Cálculo 3 - 2024.2

Todos os PDFs do semestre
juntados num PDFzão só

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.2-C3.html

Cálculo 3 - 2024.2

Aula nn: ponha o título aqui

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2024.2-C3.html

Links

3iQ1 Quadros da aula de 18/mar/2024
3iQ3 Quadros da aula de 20/mar/2024

"Links pra hoje" de 20/mar/2024:
3hT10 Uma trajetória em três partes
3hT11 Uma trajetória em três partes (2)
3iQ1 Quadros da aula de 18/mar/2024
2iQ7 Quadros da aula de C2 de 20/mar/2024
3hT8 Pontos mais fáceis de calcular
3fT1 Introdução a trajetórias

"Links pra hoje" de 18/mar/2024:
Mpg8 Set comprehensions
2hT4 "Releia a Dica 7"
3dT6 Vetores em Álgebra Linear e em GA
3dT7 Vetores como setas
3hT6 Seja seu próprio GeoGebra: links
3hT8 Pontos mais fáceis de calcular
3fT1 Introdução a trajetórias
2hT129 Um jogo colaborativo
3jQ1 Quadros da aula 1 (23/set)
3jQ5 Quadros da aula 2 (23/set)

MpgP8 Set comprehensions
MpgP18 Sistemas de coordenadas
MpgP19 Sistemas de coordenadas (2)
3hT6 Seja seu próprio GeoGebra: links (2023.2)
Pontos mais fáceis de calcular

Pontos mais fáceis de calcular

Muito importante:
Se você for uma pessoa pra quem
$12345 + 9675$ é tão fácil de calcular de cabeça quanto $12000 + 345$,
e $4 + 5x = 6$ é tão fácil de resolver de cabeça quanto $1 + x = 2$,

...então tente pensar como uma pessoa pra quem
$12345 + 9675$ é muito mais difícil de calcular que $12000 + 345$,
e $4 + 5x = 6$ é muito mais difícil de resolver quanto $1 + x = 2$...

...e além disso considere que somas são mais fáceis de calcular de cabeça do que subtrações – e que, por exemplo, dá pra calcular $34+45$ de cabeça mas dá um trabalhão, e que calcular $34 - 45$ de cabeça é quase impossível.

Sejam:

$$\begin{array}{rcl}
f_1(t) & = & 34 + t \cdot 45 \\
f_2(t) & = & 34 + (t - 56) \cdot 45 \\
f_3(t) & = & 34 + (t + 56) \cdot 45 \\
f_4(t) & = & 34 + ((t - 56)/4) \cdot 45 \\
f_5(t) & = & 34 + ((t + 56)/4) \cdot 45 \\
P_1(t) & = & (12, 23) + t\overrightarrow{(4, 5)} \\
P_2(t) & = & (12, 23) + (t - 8)\overrightarrow{(4, 5)} \\
P_3(t) & = & (12, 23) + (t + 8)\overrightarrow{(4, 5)} \\
P_4(t) & = & (12, 23) + ((t - 8)/34)\overrightarrow{(4, 5)} \\
P_5(t) & = & (12, 23) + ((t + 8)/34)\overrightarrow{(4, 5)}
\end{array}$$

Os pontos mais fáceis de calcular do $f_4(t)$ são estes aqui.
O caso mais fácil de todos é este,

$$34 + \underbrace{((t - 56)/4)}_{0} \cdot 45$$

em que temos:

$$f(56) \;=\; \underbrace{34 + \underbrace{(\underbrace{(\underbrace{\underbrace{t}_{56} - 56}_{0})/4}_{0}) \cdot 45}_{0}}_{34}$$

E o segundo caso mais fácil é este,

$$34 + \underbrace{((t - 56)/4)}_{1} \cdot 45$$

em que temos:

$$f(56 + 4) \;=\; \underbrace{34 + \underbrace{(\underbrace{(\underbrace{\underbrace{t}_{60} - 56}_{4})/4}_{1}) \cdot 45}_{45}}_{34+45}$$

Pontos mais fáceis de calcular (2)

Sejam:

$$
\begin{array}{rcl}
f_1(t) & = & 34 + t \cdot 45 \\
f_2(t) & = & 34 + (t-56) \cdot 45 \\
f_3(t) & = & 34 + (t+56) \cdot 45 \\
f_4(t) & = & 34 + ((t-56)/4) \cdot 45 \\
f_5(t) & = & 34 + ((t+56)/4) \cdot 45 \\
P_1(t) & = & (12,23) + t\overrightarrow{(4,5)} \\
P_2(t) & = & (12,23) + (t-8)\overrightarrow{(4,5)} \\
P_3(t) & = & (12,23) + (t+8)\overrightarrow{(4,5)} \\
P_4(t) & = & (12,23) + ((t-8)/34)\overrightarrow{(4,5)} \\
P_5(t) & = & (12,23) + ((t+8)/34)\overrightarrow{(4,5)}
\end{array}
$$

Exercício
Complete a tabela à direita com os dois pontos mais fáceis de calcular de cada uma das 10 funções acima. *Faça todas as contas de cabeça e escreva só os resultados finais!* O segundo ponto mais fácil de calcular sempre pode ser escrito nestes dois formatos, $f_4(56+4) = 34+45$ e $f_4(60) = 79$ – e você pode escolher qual dos formatos usar.

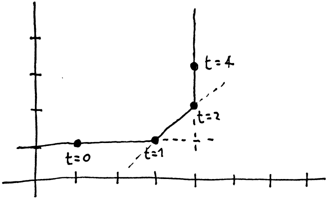
$$
\begin{array}{rcl}
f_1(\underline{\hspace{2cm}}) & = & \underline{\hspace{2.5cm}} \\
f_1(\underline{\hspace{2cm}}) & = & \underline{\hspace{2.5cm}} \\
f_2(\underline{\hspace{2cm}}) & = & \underline{\hspace{2.5cm}} \\
f_2(\underline{\hspace{2cm}}) & = & \underline{\hspace{2.5cm}} \\
f_3(\underline{\hspace{2cm}}) & = & \underline{\hspace{2.5cm}} \\
f_3(\underline{\hspace{2cm}}) & = & \underline{\hspace{2.5cm}} \\
f_4(\underline{\hspace{2cm}}) & = & \underline{\hspace{2.5cm}} \\
f_4(\underline{\hspace{2cm}}) & = & \underline{\hspace{2.5cm}} \\
f_5(\underline{\hspace{2cm}}) & = & \underline{\hspace{2.5cm}} \\
f_5(\underline{\hspace{2cm}}) & = & \underline{\hspace{2.5cm}} \\
P_1(\underline{\hspace{2cm}}) & = & \underline{\hspace{2.5cm}} \\
P_1(\underline{\hspace{2cm}}) & = & \underline{\hspace{2.5cm}} \\
P_2(\underline{\hspace{2cm}}) & = & \underline{\hspace{2.5cm}} \\
P_2(\underline{\hspace{2cm}}) & = & \underline{\hspace{2.5cm}} \\
P_3(\underline{\hspace{2cm}}) & = & \underline{\hspace{2.5cm}} \\
P_3(\underline{\hspace{2cm}}) & = & \underline{\hspace{2.5cm}} \\
P_4(\underline{\hspace{2cm}}) & = & \underline{\hspace{2.5cm}} \\
P_4(\underline{\hspace{2cm}}) & = & \underline{\hspace{2.5cm}} \\
P_5(\underline{\hspace{2cm}}) & = & \underline{\hspace{2.5cm}} \\
P_5(\underline{\hspace{2cm}}) & = & \underline{\hspace{2.5cm}}
\end{array}
$$

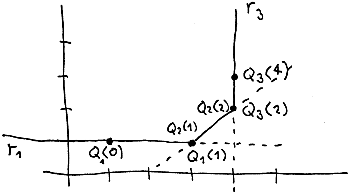
Uma trajetória em três partes

Agora você vai tentar encontrar uma descrição "formal", "algébrica", da trajetória $P(t)$ que eu desenhei à direita. Uma descrição informal dela seria assim: um corpo (pra usar terminologia de físicos...) se move em movimento retilíneo uniforme na horizonal pra direita desde $t = -\infty$ até $t = 1$, depois ele muda pra um outro movimento retilíneo uniforme e anda em diagonal na direção nordeste até $t = 2$, e a partir de $t = 3$ ele muda pra um outro movimento retilíneo uniforme, dessa vez na vertical. Temos $P(0) = (1,1)$, $P(1) = (3,1)$, $P(2) = (4,2)$, e $P(3) = (4,3)$ – dá pra ver isso pelo gráfico – e a gente pode começar definindo três trajetórias mais simples, $Q_1(t)$, $Q_2(t)$, e $Q_3(t)$, que são movimentos retilíneos uniformes, e depois montar a definição da trajetória $P(t)$ a partir delas.

Note que:

$$\begin{array}{l}
(1,1) = P(0) = Q_1(0) \\
(3,1) = P(1) = Q_1(1) = Q_2(1) \\
(4,2) = P(2) = Q_2(2) = Q_3(2) \\
(4,3) = P(4) = Q_3(4)
\end{array}$$

$P(t) =$ 



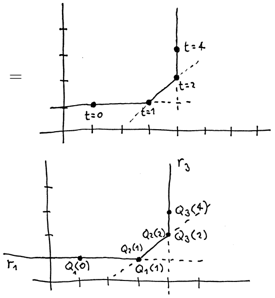
Uma trajetória em três partes (2)

Agora complete todas as lacunas abaixo:

$$\begin{array}{rcl}
Q_1(t) & = & (\underline{\quad},\underline{\quad}) + t\overrightarrow{(\underline{\quad},\underline{\quad})} \\
Q_2(t) & = & (\underline{\quad},\underline{\quad}) + (t-\underline{\quad})\overrightarrow{(\underline{\quad},\underline{\quad})} \\
Q_3(t) & = & (\underline{\quad},\underline{\quad}) + ((t-\underline{\quad})/\underline{\quad})\overrightarrow{(\underline{\quad},\underline{\quad})} \\
r_1 & = & \{\, Q_1(t) \mid t \in \mathbb{R} \,\} \\
r_2 & = & \{\, Q_2(t) \mid t \in \mathbb{R} \,\} \\
r_3 & = & \{\, Q_3(t) \mid t \in \mathbb{R} \,\}
\end{array}$$

$$P(t) = \begin{cases}
(\underline{\quad},\underline{\quad}) + t\overrightarrow{(\underline{\quad},\underline{\quad})} & \text{quando } t \leq 1, \\
(\underline{\quad},\underline{\quad}) + (t-\underline{\quad})\overrightarrow{(\underline{\quad},\underline{\quad})} & \text{quando } 1 \leq t \leq 2, \\
(\underline{\quad},\underline{\quad}) + ((t-\underline{\quad})/\underline{\quad})\overrightarrow{(\underline{\quad},\underline{\quad})} & \text{quando } 2 \leq t,
\end{cases}$$

$P(t) \;=$



Importante: faça todas as contas de cabeça e calcule só os “pontos mais fáceis de calcular” que eu expliquei alguns slides atrás. Você pode fazer quantos chutes-e-testes você precisar, desde que você marque eles com “se” e “então”. *Não apague nenhum dos seus chutes-e-testes!*

Dê uma olhada em como as pessoas fizeram isso no quadro na aula 2:
3hQ5 Quadros de 01/set/2023

Parâmetros e casos degenerados

Sejam:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{A} & := & \{\,\{\,(1,1),(2,1)\,\},\{\,(2,1),(2,2)\,\}\,\} \\
\mathcal{B} & := & \{\,a,b\in\mathbb{R}\;;\;\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=ax+b\,\}\,\} \\
\mathcal{C} & := & \{\,a,b,c\in\mathbb{R}\;;\;\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by=c\,\}\,\} \\
\mathcal{D} & := & \{\,a,b,c,d\in\mathbb{R}\;;\;\{\,t\in\mathbb{R}\;;\;(a,b)+t\overrightarrow{(c,d)}\,\}\,\} \\
r_1 & := & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0x+0y=0\,\} \\
r_2 & := & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0x+0y=2\,\} \\
r_3 & := & \{\,t\in\mathbb{R}\;;\;(2,3)+t\overrightarrow{(0,0)}\,\} \\
r_4 & := & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=12x+23\,\}
\end{array}
$$

Children:
IDARCTp2
ZHAsP3
MissingP6

Então:
$\mathcal{A}$ é [desenho],
$\mathcal{B}$ é o conjunto de todas as retas não-verticais,
$\mathcal{C}$ é o conjunto de todas as retas e mais o $\mathbb{R}^2$ e o $\emptyset$,
$\mathcal{D}$ é o conjunto de todas as retas e mais todos os pontos de $\mathbb{R}^2$,
$r_1 = \mathbb{R}^2$,
$r_2 = \emptyset$,
$r_3 = \{(2,3)\}$,
r_4 é uma reta difícil de desenhar.

Cálculo 3 - 2024.2

Aulas 2 a 9: trajetórias

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2024.2-C3.html

Links

Felipe Acker:
AckerGA1p53 9. Equações paramétricas

AckerGA1, AckerGA2, AckerGA3, AckerGA4
`http://anggtwu.net/acker/README.html`

Bortolossi:
Bort6 6. curvas parametrizadas

Stewart:
StewPtCap10p5 10. Equações paramétricas e coordenadas polares
StewPtCap10p9 (p.579) Figuras 10, 11 e 12

Leithold:
Leit10 10. Seções cônicas e coordenadas polares
Leit10p43 (p.618) Limaçon

Introdução antiga (2021.2)

Desta vez um dos objetivos principais do curso vai ser a gente aprender a visualizar muitas coisas em 3D ou de cabeça ou fazendo umas pouquinhas contas e desenhos no papel. Pra isso a gente vai treinar fazer "desenhos tortos que todo mundo entenda" – porque fazer desenhos à mão livre medindo tudo no olhômetro costuma ser bem mais rápido do que fazer desenhos com régua – e em TODOS os exercícios que eu vou passar durante o curso as contas são simples o suficiente pra poderem ser feitas meio de cabeça e meio no papel.

Em Cálculo 2 você muitas vezes teve que desenhar figuras feitas de 4, 8, ou 16 retângulos, e aí você levava 5 minutos pra entender como desenhar o primeiro retângulo, depois só um minuto pra desenhar o segundo, e aos poucos você entendia o padrão, e no final você desenhava cada retângulo em menos de 5 segundos – e aí você conseguia *visualizar* como seria a figura correspondente com 256, 512 ou 1024 retângulos, e você passava a conseguir visualizar certos somatórios a partir das fórmulas deles, sem precisar desenhar as figuras correspondentes a eles.

Nos exercícios deste PDF você vai desenhar parábolas a partir de 5 pontos delas, e você vai tentar "adivinhar" o resto da parábola a partir destes poucos pontos. O modo matematicamente correto de fazer isto seria como o Bortolossi faz em alguns exercícios; dê uma olhada nas páginas 113 e 114 dele. O exercício [24] da página 113 dá seis fórmulas e seis gráficos – os gráficos estão na página seguinte – e ele pede pra você descobrir qual fórmula corresponde a qual gráfico...

Bort3p35 (p.113) Exercício [24]
Bort3p37 (p.114) Figuras pro exercício 24

Neste curso eu vou passar um monte de exercícios com enunciados como "tente adivinhar o gráfico da equação tal". Eu vou usar a expressão "tente adivinhar" pra enfatizar que o que a gente vai fazer não é totalmente formal: a partir de 5 pontos a gente consegue fazer uma "hipótese razoável" de como é o formato de uma parábola, a partir de 20 pontos dessa parábola a gente conseguiria fazer uma hipótese melhor de como ela é, e calculando um milhão de pontos dela a gente conseguiria fazer um desenho bem mais preciso dela... só que a gente quer aprender a fazer desenhos bons o suficiente a partir de contas que a gente possa fazer na mão!...

Introdução ao curso
Cálculo 3 é principalmente sobre:

1. funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$ – que o Bortolossi costuma chamar de curvas parametrizadas, mas nós vamos chamar de trajetórias, e

2. funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, que vão gerar superfícies.

Depois que nós aprendermos o suficiente sobre (1) e (2) nós vamos poder lidar com coisas um pouco mais gerais, como funções $F : A \to \mathbb{R}^n$, onde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto.

Nossos primeiros objetivos vão ser:

1. Aprender a representar graficamente algumas trajetórias, usando a idéia de traço do Bortolossi (cap.6, p.188), mas escrevendo algumas informações a mais, como "$t = 0$" e "$t = 1$" em alguns pontos,

2. Calcular e representar graficamente vetores tangentes a trajetórias ("vetores velocidade"),

3. Entender vetores secantes (cap.6, p.199),

4. Entender aproximações de primeira ordem pra trajetórias, que dão retas parametrizadas, e depois aproximações de segunda ordem, que vão dar parábolas parametrizadas.

...mas hoje nós vamos fazer uma revisão de algumas idéias de GA.

Você já deve ter visto estas duas convenções diferentes para representar pontos e vetores... am Álgebra Linear tanto pontos quanto vetores em $\mathbb{R}^2$ são representados como matrizes-coluna de altura 2:

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}40\\50\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}42\\53\end{pmatrix}$$

e em Geometria Analítica pontos e vetores são escritos de forma diferente – vetores têm uma seta em cima – e representados graficamente de formas diferentes...

$$(2,3) + \overrightarrow{(40,50)} = (42,53)$$

Vetores como setas

Um ponto (a, b) é interpretado graficamente como um ponto (a, b) de $\mathbb{R}^2$, e um vetor $\overrightarrow{(c, d)}$ é interpretado como um deslocamento, e desenhado como uma seta.

Se o vetor $\overrightarrow{(c, d)}$ aparece sozinho a representação gráfica dele é qualquer seta que anda c unidades pra direita e d unidades pra cima. Às vezes a gente pensa que $\overrightarrow{(c, d)}$ é o conjunto de *todas* as setas assim – o conjunto de todas as setas "equipolentes" a esta; veja a p.9 do livro do CEDERJ.

