x=a}^{x=b} f(x^2)\cdot 2x\,dx \quad = \quad \int_{u=a^2}^{u=b^2} f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVD}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx \quad = \quad \int_{u=a^2}^{u=b^2} \operatorname{sen} u\,du \right)$$

$$[\text{MVD4}] \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & F(g(b)) - F(g(a)) \\ & = & F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f(x^2)\cdot 2x\,dx & = & F(x^2)\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & F(b^2) - F(a^2) \\ & = & F(u)\big|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ & = & \int_{u=a^2}^{u=b^2} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx & = & F(x^2)\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & F(b^2) - F(a^2) \\ & = & F(u)\big|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ & = & \int_{u=a^2}^{u=b^2} \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx & = & (-\cos x^2)\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & (-\cos b^2) - (-\cos a^2) \\ & = & (-\cos u)\big|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ & = & \int_{u=a^2}^{u=b^2} \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

Caso particular 2 (MVI)

$$[\text{MVI}] = \left(\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \left(\int f(x^2)\cdot 2x\,dx = \int f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \left(\int \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx = \int \operatorname{sen} u\,du \right)$$

$$[\text{MVI3}] = \begin{pmatrix} \int f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x)) \\ & = & F(u) \\ & = & \int f(u)\,du \end{pmatrix}$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \int f(x^2)\cdot 2x\,dx & = & F(x^2) \\ & = & F(u) \\ & = & \int f(u)\,du \end{pmatrix}$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \int \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx & = & F(x^2) \\ & = & F(u) \\ & = & \int \operatorname{sen} u\,du \end{pmatrix}$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \int \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx & = & (-\cos x^2) \\ & = & (-\cos u) \\ & = & \int \operatorname{sen} u\,du \end{pmatrix}$$

Caso particular 3 (MVI)

$$[\text{MVI}] = \left(\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI}]\begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{sen} x \\ g'(x) := \cos x \end{bmatrix} = \left(\int f(\operatorname{sen} x)\cos x\,dx = \int f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI}]\begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{sen} x \\ g'(x) := \cos x \\ f(u) := u^2(1-u^2)^2 \end{bmatrix} = \left(\int (\operatorname{sen} x)^3(1-(\operatorname{sen} x)^2)^2\cos x\,dx = \int u^2(1-u^2)^2\,du \right)$$

$$[\text{MVI3}] = \left(\begin{array}{rcl} \int f(g(x))g'(x)\,dx &=& F(g(x)) \\ &=& F(u) \\ &=& \int f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}]\begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{sen} x \\ g'(x) := \cos x \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int f(\operatorname{sen} x)\cos x\,dx &=& F(\operatorname{sen} x) \\ &=& F(u) \\ &=& \int f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}]\begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{sen} x \\ g'(x) := \cos x \\ f(u) := u^2(1-u^2)^2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int (\operatorname{sen} x)^3(1-(\operatorname{sen} x)^2)^2\cos x\,dx &=& F(\operatorname{sen} x) \\ &=& F(u) \\ &=& \int u^2(1-u^2)^2\,du \end{array} \right)$$

O macaco, de novo

Estas duas igualdades são falsas

$$\begin{array}{rcl}\sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2} & = & \cos\theta \\ \operatorname{arcsen}\operatorname{sen}\theta & = & \theta\end{array}$$

quando $\theta = \pi$... confira!

Mas elas são verdadeiras para $\theta = 0$, e para todo θ num certo intervalo em torno do 0 que eu não quero contar qual é.

Lembre quem em Cálculo 2 a gente vai primeiro fazer as contas como o macaco que faz todas as contas como se tudo funcionasse, e a gente vai deixar pra checar os detalhes, como se θ está no intervalo certo, só no final, depois de termos feito as contas todas.

O Leithold é super cuidadoso nas contas e nesses detalhes como os domínios da funções e o intervalo onde mora o θ, mas a maioria dos outros livros de Cálculo 2 que eu conheço não são – eles são meio porcalhões com esses detalhes... e a gente também vai ser, senão não vai dar tempo de cobrir o suficiente da matéria.