Link:

DFES1p10 CEDERJ, Geometria Analítica 1 (p.9)

Uma convenção (temporária)

O resultado da expressão $(a,b)+\overrightarrow{(c,d)}$ é o ponto $(a+c,b+d)$, mas a representação gráfica dele vai ser:

1) o ponto (a,b),

2) uma seta indo de (a,b) para $(a+c,b+d)$,

3) o ponto $(a+c,b+d)$,

4) anotações dos lados dos pontos (a,b) e $(a+c,b+d)$ dizendo os "nomes" destes pontos e uma anotação do lado da seta $\overrightarrow{(c,d)}$ dizendo o seu "nome" — como nos dois exemplos abaixo (oops! Falta fazer os desenhos!):

(pôr o desenho aqui)

Nesta aula vai ser obrigatório pôr todos os nomes, mas nas outras não.

A representação gráfica de

$$((1,1)+\overrightarrow{(2,0)})+\overrightarrow{(1,2)}=(1,1)+(\overrightarrow{(2,0)}+\overrightarrow{(1,2)})$$

Vai ser um triângulo feito de três pontos e três setas – os que estão em vermelho aqui:

$$\underbrace{(\underbrace{(1,1)+\overrightarrow{(2,0)}}_{(3,1)})+\overrightarrow{(1,2)}}_{(4,3)}=\underbrace{(1,1)+(\underbrace{\overrightarrow{(2,0)}+\overrightarrow{(1,2)}}_{\overrightarrow{(3,2)}})}_{(4,3)}$$

O objetivo do próximo exercício é você relembrar como representar graficamente certas expressões com pontos e vetores usando quase só o olhômetro, quase sem fazer contas.

Desenhando parábolas (quase) no olhômetro

Digamos que conhecemos A, $\vec{v}$, e $\vec{w}$. Então a trajetória

$$P(t) = A + t\vec{v} + t^2\vec{w}$$

é uma parábola – e queremos aprender a desenhar os 5 pontos mais fáceis dela, que são $P(0)$, $P(1)$, $P(-1)$, $P(2)$, $P(-2)$, usando o máximo de olhômetro e o mínimo possível de contas...

Exercício 1: desenhando parábolas (quase) no olhômetro

1) Sejam $A = (3,1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1,0)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(0,1)}$.
Represente graficamente num gráfico só:

a) A
b) $(A+\vec{v})+\vec{w}$
c) $(A+\vec{w})+\vec{v}$
d) $(A+2\vec{v})+4\vec{w}$
e) $(A+4\vec{w})+2\vec{v}$
f) $(A-\vec{v})+\vec{w}$
g) $(A+\vec{w})-\vec{v}$
h) $(A-2\vec{v})+4\vec{w}$
i) $(A+4\vec{w})-2\vec{v}$

Exercício 2: desenhando parábolas (quase) no olhômetro, 2

2) Sejam $A = (1,1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1,-1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(1,1)}$.

Represente graficamente num gráfico só:

a) A

b) $(A + \vec{v}) + \vec{w}$

c) $(A + \vec{w}) + \vec{v}$

d) $(A + 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

e) $(A + 4\vec{w}) + 2\vec{v}$

f) $(A - \vec{v}) + \vec{w}$

g) $(A + \vec{w}) - \vec{v}$

h) $(A - 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

i) $(A + 4\vec{w}) - 2\vec{v}$

Exercício 3: desenhando parábolas (quase) no olhômetro, 3

3) Sejam $A = (1,1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1,-1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(-1,1)}$.

Represente graficamente num gráfico só:

a) A

b) $(A+\vec{v})+\vec{w}$

c) $(A+\vec{w})+\vec{v}$

d) $(A+2\vec{v})+4\vec{w}$

e) $(A+4\vec{w})+2\vec{v}$

f) $(A-\vec{v})+\vec{w}$

g) $(A+\vec{w})-\vec{v}$

h) $(A-2\vec{v})+4\vec{w}$

i) $(A+4\vec{w})-2\vec{v}$

Exercício 4: desenhando parábolas (quase) no olhômetro, 4

4) Sejam $A = (2, 6)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1, 1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(2, -1)}$.

Represente graficamente num gráfico só:

a) A

b) $(A + \vec{v}) + \vec{w}$

c) $(A + \vec{w}) + \vec{v}$

d) $(A + 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

e) $(A + 4\vec{w}) + 2\vec{v}$

f) $(A - \vec{v}) + \vec{w}$

g) $(A + \vec{w}) - \vec{v}$

h) $(A - 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

i) $(A + 4\vec{w}) - 2\vec{v}$

Obs: você vai precisar de um gráfico que contenha os pontos (0,0) e (12,8).

Introdução (2022.2)

Sobre a aula 1
Na aula 1 nós usamos as idéias dos 8 primeiros slides daqui,

3dT2 Aulas 4 e 5: introdução ao curso

e do slide 10 daqui,

3bT93 ...usam um caso particular disfarçado

...pra desenhar casos particulares das figuras das seções 7.4 e 7.5 do "GA1" do Felipe Acker:

AckerGA1p43 (p.27) 7.4 Soma de vetores

Introdução ao vetor velocidade
Em cursos de Cálculo 3 "pra matemáticos" a gente normalmente começa definindo o vetor velocidade como um limite. O Felipe Acker faz isso muito bem nos capítulos 2 e 3 do "GA4",

AckerGA4p21 (p.13) Capítulo 2: Velocidade
AckerGA4p27 (p.19) Capítulo 3: Aceleração

Eu costumava fazer mais ou menos isso no curso de Cálculo 3, e a gente gastava uma aula inteira aprendendo a decifrar a fórmula daquele limite e visualizar o que ela queria dizer.

Dessa vez vamos tentar fazer algo diferente. Vamos começar com exemplos e animações. Assista este vídeo aqui até o 9:00,

3dT25 Aula 7: um vídeo sobre curvas de Bézier
`https://www.youtube.com/watch?v=aVwxzDHniEw`

...mas considere que tudo no vídeo até o 6:34 são idéias avançadas que a gente só vai entender nuns exercícios que a gente vai fazer daqui a algumas aulas. Por enquanto reserve praticamente toda a sua atenção pro trecho entre 6:34 e 9:00, que é o trecho que a Freya Holmér mostra os vetores velocidade e aceleração pra algumas curvas de Bézier.

A gente vai fazer o seguinte. Nós vamos acreditar que *em geral* quando temos uma trajetória $P(t) = (x(t), y(t))$ o vetor velocidade dessa trajetória é $P'(t) = (x'(t), y'(t))$. Nós vamos ver vários exemplos disso, e vamos deixar pra entender os detalhes desse "em geral" quando formos entender a definição "pra matemáticos" do vetor velocidade.

Exercício 5: Traço

Comece entendendo a definição de traço de uma curva parametrizada do Bortolossi:
Bort6p2 (p.188) Definição 6.1
Agora sejam:

$$\begin{array}{rcl} P(t) & = & (4,0) + t\overrightarrow{(0,1)}, \\ Q(u) & = & (0,3) + u\overrightarrow{(2,0)}. \end{array}$$

Exercício 5
a) Represente num gráfico só o traço de $P(t)$ e o de $Q(u)$.

b) Marque o ponto $P(0)$ e escreva '$t = 0$' do lado dele.

c) Faça o mesmo para os pontos $P(1)$ ('$t = 1$') e $Q(0)$ e $Q(1)$ ('$u = 0$' e '$u = 1$').

d) Seja r o traço de $P(t)$ e s o traço de $Q(u)$.
Seja X o ponto de interseção de r e s.
Quais são as coordenadas de X?

e) Cada ponto de r está "associado" a um valor de t e cada ponto de s a um valor de u. Quais são os valores de t e u associados ao ponto X? Chame-os de t_0 e u_0 e indique-os no seu gráfico – por exemplo, se $t_0 = 99$ e $u_0 = 200$ você vai escrever '$t = 99$' e '$u = 200$' do lado do ponto X. Note que "$t_0 = 99$" e "t_{99}" são coisas totalmente diferentes!

Dica:
MpgP17

Agora releia as dicas 1, 2 e 7 daqui:
2gT4 "Releia a dica 7"
e entenda a notação de "set comprehensions" daqui:
MpgP8 "Set comprehensions"

Se você aprender a definir os seus objetos em linguagem matemática você vai conseguir aprender (e fazer!) muitas coisas do curso MUITO mais rápido, e vai ter muito mais facilidade pra escrever elas de um jeito legível. Então:

Exercício 5 (cont.)
f) No item (d) a gente definiu r, s e X usando muitas palavras em português. Dá pra definir r, s e X com bem menos português se a gente usar a notação de "set comprehensions". Aprenda a usar essa notação e complete as lacunas abaixo:

Sejam:

$$\begin{array}{rcl} P(t) & = & (4,0) + t\overrightarrow{(0,1)}, \\ Q(u) & = & (0,3) + u\overrightarrow{(2,0)}. \\ r & = & \{ \underline{\hspace{2em}} \mid \underline{\hspace{2em}} \}, \\ s & = & \{ \underline{\hspace{2em}} \mid \underline{\hspace{2em}} \}, \\ X & = & r \cap s \end{array}$$

Exercício 6: um círculo

Seja:

$$P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t).$$

Exercício 6.
Represente num gráfico só:

a) o traço de $P(t)$,

b) $P(\frac{\pi}{2}) + P'(\frac{\pi}{2})$, escrevendo '$P(\frac{\pi}{2})$' ao lado do ponto e '$P'(\frac{\pi}{2})$' ao lado da seta,

c) Idem para estes outros valores de t: $0, \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \pi$.

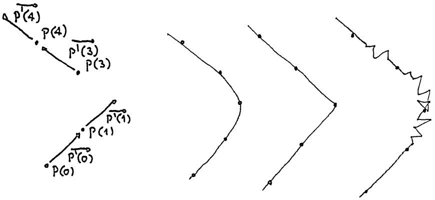
d) Seja $Q(u) = P(\pi) + uP'(\pi)$. Desenhe o traço de $Q(u)$ e anote '$Q(0)$' e '$Q(1)$' nos pontos adequados.

e) O traço de $Q(u)$ é uma reta tangente ao traço de $P(t)$ no ponto $P(\pi)$? Encontre no livro ou no resto da internet uma definição formal de reta tangente e descubra se isto é verdade ou não.

Sobre "adivinhar trajetórias"

Nos próximos dois exercícios nós vamos *começar* a fazer uma coisa que vai ser muito comum aqui nesse curso de Cálculo 3, e que geralmente é inadmissível nos cursos de Cálculo 1: nós vamos tentar "advinhar" como certas trajetórias são a partir de umas poucas informações sobre elas.

Esse "adivinhar" na verdade é "fazer hipóteses razoáveis", e às vezes a gente precisa de mais informações pra descobrir qual hipótese é mais razoável. Na figura do próximo slide eu desenhei à esquerda $P(t) + P'(t)$ para a trajetória de um personagem de videogame em $t = 0, 1, 3, 4,$ mas existem muitas trajetórias que se passam por esses pontos com essas velocidades. Na primeira figura à direita eu desenhei uma trajetória de uma nave no espaço; na segunda eu desenhei a trajetória de um personagem de um videogame do meu tempo — naquela época nada nos videogames obedecia as leis da Física, e nos meus jogos preferidos o meu personagem era um quadradinho — e na terceira o personagem é atingido por um raio em $t = 1.05$ e ele adquire superpoderes.



Exercícios 7 e 8: Lissajous

Os exercícios desta página vão dar curvas de Lissajous, como as daqui:
https://en.wikipedia.org/wiki/Lissajous_curve

Exercício 7
Seja $P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} 2t)$.
Represente graficamente $P(t) + P'(t)$ para os seguintes valores de t:
$0, \frac{1}{4}\pi, \frac{2}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \ldots, 2\pi$.
Faça as anotações adequadas nos seu pontos e vetores pra lembrar qual é o t associado a cada um.

Tente usar as informações deste gráfico pra desenhar o traço de $P(t)$. Isto não é nada óbvio – se inspire nas figuras das páginas 208 e 209 do capítulo 6 do Bortolossi e tente conseguir uma hipótese razoável.

Você pode pensar que $P(t)$ é a posição do Super Mario Kart no instante t e $P'(t)$ é o *vetor velocidade* dele no instante t (lembre que um vetor tem "direção", "orientação" e "módulo"!)... você só sabe a posição e a velocidade dele em alguns instantes, isto é, em alguns valores de t, e você vai ter que encontrar uma aproximação razoável, olhométrica, pra pista onde ele está correndo.

Exercício 8
Seja $P(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} t)$.
Represente graficamente $P(t) + P'(t)$ para os seguintes valores de t:
$0, \frac{1}{4}\pi, \frac{2}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \ldots, 2\pi$.
Faça as anotações adequadas nos seu pontos e vetores pra lembrar qual é o t associado a cada um.

Tente usar as informações deste gráfico pra desenhar o traço de $P(t)$. Isto não é nada óbvio – se inspire nas figuras das páginas 208 e 209 do capítulo 6 do Bortolossi e tente conseguir uma hipótese razoável.

Links:
Bort6p22 Bortolossi, cap.6, p.208
Bort6p23 Bortolossi, cap.6, p.209

Exercício 9: órbita

Este exercício vai dar uma figura que é a órbita de uma lua.
O resultado vai ser algo como a figura da última página daqui,

http://anggtwu.net/LATEX/2022-1-C3-orbita.pdf

mas olhe pra essa figura durante só uns poucos segundos.

Neste exercício você vai tentar redescobrir essa figura sozinho, e você vai tentar descobrir como desenhar uma aproximação bem razoável pra ela só somando uns vetores no olhômetro e sem fazer nenhuma conta complicada — por exemplo, você vai evitar usar uma aproximação numérica pra $(\cos(\frac{1}{12} \cdot 2\pi), \operatorname{sen}(\frac{1}{12} \cdot 2\pi))$; ao invés disso você vai usar a representação gráfica deste ponto no $\mathbb{R}^2$.

Seja $h = \frac{1}{12} \cdot 2\pi$.
Esse h vai ser uma "hora". Vou explicar isso no quadro.
Sejam:

$$\begin{array}{rcl} P(t) & = & (\cos t, \operatorname{sen} t), \\ Q(t) & = & (\cos 4t, \operatorname{sen} 4t), \\ R(t) & = & \frac{1}{2}(\cos 4t, \operatorname{sen} 4t) = (\frac{1}{2}\cos 4t, \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4t), \\ S(t) & = & P(t) + R(t). \end{array}$$

Exercício 9.
Represente graficamente:

a) $P(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.
b) $P(t) + P'(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.

c) $Q(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.
d) $Q(t) + Q'(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.

e) $R(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.
f) $R(t) + R'(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.

g) $S(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.
h) $S(t) + S'(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.

(Continua...)

Exercício 9: órbita (cont.)

Nos itens a até f você deve ter obtido pontos sobre círculos e vetores tangentes aos círculos apoiados nestes pontos. Nos itens g e h você deve ter obtido algo bem mais complicado: pontos e vetores apoiados nestes pontos, mas você ainda não sabe direito sobre que curva eles estão.

Reveja o trecho entre 6:34 e 9:00 do vídeo da Freya Holmér. A trajetória que ela analisa é bem "suave", no sentido de que ela não bicos ou teleportes, e a derivada da aceleração dela é constante. No item h você obteve alguns pontos e vetores velocidade *de uma trajetória que você não sabe direito qual é...* você só tem uma lembrança vaga do "traço" dessa trajetória, porque você viu a figura-spoiler durante uns poucos segundos.

i) Desenhe uma trajetória bem suave que nos instantes $t = 0h$, $1h$, $\ldots$, $12h$ passe pelos pontos que você obteve no item g. Aqui você vai conseguir uma aproximação bem tosca pro "traço" da trajetória $S(t)$.

j) Desenhe uma trajetória bem suave que nos instantes $t = 0h$, $1h$, $\ldots$, $12h$ passe pelos pontos que você obteve no item h, e que naqueles instantes tenha exatamente os vetores velocidade que você também desenhou no item h. Aqui você provavelmente vai conseguir uma aproximação bastante boa pro "traço" da trajetória $S(t)$.

k) Refaça o desenho do item j pra ele ficar mais caprichado e simétrico e tal. Quando você achar que conseguiu fazer uma versão caprichada boa olhe de novo a figura-spoiler e compare o seu desenho com ela.

Exercícios 10 e 11: bico e teleporte

Exercício 10: uma trajetória com um bico
Dê uma olhada no item 1e daqui:

3eT70 VS extra de 2022.1 - questão 1

Faça o que essa questão pede e represente graficamente $Q(t) + Q'(t)$ pra um monte de outros valores de t também — até você entender como essa trajetória se comporta. *Dica:* ela é um movimento retilíneo uniforme até um determinado instante, aí ela muda de vetor velocidade subitamente e vira um outro movimento retilíneo uniforme.

Exercício 11: um trajetória com teleporte
Represente graficamente a trajetória abaixo. Ela é parecida com a anterior, mas nessa tem um momento em que a partícula desaparece do ponto em que em estava e se teleporta pra outro lugar.

$$R(t) = \begin{cases} (t, 4) & \text{quando } t \leq 6, \\ (5, 11 - t) & \text{quando } 6 < t. \end{cases}$$

Dicas pro exercícios 10 e 11
Este vídeo aqui tem algumas figuras sobre como desenhar trajetórias:

`http://www.youtube.com/watch?v=3yWLubqHsic`
`http://anggtwu.net/eev-videos/2020.2-C3-intro.mp4`

Quase todo mundo achou muito difícil desenhar a trajetória do exercício 11 — se a gente calcula $R(t)$ só pra valores inteiros de t a gente não consegue descobrir como a $R(t)$ se comporta entre $t = 6$ e $t = 7$...

Um jeito de resolver isso é calcular $R(t)$ para $t = 6.1$, $t = 6.2$, ..., $t = 6.9$, desenhar esses pontos no gráfico, e aí tentar descobrir qual é o comportamento da $R(t)$ pra todos os valores em $[6, 7]$.

Um outro jeito é considerar que $R(t) = (x(t), y(t))$ e tentar entender as funções $x(t)$ e $y(t)$, que são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Cálculo 3 - 2024.2

Aulas ?? a ??: "notação de físicos"

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2024.2-C3.html

Links

3hQ26 Quadros da aula 10 (29/set/2023)

3fT118 (2022.2) P2, questão 2
3fT121 (2022.2) P2, questão 2, dicas
3fT122 (2022.2) P2, questão 2, gabarito

StewPtCap1p5 (p.10) variável dependente
StewPtCap3p35 (p.188) 3.5 derivação implícita
StewPtCap3p75 (p.226) 3.10 Aproximações Lineares e Diferenciais
StewPtCap3p75 (p.228) Diferenciais
StewPtCap5p48 (p.369) [4] Regra da substituição (MVI)
StewPtCap5p51 (p.372) [6] Regra da substituição (MVD)
StewPtCap11p61 (p.679) 11.10 Séries de Taylor e Maclaurin
StewPtCap14p25 (p.811) 14.3 Derivadas Parciais
StewPtCap14p47 (p.833) [4] A regra da cadeia (versão geral)
Leit4p61 (p.275) Leithold: regras para a notação de Leibniz
ThompsonP77 (p.66) IX. Introducing a useful dodge
ThompsonP183 (p.172) XVI. Partial differentiation

BortCalc1pt01p44 (p.44) Humberto Bortolossi - funções
BortCalc1pt13p9 (p.9) Humberto Bortolossi - regra da cadeia

BauerDawnP20 Elaboration in proof assistants

Total differentials and the chain rule (vídeo do MIT):
`http://www.youtube.com/watch?v=2bF6H_xu0ao`

Derivação implícita

$$
\begin{array}{rcl}
y = y(x) & = & f(x) \\
y_x = y_x(x) & = & f'(x) \\
\frac{d}{dx}(y^3) & = & \frac{d}{dx}(f(x)^3) \\
 & = & 3f(x)^2 f'(x) \\
 & = & 3y^2 y_x
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
x^3 + y^3 & = & 6xy \\
\frac{d}{dx}(x^3 + y^3) & = & \frac{d}{dx}(6xy) \\
\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) & = & 6y + 6y_x \\
\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) & = & 6y + 6y_x \\
3x^2 + 3y^2 y_x & = & 6y + 6y_x \\
x^2 + y^2 y_x & = & 2y + 2y_x \\
y^2 y_x - 2y_x & = & 2y - x^2 \\
(y^2 - 2) y_x & = & 2y - x^2 \\
y_x & = & \frac{2y - x^2}{y^2 - 2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
x^3 + y^3 & = & 6xy \\
d(x^3 + y^3) & = & d(6xy) \\
d(x^3) + d(y^3) & = & 6y\,dx + 6x\,dy \\
3x^2 dx + 3y^2 dy & = & 6y\,dx + 6x\,dy \\
x^2 dx + y^2 dy & = & 2y\,dx + 2x\,dy \\
y^2 dy - 2x\,dy & = & 2y\,dx - x^2 dx \\
(y^2 - 2x) dy & = & (2y - x^2) dx \\
\frac{dy}{dx} & = & \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
x^3 + f(x)^3 & = & 6xf(x) \\
\frac{d}{dx}(x^3 + f(x)^3) & = & \frac{d}{dx}(6xf(x)) \\
\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(f(x)^3) & = & 6f(x) + 6f'(x) \\
\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(f(x)^3) & = & 6f(x) + 6f'(x) \\
3x^2 + 3f(x)^2 f'(x) & = & 6f(x) + 6f'(x) \\
x^2 + f(x)^2 f'(x) & = & 2f(x) + 2f'(x) \\
f(x)^2 f'(x) - 2f'(x) & = & 2f(x) - x^2 \\
(f(x)^2 - 2) f'(x) & = & 2f(x) - x^2 \\
f'(x) & = & \frac{2f(x) - x^2}{f(x)^2 - 2}
\end{array}
$$

(2) Let x represent, in Fig. 5, the horizontal distance, from a wall, of the bottom end of a ladder, AB, of fixed length; and let y be the

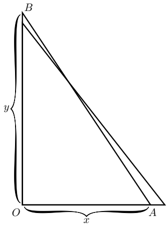


Fig. 5.

height it reaches up the wall. Now y clearly depends on x. It is easy to see that, if we pull the bottom end A a bit further from the wall, the top end B will come down a little lower. Let us state this in scientific language. If we increase x to $x + dx$, then y will become $y - dy$; that is, when x receives a positive increment, the increment which results to y is negative.

Yes, but how much? Suppose the ladder was so long that when the bottom end A was 19 inches from the wall the top end B reached just 15 feet from the ground. Now, if you were to pull the bottom end out 1 inch more, how much would the top end come down? Put it all into inches: $x = 19$ inches, $y = 180$ inches. Now the increment of x which we call dx, is 1 inch: or $x + dx = 20$ inches.

How much will y be diminished? The new height will be $y - dy$. If we work out the height by Euclid I. 47, then we shall be able to find how much dy will be. The length of the ladder is

$$\sqrt{(180)^2 + (19)^2} = 181 \text{ inches.}$$

Clearly then, the new height, which is $y - dy$, will be such that

$$\begin{aligned}(y - dy)^2 &= (181)^2 - (20)^2 = 32761 - 400 = 32361,\\ y - dy &= \sqrt{32361} = 179.89 \text{ inches.}\end{aligned}$$

Now y is 180, so that dy is $180 - 179.89 = 0.11$ inch.

So we see that making dx an increase of 1 inch has resulted in making dy a decrease of 0.11 inch.

And the ratio of dy to dx may be stated thus:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{0.11}{1}.$$

It is also easy to see that (except in one particular position) dy will be of a different size from dx.

Now right through the differential calculus we are hunting, hunting, hunting for a curious thing, a mere ratio, namely, the proportion which dy bears to dx when both of them are indefinitely small.

It should be noted here that we can only find this ratio $\dfrac{dy}{dx}$ when y and x are related to each other in some way, so that whenever x varies y does vary also. For instance, in the first example just taken, if the base x of the triangle be made longer, the height y of the triangle becomes greater also, and in the second example, if the distance x of the foot of the ladder from the wall be made to increase, the height y

Exercício 1.

As contas à direita são uma versão um pouco modernizada das contas das páginas 11 e 12 do livro do Thompson. Repare que estamos usando x_0 e y_0 pros valores "antes" e 'x_1 e y_1 pros valores "depois", e isso nos permite mencionar nas mesmas contas os valores de "antes" e de "depois" — o Thompson precisa mantê-los em blocos de contas separados, e precisa de explicações em inglês pra dizer o que é o quê.

a) Numere as linhas das páginas 11 e 12 do Thompson e escreva ao lado de cada igualdade à direita a que linha do Thompson ela corresponde.

b) Faça uma versão da Fig.5 do Thompson que tenha proporções (um pouco) mais coerentes com os dados das contas dele, e que indique quais distâncias são x_0, x_1, y_0 e y_1. Faça tudo no olhômetro - não use régua.

c) Nas minhas contas eu usei o símbolo ℓ pro comprimento da escada ("length"). Represente graficamente o círculo

$$\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2}=\ell\,\}$$

e represente os pontos (x_0,y_0) e (x_1,y_1) nele. Faça tudo à mão sem régua, mas incluindo informações suficientes pro leitor entender o seu gráfico.

d) O $\frac{dy}{dx}$ do Thompson corresponde à derivada de qual função, em que ponto? Diga que função é essa, calcule a derivada dela, calcule na calculadora o valor da derivada dela no ponto certo, e compare o seu resultado com o valor do Thompson.

$$\sqrt{x_0^2+y_0^2}=\ell$$
$$x_0^2+y_0^2=\ell^2$$
$$x_1^2+y_1^2=\ell^2$$
$$(x_0+dx)^2+(y_0-dy)^2=\ell^2$$
$$(y_0-dy)^2=\ell^2-x_1^2$$
$$y_0-dy=\sqrt{\ell^2-x_1^2}$$
$$=\sqrt{181^2-20^2}$$
$$=\sqrt{32761-400}$$
$$=\sqrt{32361}$$
$$\approx 179.89$$
$$180-dy=179.89$$
$$180-179.89=dy$$
$$dy=0.11$$
$$dx=1$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{0.11}{1}=0.11$$

Exercício 2.

Leia a seção 4.7 do livro do Daniel Miranda:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=117

Os livros mais modernos:
i) distinguem dx e Δx,
ii) escrevem $y = f(x)$ ao invés de $y = y(x)$,
iii) evitam a convenção $x_1 = x_0 + \Delta x$.

a) Traduza o início da seção 4.7 do Miranda - até o fim da página 118 - pra notação do Thompson. Dicas:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \approx & f(p) + f'(p)(x-p) \\ L(x) & = & f(p) + f'(p)(x-p) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} f(x_1) & \approx & f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \\ L(x_1) & = & f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \end{array}$$

e a função L é exatamente a série de Taylor da função f truncada até grau 1... lembre que nós quase só vimos séries de Taylor no caso em que x_0 era 0, mas ficamos de ver depois o caso em que o "ponto base" não precisava mais ser 0...

Alguns truques de tradução

Truque 1: quando a gente escreve fórmulas "com o mesmo formato" perto uma da outra o leitor tende a ler a segunda ou como uma tradução da primeira pra outra notação ou como um caso particular da primeira...

Isto aqui é uma tradução de duas das fórmulas da p.117 do D. Miranda pra "notação de físicos":

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \approx & f(p)+f'(p)(x-p) \\ L(x) & = & f(p)+f'(p)(x-p) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} f(x_1) & \approx & f(x_0)+f'(x_0)\Delta x \\ L(x_1) & = & f(x_0)+f'(x_0)\Delta x \end{array}$$

E isto aqui é um caso particular da primeira fórmula:

$$f(4.02) \approx f(4)+f'(4)(4.02-4) \qquad (*)$$

Repare que a fórmula $(*)$ fica mais clara se escrevermos isto explicitamente:

$$x_1 = 4.02 \qquad x_0 = 4$$

...e repare que se a gente tentar escrever isto aqui direto

$$\sqrt{4.02} \approx \sqrt{4}+\sqrt{4}'(4.02-4)$$

fica confuso e péssimo — não existe uma notação padrão pra derivada de $\sqrt{x}$ em $x=4$!!! Aqui a gente TEM que usar um truque novo — a gente tem que dar um nome pra função $\sqrt{x}$. Por exemplo...

Alguns truques de tradução (2)

Seja $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$.
Então $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, e

$$\begin{array}{rrcl} & f(4.02) & \approx & f(4) + f'(4)(4.02-4) \\ \Rightarrow & \sqrt{4.02} & \approx & \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4.02-4) \end{array}$$

Repare que acima eu só fiz as subtituições $f(x) := \sqrt{x}$ e $f'(x) := \frac{1}{2\sqrt{x}}$ — eu acho que as contas mais mais fáceis de entender se a gente fizer as substituições e as simplificações em passos separados:

$$\begin{array}{rrcl} & f(4.02) & \approx & f(4) + f'(4)(4.02-4) \\ \Rightarrow & \sqrt{4.02} & \approx & \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4.02-4) \\ & & = & 2 + \frac{1}{4}(0.02) \\ & & = & 2 + 0.005 \\ & & = & 2.005 \\ & \sqrt{4.02} & = & 2.004993765576342\ldots \end{array}$$

A última linha acima tem um '$=$' ao invés de um '$\approx$', e eu calculei o resultado dela com a calculadora.

O exemplo 4.4 da página 120

$$\begin{array}{rcl}
V(x) & = & \frac{\pi}{3}(30x^2 - x^3) \\
V'(x) & = & \frac{\pi}{3}(60x - 3x^2) = \pi(20x - x^2) \\
V(x_1) & \approx & V(x_0) + V'(x_0)(x_1 - x_0) \\
V(x_1) - V(x_0) & \approx & V'(x_0)(x_1 - x_0) \\
V(x^*) - V(5) & \approx & V'(5)(x^* - 5)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
V(5) & = & \frac{\pi}{3}(30 \cdot 5^2 - 5^3) \\
 & = & \frac{\pi}{3}625 \\
V'(5) & = & \pi(20 \cdot 5 - 5^2) \\
 & = & 75\pi
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
V(x^*) - V(5) & \approx & V'(5)(x^* - 5) \\
\Delta V & \approx & V'(5)\Delta x \\
 & = & 75\pi\Delta x
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
V(x^*) - V(5) & \approx & V'(5)(x^* - 5) \\
V(x^*) & \approx & V(5) + V'(5)(x^* - 5) \\
 & = & \frac{\pi}{3}625 + 75\pi\Delta x
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl}
 & \Delta x & = & 0.1 \\
\Rightarrow & V(x^*) & = & \frac{\pi}{3}625 + 75\pi \cdot 0.1 \\
 & & = & \frac{\pi}{3}625 + 75\pi \cdot 0.1 \\
 & & \approx & 654.5 + 23.56
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl}
 & \Delta x & = & \pm 0.1 \\
\Rightarrow & V(x^*) & = & \frac{\pi}{3}625 \pm 75\pi \cdot 0.1 \\
 & & = & \frac{\pi}{3}625 \pm 75\pi \cdot 0.1 \\
 & & \approx & 654.5 \pm 23.56 \\
 & V(x^*) & \in & [654.5 - 23.56, 654.5 + 23.56]
\end{array}$$

O exemplo 4.4 da página 120 (2)

No exemplo 4.4 o D. Miranda faz as contas o mais rápido possível — porque ele quer que os leitores passem meia hora reescrevendo as contas e checando os detalhes — e ele usa um monte de truques de físicos... por exemplo, ele fala em “erro de medida” e usa o ‘$\pm$’ no sentido que os físicos costumam usar: pra matemáticos a frase “as soluções de $(x-17)(x+23)=0$ são da forma $x=20\pm 3$” quer dizer que $x=20-3$ ou $x=20+3$, mas pra físicos “$x=20\pm 3$” quer dizer $x\in[20-3,20+3]$...

Tem um monte de pessoas na turma que não fizeram Física.

Na página anterior eu escrevi as contas do exemplo 4.4 tentando fazer com que elas ficassem bem fáceis de verificar por pessoas que não fizeram Física. Eu fiz as contas com simplificações, como $V'(5)=75\pi$, bem passo a passo, e deixei as contas com aproximações, como $75\pi\cdot 0.1\approx 23.56$, pro final; além disso eu repeti algumas linhas, como a que diz

$$V(x^*)-V(5)\approx V'(5)(x^*-5)$$

várias vezes, e ao invés de tentar ver direto quais eram as consequências de $\Delta x=\pm 0.1$ eu comecei vendo as consequências de $\Delta x=0.1$ e só depois passei pra $\Delta x=\pm 0.1$... as contas com $\Delta x=\pm 0.1$ são parecidas com as pra $\Delta x=0.1$, mas com alguns detalhes complicados novos.

Exercício 3.
Faça as contas do Exemplo 4.5 do D. Miranda — o que é sobre uma esfera — de um jeito parecido com o que eu usei nas contas do Exemplo 4.4 — que era sobre uma tigela...

Faça tudo BEM passo a passo e deixe os truques "de físicos" pros passos finais das contas.

Exercício 4.
Faça a mesma coisa pro Exemplo 4.6.

“dy is always a dependent variable”
Agora vamos ver como vários livros
lidam com esta idéia aqui:

$$\frac{dy}{dx}dx = dy$$

Repare que temos $\frac{dy}{dx}\Delta x \approx \Delta y$ mas $\frac{dy}{dx}dx = dy$.
O livro do Thomas explica isso bem melhor que o
livro do D. Miranda. Leia a definição de diferenciais
na p.225 do Thomas e entenda os exemplos 4 e 5
das páginas 225 e 227 dele:
`http://angg.twu.net/2022.1-C3/thomas_secoes_3.7_e_3.8.pdf`

O truque das variáveis novas

No capítulo VI o Thompson calcula $\frac{d}{dx}((x^2+c)+(ax^4+b))$ organizando as contas mais ou menos desta forma:

$$\begin{array}{rcl} y &=& (x^2+c)+(ax^4+b) \\ \frac{dy}{dx} &=& \frac{d((x^2+c)+(ax^4+b))}{dx} \\ &=& \frac{d(x^2+c)}{dx}+\frac{d(ax^4+b)}{dx} \\ &=& 2x+4ax^3 \end{array}$$

No capítulo IX – "Introducing a useful dodge" –
o Thompson mostra como a gente pode simplificar contas
como essa introduzindo "variáveis dependentes" novas.

Exercício 5.
Entenda os exemplos (1)–(4) das páginas 66–68 do Thompson.

Exercício 6.
Faça os exercícios (1)–(4) da página 72 do Thompson.

Links:
`https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=45`
`https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=83`

Derivadas parciais no Thompson
Leia o início do capítulo XVI do Thompson —
"XVI. Partial Differentiation" — da p.172 até p.174.
Entenda os exemplos (1) até (3) dele.

Exercício 7.
Faça os exercícios (1)–(5) das páginas 177 e 178 do Thompson.
Obs: o (6) precisa de gráficos 3D, vamos fazer ele depois.

Exercício 8.
Digamos que $F(x,y) = x^3y^4$, $g(t) = \operatorname{sen} t$, $h(t) = e^{2t}$.
Vamos usar esta notação aqui: $F_x = \frac{\partial}{\partial x}F$, $g_t = \frac{d}{dt}g$, etc.
a) Calcule $\frac{d}{dt}F(g(t), h(t))$ usando "notação de matemáticos".
b) Digamos que $x = g(t)$, $y = h(t)$, $z = F(x,y)$.
Calcule $\frac{d}{dt}z$ usando "notação de físicos".

Derivadas parciais e derivadas totais
Digamos que $z = z(x, y)$ e $y = y(x)$.

Vamos começar com um caso bem concreto — um que eu usei em EDOs com variáveis separáveis em C2... link:
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-edovs.pdf

O nosso caso bem concreto vai ser:
$z = z(x, y) = x^2 + y^2$,
$y = y(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
quando nós só consideramos o $z = z(x, y) = x^2 + y^2$
as derivadas parciais de z são $z_x = 2x$ e $z_y = 2y$,
mas quando também consideramos o $y = y(x) = \sqrt{1 - x^2}$
aí temos $z = z(x, y(x)) = x^2 + \sqrt{1 - x^2}^2 = 1$, e $\frac{dz}{dx} = 0$.

Esta derivada $\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx} z(x, y(x))$ é chamada de derivada total de z com relação a y.

Exercício 9.
Digamos que $z = z(x,y) = (x+2)(y+3)$
e que $y = y(x) = \operatorname{sen} x$.
a) Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.
b) Calcule $\frac{dz}{dx}$.
c) Calcule $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}z$.

Convenção: quando uma expressão como z_x puder
ser interpretada tanto como uma derivada parcial quanto
como uma derivada total o default é interpretá-la
como derivada parcial.

Exercício 10.
Digamos que $z = z(x, y)$ e $y = y(x)$.
(Isto é uma versão mais geral do exercício 9).
a) Calcule $\frac{d}{dx}z$.
b) Calcule $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}z$.