O truque dos intervalos

Dê uma olhada nas primeiras páginas daqui:

Leit5p3 5.1. Antidiferenciação

O Leithold usa expressões como "num intervalo I", "para todo $x \in I$" e "definidas no mesmo intervalo" um montão de vezes. O truque de usar sempre intervalos resolve esse esse problema daqui super bem:

2fT24 Meme: expanding brain, versão ln

A minha definição preferida pra integral indefinida,

2fT23 Outra definição pra integral indefinida

também resolve o problema – de um modo bem mais simples, e que é suficiente pro tipo de conta que a gente tem que treinar em Cálculo 2.

MVI

A nossa fórmula pra mudança de variável na integral indefinida vai ser esta aqui:

$$\textstyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \quad = \quad \int f(u)\,du \quad = \left(\displaystyle\int f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int f'(u)\,du \right)$$

Dá pra demonstrar ela deste jeito,

$$\int f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; f(g(x)) \;=\; f(u) \;=\; \int f'(u)\,du$$

onde a primeira e a terceira igualdades são consequências do , e a igualdade do meio só vale se tivermos $u = g(x)$.

Os livros demonstram a $\int f(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int f(u)\,du$ de um jeitos que eu nunca achei muito convincentes – ou fingindo que tudo é óbvio, ou "derivando tudo em x". As contas abaixo me ajudaram a entender o que acontece quando a gente "deriva tudo em x":

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\int f'(g(x))g'(x)\,dx\right)}_{f'(g(x))g'(x)} = \underbrace{\frac{d}{dx}f(g(x))}_{f'(g(x))g'(x)} = \underbrace{\frac{d}{dx}\underbrace{f(u)}_{f(g(x))}}_{f'(g(x))g'(x)} = \underbrace{\frac{d}{dx}\underbrace{\underbrace{\int f'(u)\,du}_{f(u)}}_{f(g(x))}}_{f'(g(x))g'(x)}$$

Simplificando raizes quadradas

Na aula de 16/maio/2023 você aprendeu – na prática, não vendo uma definição formal – o que é transformar uma integral mais difícil numa integral mais fácil, que nós sabemos integrar...

a) Digamos que você sabe integrar $\int \sqrt{1-s^2}\,ds$. Transforme $\int \sqrt{1-(5x)^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

b) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

c) Digamos que você sabe integrar $\int \sqrt{1-s^2}^{\,k}\,ds$ para qualquer valor de k. Transforme $\int \sqrt{1-(5x)^2}^{\,42}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

d) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}^{\,42}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

e) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}^{\,k}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

f) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}^{\,k}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

g) Entenda este truque aqui:

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{3^2-x^2} & = & \sqrt{3^2-3^2\frac{1}{3^2}x^2} \\
 & = & \sqrt{3^2-3^2(\frac{x}{3})^2} \\
 & = & \sqrt{3^2(1-(\frac{x}{3})^2)} \\
 & = & \sqrt{3^2}\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2} \\
 & = & 3\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}
\end{array}$$

Use ele – com adaptações, óbvio – pra transformar $\int \sqrt{25-x^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

h) Use ele pra transformar $\int \sqrt{25-x^2}^{\,42}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

i) Use ele pra transformar $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

j) Use ele pra transformar $\int \sqrt{a^2-x^2}^{\,k}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

j) Use ele pra transformar $\int x^{20}\sqrt{a^2-x^2}^{\,k}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

Exercício 3

Slogan:

> *Toda integral que pode ser resolvida por uma sequência de mudanças de variável pode ser resolvida por uma mudança de variável só.*

Durante a quarentena eu dei algumas questões de prova sobre este slogan. Dê uma olhada:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=4
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=9
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-P1.pdf#page=15

a) Resolva a integral abaixo usando uma mudança de variável só (dica: $u = g(h(x))$):

$$\int f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)\,dx = ?$$

b) Resolva a integral acima usando duas mudanças de variável. Dica: comece com $u = h(x)$.

O Miranda e o Leithold preferem fazer em um passo só certas mudanças de variáveis que eu prefiro fazer em dois ou três passos. Entenda o exemplo 8.1 do Miranda – o da seção 8.4, na página 264...

http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#263

c) ...e descubra como resolver a integral dele fazendo duas mudanças de variáveis ao invés de uma só. A segunda mudança de variável vai ser $s = \operatorname{sen}\theta$, e a primeira eu prefiro não contar qual é – tente usar as idéias do exercício 1 pra descobrir qual ela tem que ser.

Ainda não atualizei este slide!