Dica: siga as dicas dos próximos dois slides,
e escreva as suas contas em várias notações
diferentes "em paralelo".

Dicas pro exercício 10

Compare:

$$[\mathsf{A1}] \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} f(g(h(x))) \\ = f'(g(h(x)))\frac{d}{dx} g(h(x)) \\ = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x) \end{pmatrix}$$

$$[\mathsf{A2}] \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} \operatorname{sen}(\cos(\tan(x))) \\ = \operatorname{sen}'(\cos(\tan(x)))\frac{d}{dx} \cos(\tan(x)) \\ = \operatorname{sen}'(\cos(\tan(x)))\cos'(\tan(x))\tan'(x) \end{pmatrix}$$

$$[\mathsf{A3}] \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} w(z(y(x))) \\ = w'(z(y(x)))\frac{d}{dx} z(y(x)) \\ = w'(z(z(x)))z'(y(x))y'(x) \end{pmatrix}$$

$$[\mathsf{A4}] \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} w(z(y(x))) \\ = w_z(z(y(x)))\frac{d}{dx} z(y(x)) \\ = w_z(z(z(x)))z_y(y(x))y_x(x) \end{pmatrix}$$

$$[\mathsf{A5}] \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} w \\ = w_z \frac{d}{dx} z \\ = w_z z_y y_x \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} y = y(x) \\ z = z(y) = z(y(x)) \\ w = w(z) = w(z(y)) = w(z(y(z))) \end{array}$$

Dicas pro exercício 10 (cont.)

O [A1] é a versão em "notação de matemáticos".
O [A1] é a versão mais geral.
O [A2] é um caso particular do [A1].
O [A3] é uma "versão renomeada" do [A1].
O [A4] é uma "versão abreviada" do [A3].

Toda vez que a gente tiver dúvidas sobre como fazer contas
numa notação como a do [A5] a gente vai expandir ele pra notação do [A4], depois renomear as funções "que têm nomes de variáveis", como $y(x) \rightsquigarrow f(x)$, depois fazer as contas na "notação de matemáticos", e depois voltar pra "notação de físicos"...

Ou seja: se $y = y(x)$, $z = z(y)$ e $w = w(z)$,

$$\begin{array}{rl} & \frac{d}{dx} w = ? \\ \rightsquigarrow & \frac{d}{dx} w(z(y(x))) = ? \\ \rightsquigarrow & \frac{d}{dx} h(g(f(x))) = ? \end{array}$$

e a gente tem que escrever os nomes novos...por exemplo:

$$\begin{array}{l} y = y(x) = h(x), \\ z = z(y) = g(y), \\ w = w(z) = f(z) \end{array}$$

e aí a gente calcula $\frac{d}{dx} h(g(f(x)))$ e depois traduz as contas de volta pra "notação de físicos".

Lembre que eu nunca vi esse método de tradução explicado direito, então o que está aqui é uma *tentativa* de explicá-lo...

Ah, e se a gente se perder nas contas na notação do [A1] a gente pode tentar fazer um caso particular, como o [A2], e depois voltar pro [A1]...

Uma pirâmide

(A gente viu isto na aula de 2022may20.)

O objetivo desta aula e das próximas é fazer vocês aprenderem a olhar pra algo como isso aqui...

$$\begin{array}{ccccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&1&1&1&0&0\\
0&0&1&2&2&2&1&0&0\\
0&0&1&2&3&2&1&0&0\\
0&0&1&2&2&2&1&0&0\\
0&0&1&1&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}$$

...e verem uma pirâmide.

Uma pirâmide (2)

Note que isto é *muito* diferente da noção de função de Cálculo 1... não estamos dizendo o domínio da função $F(x, y)$ do slide anterior, não estamos dando uma fórmula pra ela, e só estamos dando o valor dela em alguns pontos...

A figura do slide anterior só define uma função se 1) a gente diz que ela representa a função mais simples possível que assume aqueles valores, 2) se todo mundo tem a mesma noção de "função mais simples possível", e 3) se não estamos num caso ambíguo.

Releia isto aqui, sobre "adivinhar trajetórias":

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-vetor-tangente.pdf#page=7

No diagrama de numerozinhos do slide anterior o leitor precisa "adivinhar" que a superfície $z = F(x, y)$ é feita de pedaços de planos.

Low Poly

Computadores preferem pensar que superfícies 3D são feitas de triângulos — veja o golfinho abaixo e a página da Wikipedia sobre "Low Poly"— mas humanos preferem imaginar que triângulos vizinhos que estão no mesmo plano em $\mathbb{R}^3$ são grudados e viram polígonos mais complicados... Além disso qualquer diagrama de numerozinhos pode ser triangulado de vários jeitos, e humanos costumam achar que a triangulação da pirâmide acima à direita é "mais natural" que a triangulação de baixo...

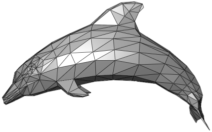
Assista o vídeo sobre "funções quadráticas" (a partir do 4:05) pra entender como nós vamos usar diagramas de numerozinhos pra superfícies que não precisam ser compostas de polígonos, e o vídeo sobre "cabos na diagonal" pra entender essa história das triangulações "mais naturais".

Links:

https://en.wikipedia.org/wiki/Low_poly

http://www.youtube.com/watch?v=2noSv8hyNIk
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas.mp4

http://www.youtube.com/watch?v=nxsIK0tPWAI
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-2-c3-cabos-na-diagonal.mp4



$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Regiões

No próximo exercício vamos considerar que o plano está divido nestas 5 regiões, que vamos chamar de N, W, E, S, e B — faces Norte, Oeste, Leste, Sul e “base”...

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Regiões (2)

As definições do $f_1, f_2, \ldots, f_5$ à direita definem a mesma função, e a definição do $f_5(x)$ é uma tradução "pra notação com '$\in$'s" da definição do $f_4(x)$...

Muitos matemáticos — e livros, como por exemplo os do Guidorizzi — consideram que as definições do $f_4(x)$ e do $f_5(x)$ são ruins porque as condições, ou "regiões", depois dos "quando"s não são disjuntas, e aí essas definições "só fazem sentido" se a gente mostrar que quando $x \in (-\infty, 2] \cap [2, 4]$ temos $2 = x$, e que quando $x \in [2, 4] \cap [4, -\infty)$ temos $x = 4$...

A definição $f_1(x)$ por um gráfico nos permite pular certos detalhes. É "óbvio" que ela corresponde a uma definição por casos com três casos diferentes, mas com a definição pelo gráfico a gente não precisa definir se o ponto $x = 2$ pertence à primeira região ou à segunda, e nem se o ponto $x = 4$ pertence à segunda região ou à terceira...

Dá pra gente definir a pirâmide do slide anterior "de um jeito que deixaria o Guidorizzi feliz" por uma definição por casos como a definição do $F_P(x)$ à direita, em que cada uma das funções F_B, F_N, F_W, F_E, F_S é um "plano", isto é, é da forma $a + bx + cy$, e os conjuntos B, N, W, E, S são descritos formalmente de jeitos como este aqui...

$$S \;=\; \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y,\; 1 \leq y,\; x + y \leq 8 \,\}$$

Dê uma olhada nos slides 6 e 7 daqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-infs-e-sups.pdf#page=6
Daqui a algumas aulas nós vamos fazer um monte de exercícios de traduzir entre notação de conjuntos e representações gráficas — nós vamos precisar disso pra entender conjuntos abertos em fechados em $\mathbb{R}^2$ — mas por enquanto nós vamos definir regiões do plano por figuras.

$f_1(x) \;=\;$ 

$$f_2(x) = \begin{cases} 2 & \text{quando } x < 2, \\ x & \text{quando } 2 \leq x \leq 4, \\ 4 & \text{quando } 4 < x \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 2 & \text{quando } x \leq 2, \\ x & \text{quando } 2 < x < 4, \\ 4 & \text{quando } 4 \leq x \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} 2 & \text{quando } x \leq 2, \\ x & \text{quando } 2 \leq x \leq 4, \\ 4 & \text{quando } 4 \leq x \end{cases}$$

$$f_5(x) = \begin{cases} 2 & \text{quando } x \in (-\infty, 2], \\ x & \text{quando } x \in [2, 4], \\ 4 & \text{quando } x \in [4, +\infty) \end{cases}$$

$$F_P(x) = \begin{cases} F_B(x, y) & \text{quando } (x, y) \in B, \\ F_N(x, y) & \text{quando } (x, y) \in N, \\ F_W(x, y) & \text{quando } (x, y) \in W, \\ F_E(x, y) & \text{quando } (x, y) \in E, \\ F_S(x, y) & \text{quando } (x, y) \in S, \end{cases}$$

Exercício 11.
Faça o diagrama de numerozinhos de cada uma das superfícies $z = F(x, y)$ abaixo. Desenhe os numerozinhos nos pontos com $x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ — ou seja, 25 numerozinhos em cada item.

a) $F(x, y) = 2x$
b) $F(x, y) = 3y$
c) $F(x, y) = 2x + 3y$
d) $F(x, y) = 10 + 2x + 3y$

Exercício 12.
Mostre que se $z = F(x, y)$ é um plano com equação $F(x, y) = a + bx + cy$ então isto aqui vale:

$$\forall (x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 .\ \Delta z = b\Delta x + c\Delta y.$$

Exercício 13.

A pirâmide dos slides anteriores pode ser descrita formalmente por uma definição por casos como esta aqui,

$$z \quad = \quad F_P(x) \quad = \quad \begin{cases} F_B(x,y) & \text{quando } (x,y) \in B, \\ F_N(x,y) & \text{quando } (x,y) \in N, \\ F_W(x,y) & \text{quando } (x,y) \in W, \\ F_E(x,y) & \text{quando } (x,y) \in E, \\ F_S(x,y) & \text{quando } (x,y) \in S, \end{cases}$$

onde cada um dos $F_R(x,y)$, onde R é B, N, E, W ou S, é uma equação de um plano — ou seja, é "da forma $a + bx + cy$". Descubra quais são estas equações de planos e escreva a sua resposta neste formato aqui, mas com os números certos:

$$\begin{aligned} F_B(x,y) &= 2 + 3x + 4y \\ F_N(x,y) &= 5 + 6x + 7y \\ F_W(x,y) &= 8 + 9x + 10y \\ F_E(x,y) &= 11 + 12x + 13y \\ F_S(x,y) &= 14 + 15x + 16y \end{aligned}$$

Exercício 14 (“barranco”).

No exemplo da pirâmide a gente começou com um diagrama de numerozinhos e aí encontrou um modo de dividir o plano em 5 regiões que fazia com que todos os numerozinhos numa mesma região ficassem no mesmo plano. Faça a mesma coisa com o diagrama de numerozinhos abaixo — você vai precisar de pelo menos 6 regiões.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\
4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\
3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\
2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

Exercício 15.

Lembre que em planos a fórmula da aproximação linear

$$\begin{array}{rcl} F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) & \approx & F(x_0,y_0) \\ & + & F_x(x_0,y_0)\Delta x \\ & + & F_y(x_0,y_0)\Delta y \end{array}$$

dá resultados exatos...

Seja $z = F(x,y)$ a função que dá a superfície da pirâmide da figura à direita. Descubra os valores de:

a) F(1.5, 3)	e) F(5.2, 2.3)
b) F(1.1, 3)	f) F(5.2, 1.9)
c) F(5.1, 3)	g) F(3.1, 2.1)
d) F(5.1, 2)	h) F(2.9, 1.9)

Tente fazer as contas de cabeça.
Se você se enrolar faça as contas todas explicitamente, e use os "truques de tradução" das páginas 6 e 7 pra fazer as contas da forma mais clara possível... depois esconda as suas contas e tente obter todos os resultados de novo de cabeça.

$$\begin{matrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&1&1&1&0&0 \\ 0&0&1&2&2&2&1&0&0 \\ 0&0&1&2&3&2&1&0&0 \\ 0&0&1&2&2&2&1&0&0 \\ 0&0&1&1&1&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{matrix}$$

Exercício 16.

Seja $z = F(x, y)$ a função que dá a superfície da pirâmide com duas faces extras da figura à direita. Descubra os valores de:

a) F(2.1, 2.1)
b) F(2.5, 2.5)
c) F(2.6, 2.6)

fazendo as contas de cabeça.

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	2	2	2	1	0	0
0	0	1	2	3	2	1	0	0
0	0	1	2	2	2	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

Derivada direcional (Bortolossi)

O Bortolossi define a derivada direcional deste jeito, na p.296 do capítulo 8 dele:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{p}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{p} + t \cdot \mathbf{v}) - f(\mathbf{p})}{t}$$

Digamos que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, que os argumentos da f se chamem x e y, que $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$, que o vetor $\mathbf{v}$ seja (α, β), e que $z = z(x, y) = f(x, y)$.

Exercício 17.
Seja $f(x, y) = z(x, y) = F(x, y)$, onde $F(x, y)$ é a pirâmide do exercício 15 (figura à direita).
Sejam $\mathbf{p} = (x_0, y_0) = (2, 3)$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{(\alpha, \beta)} = \overrightarrow{(2, 0)}$.
Calcule $\frac{f(\mathbf{p}+t\cdot\mathbf{v})-f(\mathbf{p})}{t}$ para os seguintes valores de t:

a) $t = 1$
b) $t = 2$
c) $t = 3$
d) $t = 1/2$
e) $t = 1/4$
f) $t = -1$
g) $t = -1/2$
h) $t = -1/4$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Exercício 18.
A partir do que você obteve no exercício 17, qual você acha que deve ser o valor de $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{(2,0)}}((2, 3))$?

Exercício 19.
...e o valor de $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{(1,0)}}((2, 3))$?

O gradiente

Obs: esse exercício aqui vai ser totalmente reescrito depois! Leia a definição de gradiente na página p.298 do capítulo 8 do Bortolossi. Tente entendê-la usando as dicas abaixo.

Se $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, então:

a) $\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = F_x(x_0, y_0)$,

b) $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial \overrightarrow{(1,0)}}(x_0, y_0)$,

c) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial \overrightarrow{(0,1)}}(x_0, y_0)$

d) $\nabla F = \overrightarrow{(F_x, F_y)}$

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	2	2	2	1	0	0
0	0	1	2	3	2	1	0	0
0	0	1	2	2	2	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	2	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	2	3	1	0	0	0
0	0	0	0	1	2	3	4	2	0	0	0
0	0	0	1	2	3	4	5	3	1	0	0
0	0	1	2	3	4	5	6	4	2	0	0
0	0	0	0	1	2	3	4	2	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	2	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Exercício 20.
a) Usando a F da pirâmide mais simples, calcule:
$\nabla F(2,4), \nabla F(4,2), \nabla F(6,4), \nabla F(4,6)$.

b) Represente graficamente $(x_0, y_0) + \nabla F(x_0, y_0)$ para estes valores de (x_0, y_0): $(2,4), (4,2), (6,4), (4,6)$.

c) Seja G a função da pirâmide torta do mini-teste.
Calcule: $\nabla G(5,3), \nabla G(8,3), \nabla G(8,6), \nabla G(5,6)$.

d) Represente graficamente $G(x,y) + \nabla G(x,y)$ para cada um dos 4 pontos do item (c).

Exercício 21.
Leia a definição de curvas de nível nas páginas 97 e 98 do capítulo 3 do Bortolossi.

a) Seja $F(x, y) = 2x + y$.

b) Faça o diagrama de numerozinhos da $F(x, y)$ para os pontos com $x, y \in \{0, 1, 2, 3\}$.

c) Desenhe quatro curvas de nível diferentes da $F(x, y)$ sobre o diagrama do item (b).

d) Represente graficamente $F + \nabla F$ para cada um destes 16 pontos do (b). Isto vai dar 16 vetores, cada um apoiado num dos numerozinhos.

Exercício 22.
Faça a mesma coisa que você fez no exercício 21, mas agora para $F(x,y) = 3x - 2y$.

Exercício 23.
Faça a mesma coisa que você fez nos exercício 21 e 22, mas agora para $F(x,y) = \frac{x^2+y^2}{10}$ e $x, y \in \{-2,-1,0,1,2\}$.

Exercício 24.
Faça a mesma coisa que você fez no exercício 23, mas agora para $F(x,y) = \frac{xy}{10}$.

Cálculo 3 - 2024.2

Aula 17: funções homogêneas

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2024.2-C3.html

Links

https://en.wikipedia.org/wiki/Homogeneous_polynomial
https://en.wikipedia.org/wiki/Homogeneous_function

Quadros:
3iQ36 (2024.1) 17/jul/2024
3hQ50 (2023.2) 25/out/2023
3fQ17 (2022.2) 04/nov/2022

Bort11p19 (p.383) 11.3 Formas quadráticas e matrizes definidas

StewPtCap14p64 (p.850) 14.7 Valores Máximo e Mínimo
StewPtCap14p65 (p.851) Teste da segunda derivada; $D(a, b)$

Primeiras definições

Sejam:

$$\begin{array}{rcl}[\mathrm{A}_k] &=& \big(f(\lambda x)=\lambda^k f(x)\big)\\ [\mathrm{B}_k] &=& \big(f(x_0+\lambda\Delta x)=\lambda^k f(x_0+\Delta x)\big)\end{array}$$

Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é *homogênea de grau k* – abreviação: h.d.g.k – quando ela obedece isto,

$$\begin{array}{l}\forall x,\lambda\in\mathbb{R}.\ f(\lambda x)=\lambda^k f(x)\\ \forall x,\lambda\in\mathbb{R}.\ [\mathrm{A}_k]\end{array}$$

onde a segunda linha é abreviação da primeira; e uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é *homogênea de grau k em x_0* – abreviação: h.d.g.k em x_0 – quando ela obedece esta condição,

$$\begin{array}{l}\forall x,\lambda\in\mathbb{R}.\ \big(f(x_0+\lambda\Delta x)=\lambda^k f(x_0+\Delta x)\big)\\ \forall\Delta x,\lambda\in\mathbb{R}.\ [\mathrm{B}_k]\end{array}$$

Vou definir $[\mathrm{A}_2]$ da forma óbvia:

$$\begin{array}{rcl}[\mathrm{A}_2] &=& [\mathrm{A}_k][k:=2]\\ &=& \big(f(\lambda x)=\lambda^2 f(x)\big)\end{array}$$

$[\mathrm{A}_0], [\mathrm{A}_1], [\mathrm{A}_3], \ldots, [\mathrm{B}_1], [\mathrm{B}_0], [\mathrm{B}_2], [\mathrm{B}_3], \ldots,$ etc, vão ser todos definidos da mesma forma.

Digamos que uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é homogênea de grau 2 ("h.d.g.2"). Então ela obedece todos os casos particulares de $[\mathrm{A}_2]$, incluindo estes aqui:

$$\begin{array}{rcl}[\mathrm{A}_2]\left[\begin{smallmatrix}\lambda:=3\\ x:=4\end{smallmatrix}\right] &=& \big(f(3\cdot 4)=3^2 f(4)\big)\\ &=& \big(f(12)=9f(4)\big)\\ [\mathrm{A}_2]\left[\begin{smallmatrix}\lambda:=1/2\\ x:=12\end{smallmatrix}\right] &=& \big(f(\frac12 12)=(\frac12)^2 f(12)\big)\\ &=& \big(f(6)=\frac14 f(12)\big)\end{array}$$

...e aí se a gente souber o valor de $f(x)$ pra algum x a gente consegue descobrir $f(x)$ para todos os outros 'x'zes!

Primeiras definições (2)

Lembre que definimos:

$$\begin{array}{rcl} [\mathrm{A}_k] & = & \big(f(\lambda x) = \lambda^k f(x)\big) \\ [\mathrm{B}_k] & = & \big(f(x_0 + \lambda\Delta x) = \lambda^k f(x_0 + \Delta x)\big) \end{array}$$

e que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *homogênea de grau k* ("h.d.g.k") – quando ela obedece isto,

$$\forall x, \lambda \in \mathbb{R}.\ [\mathrm{A}_k]$$

E uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *homogênea de grau k em x_0* ("h.d.g.k em x_0") quando ela obedece esta outra condição:

$$\forall \Delta x, \lambda \in \mathbb{R}.\ [\mathrm{B}_k]$$

Exercícios

a) Digamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é h.d.g.2 e que $f(4) = 32$. Descubra os valores de $f(x)$ para $x = 1, 2, 3, -4, 0, -1, -2, -3$.

b) Digamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é h.d.g.1 e que $f(4) = 32$. Faça uma tabela com os valores de $f(x)$ para $x \in \{-4, \ldots, 4\}$.

c) Digamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é h.d.g.0 e que $f(4) = 32$. Faça uma tabela com os valores de $f(x)$ para $x \in \{-4, \ldots, 4\}$.

d) Digamos que $x_0 = 10$, que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é h.d.g.1 em x_0, e que $f(10 + 4) = 32$. Faça uma tabela com os valores de $f(x)$ para $x \in \{10 - 4, \ldots, 10 + 4\}$.

Segundas definições

Sejam:

$$\begin{array}{rcl} [\mathrm{A}_k] & = & \big(f(\lambda x) = \lambda^k f(x)\big) \\ [\mathrm{B}_k] & = & \big(f(x_0 + \lambda\Delta x) = \lambda^k f(x_0 + \Delta x)\big) \\ [\mathrm{C}_k] & = & \big(g(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k g(x, y)\big) \\ [\mathrm{D}_k] & = & \left(\begin{array}{l} g(x_0 + \lambda\Delta x, y_0 + \lambda\Delta y) \\ = \lambda^k g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \end{array}\right) \end{array}$$

As definições $[\mathrm{A}_k]$ e $[\mathrm{B}_k]$ são as mesmas de antes.

Vou dizer que uma função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é *homogênea de grau k* ("h.d.g.k") quando ela obedece isto,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 . \forall\lambda \in \mathbb{R}.\ [\mathrm{C}_k]$$

e vou dizer que uma função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é *homogênea de grau k* ("h.d.g.k em (x_0, y_0)") quando ela obedece isto:

$$\forall (\Delta x, \Delta y) \in \mathbb{R}^2 . \forall\lambda \in \mathbb{R}.\ [\mathrm{D}_k]$$

Por exemplo, se $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é h.d.g.2 em $(10, 20)$ então ela obedece isto...

$$\begin{array}{l} g(10 + 5 \cdot 3, 20 + 5 \cdot 4) \\ = 5^2 g(10 + 3, 20 + 4) \end{array}$$

Você consegue ver quem são λ, Δx e Δy neste caso?

Exercício

a) Digamos que $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é h.d.g.2 em $(10, 20)$ e que $g(10 + 3, 20 + 4) = 6$. Descubra os valores de

$$g(10 + \lambda \cdot 3, 20 + \lambda \cdot 4)$$

para $\lambda \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

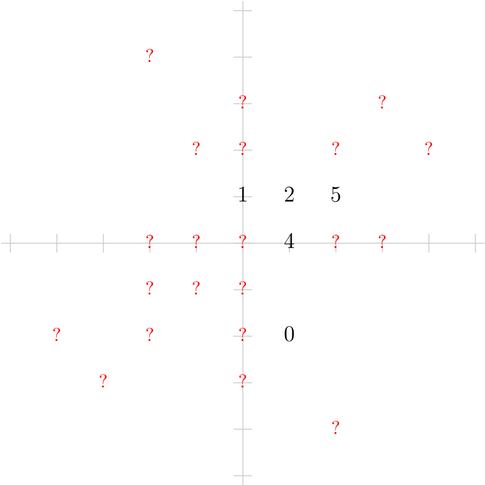
b) Faça a mesma coisa que no item anterior, mas supondo que $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é h.d.g.1 em $(10, 20)$ ao invés de h.d.g.2 em $(10, 20)$.

c) Idem, mas agora supondo que a g é h.d.g.0 em $(10, 20)$.

Exercício 1

Na figura da direita cada numerozinho representa alguma coisa que *sabemos* sobre uma certa função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ homogênea de grau 1 e cada '?' representa alguma coisa que *queremos saber* sobre ela; por exemplo, o 5 na posição (2,1) quer dizer que sabemos que $g(2,1) = 5$ e o '?' na posição (4,2) quer dizer que você vai ter que descobrir o valor de $g(4,2)$ e escrever esse valor sobre a interrogação.

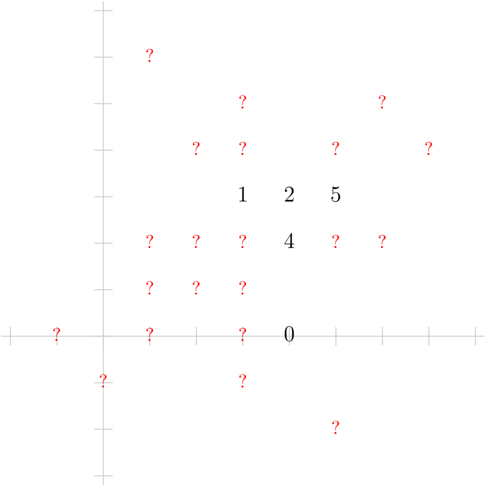
Complete a figura à direita escrevendo os valores certos sobre as interrogações.



Exercício 2

Na figura da direita cada numerozinho representa alguma coisa que *sabemos* sobre uma certa função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ homogênea de grau $\boxed{2}$ em $\boxed{(3,2)}$ – note que isto é bem diferente do exercício anterior! – e cada '?' representa alguma coisa que *queremos saber* sobre ela; por exemplo, o 5 na posição $(3+2, 2+1)$ quer dizer que sabemos que $g(3+2, 2+1) = 5$ e o '?' na posição $(3+4, 3+2)$ quer dizer que você vai ter que descobrir o valor de $g(3+4, 3+2)$ e escrever esse valor sobre a interrogação.

Complete a figura à direita escrevendo os valores certos sobre as interrogações.



Polinômios homogêneos

Normalmente a gente começa a ouvir falar de funções homogêneas por polinômios homogêneos, que são polinômios que todos os monômios deles têm o mesmo grau... por exemplo,

$$2x^3y^4 + 5x^4y^3 - 6x^7$$

é um polinômio em duas variáveis, x e y, que é homogêneo de grau 7, porque x^3y^4, x^4y^3, e x^7 são monômios de grau 7. Qualquer polinômio em duas variáveis pode ser decomposto em polinômios homogêneos; por exemplo:

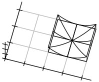
$$\begin{array}{rcll} F(x,y) & = & a & \leftarrow \text{parte homogênea de grau 0} \\ & + & bx + cy & \leftarrow \text{parte homogênea de grau 1} \\ & + & dx^2 + exy + fy^2 & \leftarrow \text{parte homogênea de grau 2} \\ & + & gx^3 + hxy^2 + jx^2y + ky^3 & \leftarrow \text{parte homogênea de grau 3} \\ & + & \ldots & \end{array}$$

Repare que fica implícito que $a, b, \ldots, k, \ldots$ são constantes.
Veja estas páginas da Wikipedia:

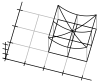
`https://en.wikipedia.org/wiki/Homogeneous_polynomial`
`https://en.wikipedia.org/wiki/Homogeneous_function`

Nas figuras da próxima página a coluna da esquerda mostra vários polinônomios h.d.g.2 $\boxed{\text{em } (3,2)}$.

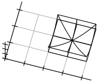
$$\Delta x^2 \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$



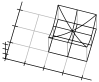
$$2 + \Delta x^2 \qquad \begin{array}{ccc} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{array}$$



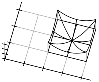
$$\Delta y^2 \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$



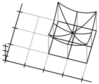
$$2 + \Delta y^2 \qquad \begin{array}{ccc} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{array}$$



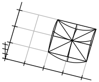
$$\Delta x^2 + \Delta y^2 \qquad \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}$$



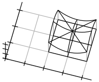
$$2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 \qquad \begin{array}{ccc} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{array}$$



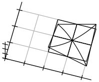
$$\Delta x^2 - \Delta y^2 \qquad \begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}$$



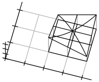
$$2 + \Delta x^2 - \Delta y^2 \qquad \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}$$



$$\Delta x \cdot \Delta y \qquad \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}$$



$$2 + \Delta x \cdot \Delta y \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}$$



```
(%i1) /* f:R->R, homogeneous of degree k */
      f(x) := a * x^k;
(%o1)
```

$$f(x) := a\, x^k$$

```
(%i2) f(x0);
(%o2)
```

$$a\, x_0^k$$

```
(%i3) f(m*x0);
(%o3)
```

$$a\, (m\, x_0)^k$$

```
(%i4) o  : f(m*x0) = m^k * f(x0);
(%o4)
```

$$a\, (m\, x_0)^k = a\, m^k\, x_0^k$$

```
(%i5) o2 : radcan(o);
(%o5)
```

$$a\, m^k\, x_0^k = a\, m^k\, x_0^k$$

```
(%i6) is(o);    /* false because "is" is dumb */
(%o6)
```

false

```
(%i7) is(o2);   /* true */
(%o7)
```

true

```
(%i8)
```

```
(%i8)  /* f:R->R, homogeneous of degree 2 */
(%i8)     f(   x,   y) := a*x^2 + b*x*y + c*y^2;
(%o8)
```

$$f\left(x,y\right) := a\,x^2+b\,x\,y+c\,y^2$$

```
(%i9)     f(  x0,  y0);
(%o9)
```

$$c\,y_0^2+b\,x_0\,y_0+a\,x_0^2$$

```
(%i10)     f(m*x0,m*y0);
(%o10)
```

$$c\,m^2\,y_0^2+b\,m^2\,x_0\,y_0+a\,m^2\,x_0^2$$

```
(%i11) o  : f(m*x0,m*y0) = m^2 * f(x0,y0);
(%o11)
```

$$c\,m^2\,y_0^2+b\,m^2\,x_0\,y_0+a\,m^2\,x_0^2=m^2\,\left(c\,y_0^2+b\,x_0\,y_0+a\,x_0^2\right)$$

```
(%i12) o2 : radcan(o);
(%o12)
```

$$c\,m^2\,y_0^2+b\,m^2\,x_0\,y_0+a\,m^2\,x_0^2=c\,m^2\,y_0^2+b\,m^2\,x_0\,y_0+a\,m^2\,x_0^2$$

```
(%i13) is(o);    /* false because "is" is dumb */
(%o13)
```

false

```
(%i14) is(o2);   /* true */
(%o14)
```

true

```
(%i15)
```

```
(%i15)   /* f:R->R, homogeneous of degree 3 */
(%i15)      f(   x,    y) := a*x^3 + b*x^2*y + c*x*y^2 + d*y^3;
(%o15)
```

$$f(x,y) := a\,x^3 + b\,x^2\,y + c\,x\,y^2 + d\,y^3$$

```
(%i16)      f(  x0,   y0);
(%o16)
```

$$d\,y_0^3 + c\,x_0\,y_0^2 + b\,x_0^2\,y_0 + a\,x_0^3$$

```
(%i17)      f(m*x0,m*y0);
(%o17)
```

$$d\,m^3\,y_0^3 + c\,m^3\,x_0\,y_0^2 + b\,m^3\,x_0^2\,y_0 + a\,m^3\,x_0^3$$

```
(%i18) o  : f(m*x0,m*y0) = m^3 * f(x0,y0);
(%o18)
```

$$d\,m^3\,y_0^3 + c\,m^3\,x_0\,y_0^2 + b\,m^3\,x_0^2\,y_0 + a\,m^3\,x_0^3 = m^3\,\left(d\,y_0^3 + c\,x_0\,y_0^2 + b\,x_0^2\,y_0 + a\,x_0^3\right)$$

```
(%i19) o2 : radcan(o);
(%o19)
```

$$d\,m^3\,y_0^3 + c\,m^3\,x_0\,y_0^2 + b\,m^3\,x_0^2\,y_0 + a\,m^3\,x_0^3 = d\,m^3\,y_0^3 + c\,m^3\,x_0\,y_0^2 + b\,m^3\,x_0^2\,y_0 + a\,m^3\,x_0^3$$

```
(%i20) is(o);    /* false because "is" is dumb */
(%o20)
```

false

```
(%i21) is(o2);   /* true */
(%o21)
```

true

```
(%i22)
```

Exercício 5.
Relembre o que era o "estudo do sinal de uma função" que você deve ter visto em Cálculo 1, e faça um diagramas indicando em que intervalos cada uma das funções abaixo é positiva, negativa, ou zero.

Dica: veja este vídeo, sobre diagramas de sinais em $\mathbb{R}^2$:
`http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas-2.mp4`
`https://www.youtube.com/watch?v=noVh-RsK5Jo`

a) x
b) $x+1$
c) $x(x+1)$
d) $4-x$
e) $x(x+1)(4-x)$

Exercício 6.
Agora adapte essa idéia do diagrama do sinal para $\mathbb{R}^2$,
no quadrado com $x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$ e $y \in [y_0 - 1, y_0 + 1]$,
e faça o diagrama do sinal para cada uma das funções abaixo.
Dica: veja este vídeo, sobre diagramas de sinais em $\mathbb{R}^2$:
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas-2.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=noVh-RsK5Jo

a) Δx
b) Δx^2
c) Δy
d) $\Delta x \Delta y$
e) $\Delta x + \Delta y$
f) $\Delta x - \Delta y$
g) $(\Delta x + \Delta y)^2$
h) $(\Delta x - \Delta y)^2$
i) $(\Delta x + \Delta y)(\Delta x - \Delta y)$
j) $(\Delta x + \Delta y)\Delta x$
k) $-(\Delta x + \Delta y)^2$

Exercício 7.
A partir de agora vamos considerar que:

$$\begin{array}{rcl}
x & = & x(t) \\
 & = & x(t_1) \\
 & = & x_0 + \alpha \cdot (t_1 - t_0) \\
 & = & x_0 + \alpha \Delta t \\
y & = & y(t) \\
 & = & y(t_1) \\
 & = & y_0 + \beta \cdot (t_1 - t_0) \\
 & = & y_0 + \beta \Delta t
\end{array}$$

Onde $t_0 = 5$; x_0 e y_0 continuam os mesmos de antes, e α e β são constantes cujos valores podem depender do contexto.

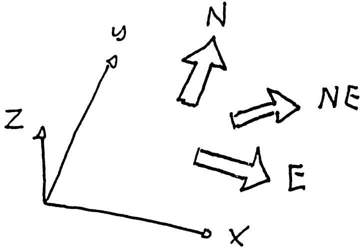
Exercício 7 (cont.)
A trajetória $(x(t), y(t))$ é sempre um movimento retilíneo uniforme pra quaisquer valores de α e β.

a) Calcule $\overrightarrow{(x_t, y_t)}$.

Cada escolha de valores para α e β dá uma trajetória diferente. Nos itens abaixo você vai visualizar algumas dessas trajetórias e vai desenhá-las no papel — desta forma aqui: você vai marcar no plano os pontos $(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t))$ para $\Delta t = -1, 0, 1$, vai escrever "$\Delta t = -1$", "$\Delta t = 0$" e "$\Delta t = 1$" do lado dos pontos correspondentes a esses valores de Δt, e ao lado de cada desenho você vai escrever os valores de α e β.

b) Desenhe a trajetória associada a $\alpha = 1$, $\beta = 0$.
c) Desenhe a trajetória associada a $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

Exercício 7 (cont.)
...e além disso você vai escrever algo como "Leste" (ou "E"), "Noroeste" (ou "NW") do lado de cada um dos seus desenhos de trajetórias pra indicar em que direção o ponto (x, y) está andando. Use a convenção que costuma ser usada em mapas, matemática e videogames, em que o Leste é pra direita e o Norte é pra cima:



Exercício 7 (cont.)

d) Desenhe a trajetória associada a $\alpha = 0$, $\beta = -1$
e diga o nome da direção dela.

e) Desenhe a trajetória associada a $\alpha = -1$, $\beta = 1$.
e diga o nome da direção dela.

f) Quais são os valores mais simples de α e β —
onde "simples" quer dizer "0, 1 ou -1" — que fazem
a trajetória ir pro nordeste? E pro sudoeste?

Nos próximos exercícios eu vou me referir a essas
trajetórias em que α e β são números "simples"
pelos nomes das direções delas.

O significado geométrico de z_t

Nós sabemos calcular z, z_t e z_{tt} a partir de t,
e sabemos calcular z, z_t e z_{tt} em t_0.

Com um pouquinho de esforço você deve ser
capaz de visualizar o que acontece perto de t_0...
o valor da primeira derivada, $(z_t)(t_0)$, diz o seguinte:

$$\begin{array}{lcl}
z \text{ aumenta quando } t \text{ aumenta (``crescente'')} & \Longleftrightarrow & (z_t)(t_0) > 0 \\
z \text{ ``fica horizontal'' quando } t \text{ aumenta} & \Longleftrightarrow & (z_t)(t_0) = 0 \\
z \text{ diminui quando } t \text{ aumenta (``decrescente'')} & \Longleftrightarrow & (z_t)(t_0) < 0
\end{array}$$

Veja o vídeo!!!

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas-3.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=VwowES6EM3Y

O significado geométrico de z_{tt}

Nos casos em que z "fica horizontal" nós vamos usar a segunda derivada, $(z_{tt})(t_0)$, pra ver se o gráfico de $z(t)$ "parece uma parábola" ao redor de t_0, e se essa parábola tem concavidade pra cima ou pra baixo:

$$\begin{array}{lcl} \text{concavidade pra cima} & \iff & (z_{tt})(t_0) > 0 \\ \text{“parece horizontal”} & \iff & (z_{tt})(t_0) = 0 \\ \text{concavidade pra baixo} & \iff & (z_{tt})(t_0) < 0 \end{array}$$

Eu usei muitos termos informais de propósito. No próximo exercício você vai tentar descobrir sem fazer contas qual é o comportamento da z em torno de t_0, e no outro exercício você vai fazer as contas e vai ver se o seu olhômetro funcionou direito.

Exercício 8.
Em cada um dos desenhos dos próximos slides diga o que acontece quando a trajetória $(x(t), y(t))$ anda em uma das oito direções simples, que são:

norte, nordeste, leste, sudeste,
sul, sudoeste, oeste, noroeste.

Use estas categorias na suas respostas:

z cresce
z decresce
z faz uma parábola com concavidade pra cima
z faz uma parábola com concavidade pra baixo
z é “muito horizontal”

Cálculo 3 - 2024.2

Aula 22: o teste da segunda derivada

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2024.2-C3.html

Links

```
(find-es "maxima" "2024.2-C3-eigenvectors")
http://anggtwu.net/e/maxima.e.html#2024.2-C3-eigenvectors
```

```
(%i1) [[r1,r2], k, [zneg,zpos]] : [[-2,-1], 10, [-5,10]];
(%o1)
```
$$[[-2,-1], 10, [-5,10]]$$

```
(%i2) [xmin,ymin,xmax,ymax] : [-5,-5, 5,5];
(%o2)
```
$$[-5,-5,5,5]$$

```
(%i3)
      f : k * (x -   r1) * (x -   r2);
(%o3)
```
$$10\,(x+1)\,(x+2)$$

```
(%i4) F : k * (x - y*r1) * (x - y*r2);
(%o4)
```
$$10\,(y+x)\,(2\,y+x)$$

```
(%i5) f : expand(f);
(%o5)
```
$$10\,x^2+30\,x+20$$

```
(%i6) F : expand(F);
(%o6)
```
$$20\,y^2+30\,x\,y+10\,x^2$$

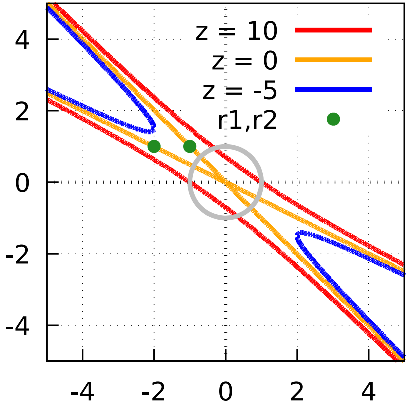
```
(%i7) define(f(x),   f);
(%o7)
```
$$f(x) := 10\,x^2+30\,x+20$$

```
(%i8) define(F(x,y), F);
(%o8)
```
$$F(x,y) := 20\,y^2+30\,x\,y+10\,x^2$$

```
(%i9)
      solve(f(x)=0, x);
(%o9)
```
$$[x=-2, x=-1]$$

```
(%i10) [r1,r2];
(%o10)
```
$$[-2,-1]$$

```
(%i11) drawlevels() :=
         [myimp1(F=zpos, lc(red),    lk(z=zpos)),
          myimp1(F=0,    lc(orange), lk(z=0)),
          myimp1(F=zneg, lc(blue),   lk(z=zneg))]$
(%i12) drawroots() := pts([[r1,1], [r2,1]], pc(forest_green), pk("r1,r2"), myps(3))$
(%i13) drawunitcircle() := mypara([cos(th),sin(th)], th,0,2*%pi, lc(gray))$
(%i14) myqdrawp(xyrange(), drawlevels(), drawroots(), drawunitcircle());
(%o14)
```



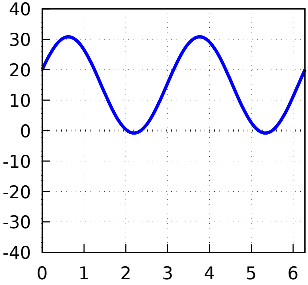
```
(%i15) myexth(fth,[opts]) :=
         myapply_fl('ex1, fth, th,0,2*%pi, opts)$
(%i16) F;
(%o16)
```

$$20\,y^2+30\,x\,y+10\,x^2$$

```
(%i17) z1 : subst([y=cos(th), x=sin(th)], F);
(%o17)
```

$$10\,\left(\sin \mathrm{th}\right)^2+30\,\cos \mathrm{th}\,\sin \mathrm{th}+20\,\left(\cos \mathrm{th}\right)^2$$

```
(%i18) block(
         [xmin,xmax,ymin,ymax],
         [xmin,xmax,ymin,ymax] : [0,2*%pi, -40,40],
         myqdrawp(xyrange0(), myexth(z1))
         );
(%o18)
```




```
(%i19) F_x  : diff(F,x);
(%o19)
```

$$30\,y+20\,x$$

```
(%i20) F_y  : diff(F,y);
(%o20)
```

$$40\,y+30\,x$$

```
(%i21) F_xx : diff(F,x,2);
(%o21)
```

$$20$$

```
(%i22) F_xy : diff(F,x,1,y,1);
(%o22)
```

$$30$$

```
(%i23) F_yy : diff(F,y,2);
(%o23)
```

$$40$$

```
(%i24)
       M : matrix([F_xx, F_xy],
                  [F_xy, F_yy]);
(%o24)
```

$$\begin{pmatrix}20 & 30\\ 30 & 40\end{pmatrix}$$

```
(%i25) determinant(M);
(%o25)
```

$$-100$$

```
(%i26) [vals,vectors]     : eigenvectors(M)$
(%i27) [lambda1,lambda2] : vals[1];
(%o27)
```

$$\left[30-10^{\frac{3}{2}},10^{\frac{3}{2}}+30\right]$$

```
(%i28) [v1,v2]            : [vectors[1][1], vectors[2][1]];
(%o28)
```

$$\left[\left[1,-\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)\right],\left[1,\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right]\right]$$

```
(%i29)
       fpprintprec;
(%o29)
```

$$0$$

```
(%i30) fpprintprec : 3;
(%o30)
```

$$3$$

```
(%i31) float([lambda1,v1]);
(%o31)
```

$$[-1.62,[1.0,-0.721]]$$

```
(%i32) float([lambda2,v2]);
(%o32)
```

$$[61.6,[1.0,1.39]]$$

```
(%i33)
          lambda1 * lambda2;
(%o33)
```

$$\left(30-10^{\frac{3}{2}}\right)\left(10^{\frac{3}{2}}+30\right)$$

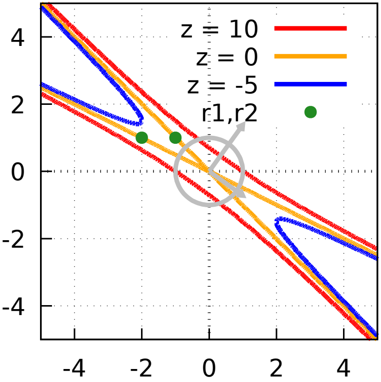
```
(%i34) expand(lambda1 * lambda2);
(%o34)
```

$$-100$$

```
(%i35) [M, determinant(M)];
(%o35)
```

$$\left[\begin{pmatrix}20 & 30\\ 30 & 40\end{pmatrix},-100\right]$$

```
(%i36) myvector(v,[opts]) := myapply_fl('vector, [0,0], v, hl(0.2), opts)$
(%i37) draweigenvectors() :=
         [myvector(v1, lc(gray)),
          myvector(v2, lc(gray))]$

(%i38)
       myqdrawp(xyrange(), drawlevels(), drawroots(),
                drawunitcircle(), draweigenvectors());

(%o38)
```



Cálculo 3 - 2024.2

Aula 21: dicas pra P1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.2-C3.html

Links

Cálculo 3 - 2024.2

P1 (primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.2-C3.html

Links

http://anggtwu.net/e/maxima.e.html#2024.2-C3-P1-Q1
http://anggtwu.net/e/maxima.e.html#2024.2-C3-P1-Q2
(find-es "maxima" "2024.2-C3-P1-Q1")
(find-es "maxima" "2024.2-C3-P1-Q2")

Questão 1

(Total: 3.5 pts)
O diagrama de numerozinhos da última folha da prova corresponde a uma superfície $z = F(x,y)$ que tem 6 faces. Também é possível interpretá-lo como uma superfície com 7 ou mais faces, mas vamos considerar que a superfície com só 6 faces é que é a correta.

a) **(0.5 pts)** Mostre como dividir o plano em 6 polígonos que são as projeções destas faces no plano do papel.

b) **(0.5 pts)** Chame estas faces de face N ("norte"), S ("sul"), W ("oeste"), C ("centro"), E ("leste") e NE ("nordeste"), e chame as equações dos planos delas de $F_N(x,y)$, $F_S(x,y)$, $F_W(x,y)$, $F_C(x,y)$, $F_E(x,y)$, e $F_{NE}(x,y)$. Dê as equações destes planos.

c) **(0.5 pts)** Sejam:

$$\begin{array}{rcl} P_C &=& \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F_C(x,y)\,\}, \\ P_E &=& \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F_E(x,y)\,\}, \\ r &=& P_C \cap P_E. \end{array}$$

Represente a reta r graficamente como numerozinhos.

d) **(0.5 pts)** Dê uma parametrização para a reta do item anterior. Use notação de conjuntos.

e) **(0.5 pts)** Seja

$$A = \{0,1,\ldots,9\} \times \{0,1,\ldots,11\};$$

note que os numerozinhos do diagrama de numerozinhos estão todos sobre pontos de A. Para cada ponto $(x,y) \in A$ represente graficamente $(x,y) + \frac{1}{3}\vec{\nabla}F(x,y)$.

Obs: quando $\vec{\nabla}F(x,y) = 0$ desenhe uma bolinha preta sobre o ponto (x,y), e quando $\vec{\nabla}F(x,y)$ não existir faça um '×' sobre o numerozinho que está no ponto (x,y).

f) **(1.0 pts)** Sejam

$$\begin{array}{rcl} Q(t) &=& (0,2) + t\overrightarrow{(1,1)}, \\ (x(t),y(t)) &=& Q(t), \\ h(t) &=& F(x(t),y(t)). \end{array}$$

Faça o gráfico da função $h(t)$. Considere que o domínio dela é o intervalo $[0,9]$.

Algumas definições

Em Cálculo 1 e Cálculo 2 você viu que se $f(x)$ é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ então a aproximação de Taylor de ordem 2 pra $f(x)$ no ponto x_0 é:

$$\begin{array}{rcl} (T_{2,x_0}f)(x) & = & f(x_0) \\ & + & f'(x_0)\Delta x \\ & + & \frac{f''(x_0)}{2}\Delta x^2 \end{array}$$

A "versão Cálculo 3" disto é a fórmula abaixo. Se $F(x,y)$ é uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ então a aproximação de Taylor de ordem 2 pra $F(x,y)$ no ponto (x_0,y_0) é:

$$\begin{array}{rcl} (T_{2,(x_0,y_0)}F)(x) & = & F(x_0,y_0) \\ & + & F_x(x_0,y_0)\Delta x + F_y(x_0,y_0)\Delta y \\ & + & \frac{F_{xx}(x_0,y_0)}{2}\Delta x^2 + F_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y + \frac{F_{yy}(x_0,y_0)}{2}\Delta y^2 \end{array}$$

e a gente diz que as derivadas até ordem 2 da função F são as funções $(F, F_x, F_y, F_{xx}, F_{xy}, F_{yy})$. Eu costumo organizar elas numa matriz:

$$D_2F = \begin{pmatrix} F \\ F_x & F_y \\ F_{xx} & F_{xy} & F_{yy} \end{pmatrix}$$

$$(D_2F)(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} F(x_0,y_0) \\ F_x(x_0,y_0) & F_y(x_0,y_0) \\ F_{xx}(x_0,y_0) & F_{xy}(x_0,y_0) & F_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Questão 2

(Total: 6.5 pts)
Sejam

$$\begin{array}{rcl} F(x,y) & = & xy(6-2x-y), \\ P_1 & = & (0,6), \\ P_2 & = & (1,2), \\ P_3 & = & (3,0), \\ P_4 & = & (0,0). \end{array}$$

a) **(0.5 pts)** Calcule D_2F.

b) **(0.5 pts)** Calcule D_2F nos pontos P_1, P_2, P_3, e P_4.

c) **(1.0 pts)** Calcule $T_{2,(x_0,y_0)}F$ nos pontos P_1, P_2, P_3, e P_4.

d) **(0.5 pts)** Os pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 são pontos críticos da função F? Quais deles são máximos locais? Quais são mínimos locais? Quais são pontos de sela? Use o gradiente e o determinante $\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix}$ pra descobrir tudo isso.

Lembre que $P_2 = (1,2)$.
Seja $G(x,y) = (T_{2,(1,2)}F)(x,y)$.
Seja $B = \{0,...,3\} \times \{0,...,6\}$
e $C = \{\,(x,y) \in B \mid y \leq 6-2x\,\}$.

e) **(0.5 pts)** Calcule o diagrama de numerozinhos da função F nos pontos de C.

f) **(1.0 pts)** Calcule o diagrama de numerozinhos da função G nos pontos de C.

g) **(2.5 pts)** Use o diagrama de numerozinhos da F que você calculou no item (e) e os gradientes da F nos pontos de C – que você ainda não calculou, e vai ter que calcular agora – pra fazer um desenho bem caprichado das curvas de nível da F dentro do triângulo cujos vértices são os pontos P_1, P_3 e P_4. Você vai precisar reduzir a escala dos vetores gradientes pra que eles não esbarrem uns nos outros – desenhe $F(x,y) + \frac{1}{10}\nabla F(x,y)$ para cada ponto de C.

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	5	5	5	5	5
6	6	6	6	5	4	4	4	4	4
6	6	6	5	4	3	2	2	2	2
5	5	5	4	3	2	1	0	0	0
4	4	4	3	2	1	0	0	0	0
3	3	3	2	1	0	0	0	0	0
2	2	2	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	5	5	5	5	5
6	6	6	6	5	4	4	4	4	4
6	6	6	5	4	3	2	2	2	2
5	5	5	4	3	2	1	0	0	0
4	4	4	3	2	1	0	0	0	0
3	3	3	2	1	0	0	0	0	0
2	2	2	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	5	5	5	5	5
6	6	6	6	5	4	4	4	4	4
6	6	6	5	4	3	2	2	2	2
5	5	5	4	3	2	1	0	0	0
4	4	4	3	2	1	0	0	0	0
3	3	3	2	1	0	0	0	0	0
2	2	2	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	5	5	5	5	5
6	6	6	6	5	4	4	4	4	4
6	6	6	5	4	3	2	2	2	2
5	5	5	4	3	2	1	0	0	0
4	4	4	3	2	1	0	0	0	0
3	3	3	2	1	0	0	0	0	0
2	2	2	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	5	5	5	5	5
6	6	6	6	5	4	4	4	4	4
6	6	6	5	4	3	2	2	2	2
5	5	5	4	3	2	1	0	0	0
4	4	4	3	2	1	0	0	0	0
3	3	3	2	1	0	0	0	0	0
2	2	2	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	5	5	5	5	5
6	6	6	6	5	4	4	4	4	4
6	6	6	5	4	3	2	2	2	2
5	5	5	4	3	2	1	0	0	0
4	4	4	3	2	1	0	0	0	0
3	3	3	2	1	0	0	0	0	0
2	2	2	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Questão 1: gabarito (1a)

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	5	5	5	5	5
6	6	6	6	5	4	4	4	4	4
6	6	6	5	4	3	2	2	2	2
5	5	5	4	3	2	1	0	0	0
4	4	4	3	2	1	0	0	0	0
3	3	3	2	1	0	0	0	0	0
2	2	2	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Questão 1: gabarito (1a, 1b)

```
(%i1) mkmatrix5(x,xs,y,ys,expr) ::=
        buildq([x,xs,y,ys,expr],
               apply('matrix,
                     makelist(makelist(expr,x,xs),y,ys)))$
(%i2) /* (1a: 0.5 pts) */
      /* (1b: 0.5 pts) */
      z_N  : 6$
(%i3) z_S  : 0$
(%i4) z_W  : y - 1;
```

(%o4)

$$y-1$$

```
(%i5) z_C  : y - x + 1;
```

(%o5)

$$y-x+1$$

```
(%i6) z_E  : -12 + 2*y;
```

(%o6)

$$2\,y-12$$

```
(%i7) z_NE : -4 + y;
```

(%o7)

$$y-4$$

```
(%i8) z_MR : min(z_E, z_NE);          /* middle right */
```

(%o8)

$$\min\left(y-4,2\,y-12\right)$$

```
(%i9) z_M  : min(z_W, max(z_C, z_MR));  /* middle */
```

(%o9)

$$\min\left(\max\left(\min\left(y-4,2\,y-12\right),y-x+1\right),y-1\right)$$

```
(%i10) z    : min(z_N, max(z_S, z_M))$
```

```
(%i11) mkmatrix5(x,seq(0,9), y,seqby(11,0,-1), [x,y]);
```

(%o11)

$$\begin{pmatrix}
[0,11] & [1,11] & [2,11] & [3,11] & [4,11] & [5,11] & [6,11] & [7,11] & [8,11] & [9,11] \\
[0,10] & [1,10] & [2,10] & [3,10] & [4,10] & [5,10] & [6,10] & [7,10] & [8,10] & [9,10] \\
[0,9] & [1,9] & [2,9] & [3,9] & [4,9] & [5,9] & [6,9] & [7,9] & [8,9] & [9,9] \\
[0,8] & [1,8] & [2,8] & [3,8] & [4,8] & [5,8] & [6,8] & [7,8] & [8,8] & [9,8] \\
[0,7] & [1,7] & [2,7] & [3,7] & [4,7] & [5,7] & [6,7] & [7,7] & [8,7] & [9,7] \\
[0,6] & [1,6] & [2,6] & [3,6] & [4,6] & [5,6] & [6,6] & [7,6] & [8,6] & [9,6] \\
[0,5] & [1,5] & [2,5] & [3,5] & [4,5] & [5,5] & [6,5] & [7,5] & [8,5] & [9,5] \\
[0,4] & [1,4] & [2,4] & [3,4] & [4,4] & [5,4] & [6,4] & [7,4] & [8,4] & [9,4] \\
[0,3] & [1,3] & [2,3] & [3,3] & [4,3] & [5,3] & [6,3] & [7,3] & [8,3] & [9,3] \\
[0,2] & [1,2] & [2,2] & [3,2] & [4,2] & [5,2] & [6,2] & [7,2] & [8,2] & [9,2] \\
[0,1] & [1,1] & [2,1] & [3,1] & [4,1] & [5,1] & [6,1] & [7,1] & [8,1] & [9,1] \\
[0,0] & [1,0] & [2,0] & [3,0] & [4,0] & [5,0] & [6,0] & [7,0] & [8,0] & [9,0]
\end{pmatrix}$$

```
(%i12) mkmatrix5(x,seq(0,8), y,seqby(11,0,-1), ''z);
```

(%o12)

$$\begin{pmatrix}
6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\
6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\
6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
6 & 6 & 6 & 6 & 5 & 4 & 4 & 4 & 4 \\
6 & 6 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 2 & 2 \\
5 & 5 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

```
(%i13) /*
       plot3d (z,   [x,0,8],   [y,0,11]);
       */
```

Questão 1: gabarito (1c, 1d)

```
(%i13) /* (1c: 0.5 pts) */
              [zr_=z_C, zr_=z_E];
(%o13)
```

$$[\mathrm{zr\_} = y - x + 1, \mathrm{zr\_} = 2\,y - 12]$$

```
(%i14)      solve([zr_=z_C, zr_=z_E], [y,zr_]);
(%o14)
```

$$[[y = 13 - x, \mathrm{zr\_} = 14 - 2\,x]]$$

```
(%i15) eqc : solve([zr_=z_C, zr_=z_E], [y,zr_])[1];
(%o15)
```

$$[y = 13 - x, \mathrm{zr\_} = 14 - 2\,x]$$

```
(%i16) define(yr_(x), subst(eqc, y));
(%o16)
```

$$\mathrm{yr\_}(x) := 13 - x$$

```
(%i17) define(zr_(x), subst(eqc, zr_));
(%o17)
```

$$\mathrm{zr\_}(x) := 14 - 2\,x$$

```
(%i18) xyzr(x)    := [x, yr_(x), zr_(x)];
(%o18)
```

$$\mathrm{xyzr}(x) := [x, \mathrm{yr\_}(x), \mathrm{zr\_}(x)]$$

```
(%i19) xyzr_top   : rhs(fundef(xyzr));
(%o19)
```

$$[x, \mathrm{yr\_}(x), \mathrm{zr\_}(x)]$$

```
(%i20) xyzr_lines : makelist(xyzr(x), x,2,9);
(%o20)
```

$$[[2,11,10],[3,10,8],[4,9,6],[5,8,4],[6,7,2],[7,6,0],[8,5,-2],[9,4,-4]]$$

```
(%i21) apply('matrix, append([xyzr_top], xyzr_lines));
(%o21)
```

$$\begin{pmatrix} x & \mathrm{yr\_}(x) & \mathrm{zr\_}(x) \\ 2 & 11 & 10 \\ 3 & 10 & 8 \\ 4 & 9 & 6 \\ 5 & 8 & 4 \\ 6 & 7 & 2 \\ 7 & 6 & 0 \\ 8 & 5 & -2 \\ 9 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

```
(%i22)  /* (1d: 0.5 pts) */
       [x, yr_(x), zr_(x)];
(%o22)
```

$$[x, 13 - x, 14 - 2\,x]$$

Questão 1: gabarito (1e, 1f)

```
(%i23) /* (1e: 0.5 pts) */
       define(z(x,y), z);
```
(%o23)

$$z(x,y) := \min(6, \max(0, \min(\max(\min(y-4, 2y-12), y-x+1), y-1)))$$

```
(%i24) eps : 1/4;
```
(%o24)

$$\frac{1}{4}$$

```
(%i25) z_xr (x,y) := (z(x+eps,y)-z(x,y))/ eps;
```
(%o25)

$$\text{z\_xr}(x,y) := \frac{z(x+\text{eps},y)-z(x,y)}{\text{eps}}$$

```
(%i26) z_xl (x,y) := (z(x-eps,y)-z(x,y))/-eps;
```
(%o26)

$$\text{z\_xl}(x,y) := \frac{z(x-\text{eps},y)-z(x,y)}{-\text{eps}}$$

```
(%i27) z_yu (x,y) := (z(x,y+eps)-z(x,y))/ eps;
```
(%o27)

$$\text{z\_yu}(x,y) := \frac{z(x,y+\text{eps})-z(x,y)}{\text{eps}}$$

```
(%i28) z_yd (x,y) := (z(x,y-eps)-z(x,y))/-eps;
```
(%o28)

$$\text{z\_yd}(x,y) := \frac{z(x,y-\text{eps})-z(x,y)}{-\text{eps}}$$

```
(%i29) gradz(x,y) := if (z_xr(x,y) = z_xl(x,y)) and
                        (z_yu(x,y) = z_yd(x,y))
                     then [z_xr(x,y), z_yu(x,y)]
                     else "X"$
```

```
(%i30) mkmatrix5(x,seq(0,8), y,seqby(11,0,-1), gradz(x,y));
```
(%o30)

$$\begin{pmatrix}
[0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] \\
[0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & X & X & X & X \\
[0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & X & X & [0,1] & [0,1] & [0,1] \\
[0,0] & [0,0] & [0,0] & X & [-1,1] & X & X & X & X \\
X & X & X & [-1,1] & [-1,1] & [-1,1] & X & [0,2] & [0,2] \\
[0,1] & [0,1] & X & [-1,1] & [-1,1] & [-1,1] & [-1,1] & X & X \\
[0,1] & [0,1] & X & [-1,1] & [-1,1] & [-1,1] & X & [0,0] & [0,0] \\
[0,1] & [0,1] & X & [-1,1] & [-1,1] & X & [0,0] & [0,0] & [0,0] \\
[0,1] & [0,1] & X & [-1,1] & X & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] \\
[0,1] & [0,1] & X & X & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] \\
X & X & X & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] \\
[0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0]
\end{pmatrix}$$

```
(%i31)
       /* (1f: 1.0 pts) */
       [xmin,xmax, ymin,ymax] : [0,9, 0,7];
```
(%o31)

$$[0,9,0,7]$$

```
(%i32) Q(t) := [0,2] + t*[1,1];
```
(%o32)

$$Q(t) := [0,2] + t\,[1,1]$$

```
(%i33) define(xQ(t), Q(t)[1]);
```
(%o33)

$$\text{xQ}(t) := t$$

```
(%i34) define(yQ(t), Q(t)[2]);
```
(%o34)

$$\text{yQ}(t) := t+2$$

```
(%i35)                [x=xQ(t),x=yQ(t)];
```
(%o35)

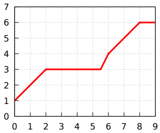
$$[x=t, x=t+2]$$

Questão 1: gabarito (1f)

```
(%i36) define(h(t), at(z, [x=xQ(t),y=yQ(t)]));
(%o36)
```

$$h(t) := \min(6, \max(0, \min(\max(3, \min(t-2, 2\ (t+2) - 12)), t+1)))$$

```
(%i37) myqdrawp(xyrange(), myex1(h(x), lc(red)));
(%o37)
```




```
(%i38)
```

Questão 2: gabarito

```
(%i1) gradef(W  (x,y), W_x (x,y), W_y (x,y))$
(%i2) gradef(W_x(x,y), W_xx(x,y), W_xy(x,y))$
(%i3) gradef(W_y(x,y), W_xy(x,y), W_yy(x,y))$
(%i4) dd(F)        := [F,
                       diff(F,x),   diff(F,y),
                       diff(F,x,2), diff(F,x,1,y,1), diff(F,y,2)]$
(%i5) aa(o,x0y0)  := at(o, [x=x0y0[1], y=x0y0[2]])$
(%i6) mm(abcdef)  := block([a,b,c,d,e,f],
                            [a,b,c,d,e,f]:abcdef,
                            [a,b*Dx,c*Dy,d*Dx^2/2,e*Dx*Dy,f*Dy^2/2])$
(%i7) ss(abcdef)  := block([a,b,c,d,e,f],
                            [a,b,c,d,e,f]:abcdef,
                            a+b+c+d+e+f)$
(%i8) toM(abcdef) := block([a,b,c,d,e,f],
                            [a,b,c,d,e,f]:abcdef,
                            matrix([a,"",""], [b,c,""], [d,e,f]))$
(%i9) D2       (F) := toM(dd(F))$
(%i10) D2at(x0y0,F) := toM(aa(dd(F),x0y0))$
(%i11) T2M (x0y0,F) := toM(mm(aa(dd(F),x0y0)))$
(%i12) T2  (x0y0,F) :=  ss(mm(aa(dd(F),x0y0)))$
(%i13)
      /* Alguns testes: */
               dd(W(x,y));
```

(%o13)
$[W(x,y), \mathrm{W\_x}(x,y), \mathrm{W\_y}(x,y), \mathrm{W\_xx}(x,y), \mathrm{W\_xy}(x,y), \mathrm{W\_yy}(x,y)]$

```
(%i14)       toM(dd(W(x,y)));
```

(%o14)
$$\begin{pmatrix} W(x,y) & & \\ \mathrm{W\_x}(x,y) & \mathrm{W\_y}(x,y) & \\ \mathrm{W\_xx}(x,y) & \mathrm{W\_xy}(x,y) & \mathrm{W\_yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

```
(%i15)       toM([1,2,3,4,5,6]);
```

(%o15)
$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 3 & \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

```
(%i16)        aa(dd(W(x,y)),[3,4]);
```

(%o16)
$[W(3,4), \mathrm{W\_x}(3,4), \mathrm{W\_y}(3,4), \mathrm{W\_xx}(3,4), \mathrm{W\_xy}(3,4), \mathrm{W\_yy}(3,4)]$

```
(%i17)     toM(aa(dd(W(x,y)),[3,4]));
```

(%o17)
$$\begin{pmatrix} W(3,4) & & \\ \mathrm{W\_x}(3,4) & \mathrm{W\_y}(3,4) & \\ \mathrm{W\_xx}(3,4) & \mathrm{W\_xy}(3,4) & \mathrm{W\_yy}(3,4) \end{pmatrix}$$

```
(%i18)     mm(aa(dd(W(x,y)),[3,4]));
```

(%o18)
$$\left[W(3,4), \mathrm{W\_x}(3,4)\,\mathrm{Dx}, \mathrm{W\_y}(3,4)\,\mathrm{Dy}, \frac{\mathrm{W\_xx}(3,4)\,\mathrm{Dx}^2}{2}, \mathrm{W\_xy}(3,4)\,\mathrm{Dx}\,\mathrm{Dy}, \frac{\mathrm{W\_yy}(3,4)\,\mathrm{Dy}^2}{2}\right]$$

```
(%i19) toM(mm(aa(dd(W(x,y)),[3,4])));
```

(%o19)
$$\begin{pmatrix} W(3,4) & & \\ \mathrm{W\_x}(3,4)\,\mathrm{Dx} & \mathrm{W\_y}(3,4)\,\mathrm{Dy} & \\ \frac{\mathrm{W\_xx}(3,4)\,\mathrm{Dx}^2}{2} & \mathrm{W\_xy}(3,4)\,\mathrm{Dx}\,\mathrm{Dy} & \frac{\mathrm{W\_yy}(3,4)\,\mathrm{Dy}^2}{2} \end{pmatrix}$$

```
(%i20)  ss(mm(aa(dd(W(x,y)),[3,4])));
```

(%o20)
$$\frac{\mathrm{W\_yy}(3,4)\,\mathrm{Dy}^2}{2} + \mathrm{W\_xy}(3,4)\,\mathrm{Dx}\,\mathrm{Dy} + \mathrm{W\_y}(3,4)\,\mathrm{Dy} + \frac{\mathrm{W\_xx}(3,4)\,\mathrm{Dx}^2}{2} + \mathrm{W\_x}(3,4)\,\mathrm{Dx} + W(3,4)$$

```
(%i21)
       D2         (W(x,y));
```

(%o21)
$$\begin{pmatrix} W(x,y) & & \\ \mathrm{W\_x}(x,y) & \mathrm{W\_y}(x,y) & \\ \mathrm{W\_xx}(x,y) & \mathrm{W\_xy}(x,y) & \mathrm{W\_yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

```
(%i22) D2at([3,4],W(x,y));
```

(%o22)
$$\begin{pmatrix} W(3,4) & & \\ \mathrm{W\_x}(3,4) & \mathrm{W\_y}(3,4) & \\ \mathrm{W\_xx}(3,4) & \mathrm{W\_xy}(3,4) & \mathrm{W\_yy}(3,4) \end{pmatrix}$$

```
(%i23) T2M ([3,4],W(x,y));
```

(%o23)
$$\begin{pmatrix} W(3,4) & & \\ \mathrm{W\_x}(3,4)\,\mathrm{Dx} & \mathrm{W\_y}(3,4)\,\mathrm{Dy} & \\ \frac{\mathrm{W\_xx}(3,4)\,\mathrm{Dx}^2}{2} & \mathrm{W\_xy}(3,4)\,\mathrm{Dx}\,\mathrm{Dy} & \frac{\mathrm{W\_yy}(3,4)\,\mathrm{Dy}^2}{2} \end{pmatrix}$$

```
(%i24) T2  ([3,4],W(x,y));
```

(%o24)
$$\frac{\mathrm{W\_yy}(3,4)\,\mathrm{Dy}^2}{2} + \mathrm{W\_xy}(3,4)\,\mathrm{Dx}\,\mathrm{Dy} + \mathrm{W\_y}(3,4)\,\mathrm{Dy} + \frac{\mathrm{W\_xx}(3,4)\,\mathrm{Dx}^2}{2} + \mathrm{W\_x}(3,4)\,\mathrm{Dx} + W(3,4)$$

Questão 2: gabarito (2a, 2b, 2c)

```
(%i25) F  : x*y*(6 - 2*x - y);
```
(%o25)
$$x\,(-y-2\,x+6)\,y$$

```
(%i26) F  : expand(F);
```
(%o26)
$$-\left(x\,y^2\right)-2\,x^2\,y+6\,x\,y$$

```
(%i27) P1 : [0,6]$
(%i28) P2 : [1,2]$
(%i29) P3 : [3,0]$
(%i30) P4 : [0,0]$
(%i31) /* (2a: 0.5 pts) */
       D2(W(x,y));
```
(%o31)
$$\begin{pmatrix} W\,(x,y) & & \\ \mathrm{W\_x}\,(x,y) & \mathrm{W\_y}\,(x,y) & \\ \mathrm{W\_xx}\,(x,y) & \mathrm{W\_xy}\,(x,y) & \mathrm{W\_yy}\,(x,y) \end{pmatrix}$$

```
(%i32) F;
```
(%o32)
$$-\left(x\,y^2\right)-2\,x^2\,y+6\,x\,y$$

```
(%i33) D2F : D2(F);
```
(%o33)
$$\begin{pmatrix} -\left(x\,y^2\right)-2\,x^2\,y+6\,x\,y & & \\ -y^2-4\,x\,y+6\,y & -(2\,x\,y)-2\,x^2+6\,x & \\ -(4\,y) & -(2\,y)-4\,x+6 & -(2\,x) \end{pmatrix}$$

```
(%i34) /* (2b: 0.5 pts) */
       [P1, D2F, D2FP1:D2at(P1,F)];
```
(%o34)
$$\left[[0,6]\,,\begin{pmatrix} -\left(x\,y^2\right)-2\,x^2\,y+6\,x\,y & & \\ -y^2-4\,x\,y+6\,y & -(2\,x\,y)-2\,x^2+6\,x & \\ -(4\,y) & -(2\,y)-4\,x+6 & -(2\,x) \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ -24 & -6 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

```
(%i35) [P2, D2F, D2FP2:D2at(P2,F)];
```
(%o35)
$$\left[[1,2]\,,\begin{pmatrix} -\left(x\,y^2\right)-2\,x^2\,y+6\,x\,y & & \\ -y^2-4\,x\,y+6\,y & -(2\,x\,y)-2\,x^2+6\,x & \\ -(4\,y) & -(2\,y)-4\,x+6 & -(2\,x) \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 4 & & \\ 0 & 0 & \\ -8 & -2 & -2 \end{pmatrix}\right]$$

```
(%i36) [P3, D2F, D2FP3:D2at(P3,F)];
```
(%o36)
$$\left[[3,0]\,,\begin{pmatrix} -\left(x\,y^2\right)-2\,x^2\,y+6\,x\,y & & \\ -y^2-4\,x\,y+6\,y & -(2\,x\,y)-2\,x^2+6\,x & \\ -(4\,y) & -(2\,y)-4\,x+6 & -(2\,x) \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix}\right]$$

```
(%i37) [P4, D2F, D2FP4:D2at(P4,F)];
```
(%o37)
$$\left[[0,0]\,,\begin{pmatrix} -\left(x\,y^2\right)-2\,x^2\,y+6\,x\,y & & \\ -y^2-4\,x\,y+6\,y & -(2\,x\,y)-2\,x^2+6\,x & \\ -(4\,y) & -(2\,y)-4\,x+6 & -(2\,x) \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

```
(%i38) /* (2c: 1.0 pts) */
       TM2([x0,y0],W(x,y));
```
(%o38)
$$\mathrm{TM2}\,([\mathrm{x0},\mathrm{y0}]\,,W\,(x,y))$$

```
(%i39) [P1, D2FP1, T2M(P1,F), T2(P1,F)];
```
(%o39)
$$\left[[0,6]\,,\begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ -24 & -6 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ -\left(12\,\mathrm{Dx}^2\right) & -(6\,\mathrm{Dx}\,\mathrm{Dy}) & 0 \end{pmatrix},-(6\,\mathrm{Dx}\,\mathrm{Dy})-12\,\mathrm{Dx}^2\right]$$

```
(%i40) [P2, D2FP2, T2M(P2,F), T2(P2,F)];
```
(%o40)
$$\left[[1,2]\,,\begin{pmatrix} 4 & & \\ 0 & 0 & \\ -8 & -2 & -2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 4 & & \\ 0 & 0 & \\ -\left(4\,\mathrm{Dx}^2\right) & -(2\,\mathrm{Dx}\,\mathrm{Dy}) & -\mathrm{Dy}^2 \end{pmatrix},-\mathrm{Dy}^2-2\,\mathrm{Dx}\,\mathrm{Dy}-4\,\mathrm{Dx}^2+4\right]$$

```
(%i41) [P3, D2FP3, T2M(P3,F), T2(P3,F)];
```
(%o41)
$$\left[[3,0]\,,\begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ 0 & -(6\,\mathrm{Dx}\,\mathrm{Dy}) & -\left(3\,\mathrm{Dy}^2\right) \end{pmatrix},-\left(3\,\mathrm{Dy}^2\right)-6\,\mathrm{Dx}\,\mathrm{Dy}\right]$$

```
(%i42) [P4, D2FP4, T2M(P4,F), T2(P4,F)];
```
(%o42)
$$\left[[0,0]\,,\begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 6\,\mathrm{Dx}\,\mathrm{Dy} & 0 \end{pmatrix},6\,\mathrm{Dx}\,\mathrm{Dy}\right]$$

Questão 2: gabarito (2d)

```
(%i43) /* (2d: 0.5 pts) */
       grad(F) := [diff(F,x),diff(F,y)]$
(%i44)    H(F) := hessian(F, [x,y])$
(%i45) detH(F) := determinant(H(F))$
(%i46) crit(F) := [F, grad(F), H(F), detH(F)]$
(%i47) crit(F) := matrix([F, grad(F)], [H(F), detH(F)])$
(%i48)    crit(W(x,y));
(%o48)
```

$$\begin{pmatrix} W(x,y) & [W\_x(x,y), W\_y(x,y)] \\ \begin{pmatrix} W\_xx(x,y) & W\_xy(x,y) \\ W\_xy(x,y) & W\_yy(x,y) \end{pmatrix} & W\_xx(x,y)\,W\_yy(x,y) - W\_xy(x,y)^2 \end{pmatrix}$$

```
(%i49) aa(crit(F), P1);
(%o49)
```

$$\begin{pmatrix} 0 & [0,0] \\ \begin{pmatrix} -24 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} & -36 \end{pmatrix}$$

```
(%i50) aa(crit(F), P2);
(%o50)
```

$$\begin{pmatrix} 4 & [0,0] \\ \begin{pmatrix} -8 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} & 12 \end{pmatrix}$$

```
(%i51) aa(crit(F), P3);
(%o51)
```

$$\begin{pmatrix} 0 & [0,0] \\ \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} & -36 \end{pmatrix}$$

```
(%i52) aa(crit(F), P4);
(%o52)
```

$$\begin{pmatrix} 0 & [0,0] \\ \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} & -36 \end{pmatrix}$$

```
(%i53) /* definicao da funcao G */
       P2;
(%o53)
```

$$[1,2]$$

```
(%i54) T2(P2,F);
(%o54)
```

$$-\mathrm{Dy}^2 - 2\,\mathrm{Dx}\,\mathrm{Dy} - 4\,\mathrm{Dx}^2 + 4$$

```
(%i55) G__ :                          T2(P2,F);
(%o55)
```

$$-\mathrm{Dy}^2 - 2\,\mathrm{Dx}\,\mathrm{Dy} - 4\,\mathrm{Dx}^2 + 4$$

```
(%i56) G_  : subst([Dx=x-1,Dy=y-2], T2(P2,F));
(%o56)
```

$$-(2\,(x-1)\,(y-2)) - (y-2)^2 - 4\,(x-1)^2 + 4$$

```
(%i57) G   : expand(G_);
(%o57)
```

$$-y^2 - 2\,x\,y + 6\,y - 4\,x^2 + 12\,x - 8$$

```
(%i58) /* definicao dos conjuntos B e C */
       inC_(x,y)   := y <= 6 - 2*x$
(%i59) inC (x,y,o) := if inC_(x,y) then o else ""$
(%i60) numsB(expr) :=
         apply(matrix,
               makelist(makelist(ev(expr), x,0,3),
                        y, seqby(6,0,-1)))$
(%i61) numsC(expr) :=
         apply(matrix,
               makelist(makelist(inC(x,y,ev(expr)), x,0,3),
                        y, seqby(6,0,-1)))$
(%i62) numsB([x,y]);
(%o62)
```

$$\begin{pmatrix} [0,6] & [1,6] & [2,6] & [3,6] \\ [0,5] & [1,5] & [2,5] & [3,5] \\ [0,4] & [1,4] & [2,4] & [3,4] \\ [0,3] & [1,3] & [2,3] & [3,3] \\ [0,2] & [1,2] & [2,2] & [3,2] \\ [0,1] & [1,1] & [2,1] & [3,1] \\ [0,0] & [1,0] & [2,0] & [3,0] \end{pmatrix}$$

```
(%i63) numsC([x,y]);
(%o63)
```

$$\begin{pmatrix} [0,6] & & & \\ [0,5] & & & \\ [0,4] & [1,4] & & \\ [0,3] & [1,3] & & \\ [0,2] & [1,2] & [2,2] & \\ [0,1] & [1,1] & [2,1] & \\ [0,0] & [1,0] & [2,0] & [3,0] \end{pmatrix}$$

Questão 2: gabarito (2e, 2f)

```
(%i64) /* (2e: 0.5 pts) */
       F;
```
(%o64)

$$-\left(x\,y^2\right)-2\,x^2\,y+6\,x\,y$$

```
(%i65) [numsC(   x  *y),
        numsC(   x^2*y),
        numsC(   x  *y^2)];
```
(%o65)

$$\left[\begin{pmatrix}0&&&\\0&&&\\0&4&&\\0&3&&\\0&2&4&\\0&1&2&\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&&&\\0&&&\\0&4&&\\0&3&&\\0&2&8&\\0&1&4&\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&&&\\0&&&\\0&16&&\\0&9&&\\0&4&8&\\0&1&2&\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right]$$

```
(%i66) [numsC( 6*x  *y),
        numsC(-2*x^2*y),
        numsC(  -x  *y^2),
        numsC(F)];
```
(%o66)

$$\left[\begin{pmatrix}0&&&\\0&&&\\0&24&&\\0&18&&\\0&12&24&\\0&6&12&\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&&&\\0&&&\\0&-8&&\\0&-6&&\\0&-4&-16&\\0&-2&-8&\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&&&\\0&&&\\0&-16&&\\0&-9&&\\0&-4&-8&\\0&-1&-2&\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&&&\\0&&&\\0&0&&\\0&3&&\\0&4&0&\\0&3&2&\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right]$$

```
(%i67) /* (2f: 1.0 pts) */
       G__;
```
(%o67)

$$-\mathrm{Dy}^2-2\,\mathrm{Dx}\,\mathrm{Dy}-4\,\mathrm{Dx}^2+4$$

```
(%i68) G_;
```
(%o68)

$$-\left(2\,(x-1)\,(y-2)\right)-(y-2)^2-4\,(x-1)^2+4$$

```
(%i69) Dx : x-1$
(%i70) Dy : y-2$
(%i71) [numsC(Dx^2),
        numsC(Dx*Dy),
        numsC(Dy^2)];
```
(%o71)

$$\left[\begin{pmatrix}1&&&\\1&&&\\1&0&&\\1&0&&\\1&0&1&\\1&0&1&\\1&0&1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4&&&\\-3&&&\\-2&0&&\\-1&0&&\\0&0&0&\\1&0&-1&\\2&0&-2&-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}16&&&\\9&&&\\4&4&&\\1&1&&\\0&0&0&\\1&1&1&\\4&4&4&4\end{pmatrix}\right]$$

```
(%i72) [numsC(4),
        numsC(-4*Dx^2),
        numsC(-2*Dx*Dy),
        numsC(  -Dy^2)];
```
(%o72)

$$\left[\begin{pmatrix}4&&&\\4&&&\\4&4&&\\4&4&&\\4&4&4&\\4&4&4&\\4&4&4&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4&&&\\-4&&&\\-4&0&&\\-4&0&&\\-4&0&-4&\\-4&0&-4&\\-4&0&-4&-16\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8&&&\\6&&&\\4&0&&\\2&0&&\\0&0&0&\\-2&0&2&\\-4&0&4&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-16&&&\\-9&&&\\-4&-4&&\\-1&-1&&\\0&0&0&\\-1&-1&-1&\\-4&-4&-4&-4\end{pmatrix}\right]$$

```
(%i73) numsC(G);
```
(%o73)

$$\begin{pmatrix}-8&&&\\-3&&&\\0&0&&\\1&3&&\\0&4&0&\\-3&3&1&\\-8&0&0&-8\end{pmatrix}$$

Questão 2: gabarito (2g)

```
(%i74) /* (2g: 2.5 pts) */
       grad(F);
```
(%o74)

$$\left[-y^2-4\,x\,y+6\,y,-(2\,x\,y)-2\,x^2+6\,x\right]$$

```
(%i75) Fx : diff(F,x);
```
(%o75)

$$-y^2-4\,x\,y+6\,y$$

```
(%i76)  -4*x*y + 6*y - y^2;
```
(%o76)

$$-y^2-4\,x\,y+6\,y$$

```
(%i77) [numsC(-4*x*y),
        numsC(6*y),
        numsC(-y^2),
        numsC(Fx)];
```
(%o77)

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & -16 & & \\ 0 & -12 & & \\ 0 & -8 & -16 & \\ 0 & -4 & -8 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 36 & & & \\ 30 & & & \\ 24 & 24 & & \\ 18 & 18 & & \\ 12 & 12 & 12 & \\ 6 & 6 & 6 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -36 & & & \\ -25 & & & \\ -16 & -16 & & \\ -9 & -9 & & \\ -4 & -4 & -4 & \\ -1 & -1 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 5 & & & \\ 8 & -8 & & \\ 9 & -3 & & \\ 8 & 0 & -8 & \\ 5 & 1 & -3 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

```
(%i78) Fy : diff(F,y);
```
(%o78)

$$-(2\,x\,y)-2\,x^2+6\,x$$

```
(%i79)  -2*x*y + 6*x - 2*x^2;
```
(%o79)

$$-(2\,x\,y)-2\,x^2+6\,x$$

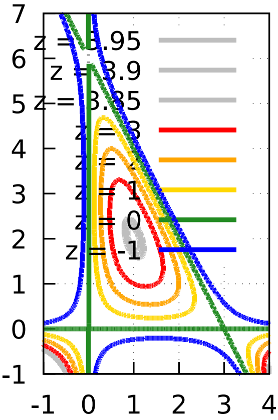
```
(%i80) [numsC(-2*x*y),
        numsC(6*x),
        numsC(-2*x^2),
        numsC(Fy)];
```
(%o80)

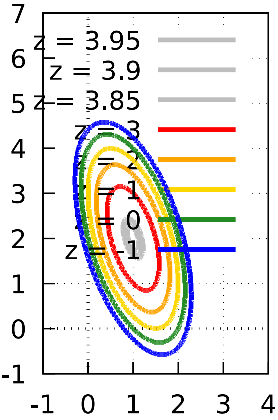
$$\left[\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & -8 & & \\ 0 & -6 & & \\ 0 & -4 & -8 & \\ 0 & -2 & -4 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & 6 & & \\ 0 & 6 & & \\ 0 & 6 & 12 & \\ 0 & 6 & 12 & \\ 0 & 6 & 12 & 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & -2 & & \\ 0 & -2 & & \\ 0 & -2 & -8 & \\ 0 & -2 & -8 & \\ 0 & -2 & -8 & -18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & -4 & & \\ 0 & -2 & & \\ 0 & 0 & -4 & \\ 0 & 2 & 0 & \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

```
(%i81)
       numsC(grad(F));
```
(%o81)

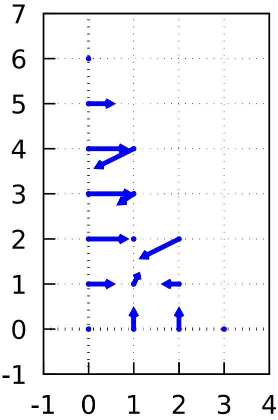
$$\begin{pmatrix} [0,0] & & & \\ [5,0] & & & \\ [8,0] & [-8,-4] & & \\ [9,0] & [-3,-2] & & \\ [8,0] & [0,0] & [-8,-4] & \\ [5,0] & [1,2] & [-3,0] & \\ [0,0] & [0,4] & [0,4] & [0,0] \end{pmatrix}$$

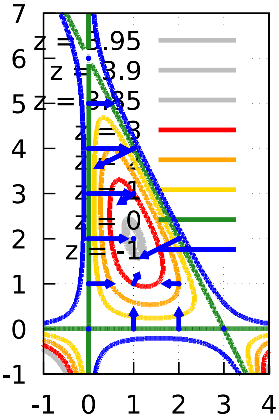
Questão 2: curvas de nível da F e da G





Questão 2: gradientes e curvas de nível da F





Cálculo 3 - 2024.2

Aulas 24 a 26: abertos e fechados em $\mathbb{R}^2$

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2024.2-C3.html

Links

3hT150 (2023.2) Versão anterior destes slides

Bort4p1 (p.121) 4 Continuidade, noções de topologia e o teorema de Weierstrass
Bort4p1 (p.121) 4.1 Porque funções contínuas são importantes?
Bort4p9 (p.129) 4.3 O teorema de Weierstrass no caso com n variáveis
Bort4p19 (p.139) Distância euclidiana
Bort4p22 (p.142) definição de bola aberta
Bort4p28 (p.148) definição de conjunto aberto

Introdução
Dê uma olhada no capítulo 4 do Bortolossi...
Comece pela seção 4.1, “Por que funções contínuas são importantes”, depois leia a seção 4.3, sobre o Teorema de Weirstrass em n variáveis, e relembre a definição de distância euclidiana na p.139.

Nós vamos começar entendendo as definições das páginas 142 até 148, e vamos reescrevê-las de um jeito bem mais curto.

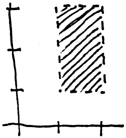
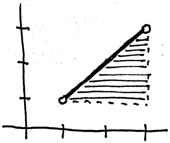
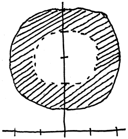
Nós vamos ver como fazer hipóteses sobre os exercícios dos próximos dois slides, como testar essas hipóteses, e como descartar as hipóteses erradas.

Nove subconjuntos de $\mathbb{R}^2$

(Compare com a p.130 do Bortolossi...)

Sejam:

$$
\begin{array}{rcl}
C_1 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2<y\le 3\,\},\\
C_2 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2<y\le 3 \ \text{ e } \ 1\le x<4\,\},\\
C_3 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(1,2))\le 2\,\},\\
C_4 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1<d((x,y),(1,2))\le 2\,\},\\
C_5 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(1,2))\le 2 \ \text{ e } \ 1<x\,\},\\
C_6 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>x\,\},
\end{array}
$$

$C_7 =$  , $C_8 =$  , $C_9 =$  .

Exercício 1.
Represente graficamente os conjuntos $C_1, \ldots, C_6$.

Exercício 2.
Represente os conjuntos C_7, C_8, C_9
em "notação de conjuntos" — isto é,
na forma $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ldots \}$.

Bolas abertas e fechadas
Se P é um ponto de $\mathbb{R}^n$ então a
bola fechada de raio ε em torno de P, $\overline{\mathsf{B}}_\varepsilon(P)$, e a
bola aberta de raio ε em torno de P, $\mathsf{B}_\varepsilon(P)$,
são definidas assim:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\mathsf{B}}_\varepsilon(P) & = & \{\, Q \in \mathbb{R}^n \mid d(P,Q) \le \varepsilon \,\} \\ \mathsf{B}_\varepsilon(P) & = & \{\, Q \in \mathbb{R}^n \mid d(P,Q) < \varepsilon \,\} \end{array}$$

Por exemplo, se $P = 6 \in \mathbb{R}^1$ então:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\mathsf{B}}_2(6) & = & \{\, Q \in \mathbb{R}^1 \mid d(6,Q) \le 2 \,\} \\ & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid d(6,x) \le 2 \,\} \\ & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(6-x)^2} \le 2 \,\} \\ & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid |x-6| \le 2 \,\} \\ & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid -2 \le x-6 \le 2 \,\} \\ & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid -2+6 \le x \le 2+6 \,\} \\ & = & [4,8] \end{array}$$

Exercício 3.
Represente graficamente:

a) $\overline{\mathsf{B}}_1((2,2))$,
b) $\mathsf{B}_1((2,2))$.

Dica: estes conjuntos vão parecer muito mais com "bolas de verdade" do que o conjunto $\overline{\mathsf{B}}_2(6)$ do slide anterior.

Lembre que a gente desenha a fronteira de um conjunto tracejada quando a gente quer indicar que os pontos da fronteira não pertencem ao conjunto e a gente desenha ela sólida quando quer indicar que os pontos dela pertencem ao conjunto. Veja os desenhos dos conjuntos C_8 e C_9.

Exercício 4.
Aqui você vai ter que ser capaz de visualizar bolas sobrepostas a conjuntos que você já desenhou sem desenhar estas bolas. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.

a) $\mathsf{B}_{0.1}((0,2.5)) \subseteq C_1$
b) $\mathsf{B}_{0.5}((0,2.5)) \subseteq C_1$
c) $\overline{\mathsf{B}}_{0.5}((0,2.5)) \subseteq C_1$
d) $\mathsf{B}_{0.1}((1,3)) \subseteq C_2$
e) $\mathsf{B}_{0.1}((2.5,2.5)) \subseteq C_2$
f) $\mathsf{B}_{1}((2,2)) \subseteq C_3$
g) $\overline{\mathsf{B}}_{1}((2,2)) \subseteq C_3$
h) $\mathsf{B}_{0.5}((1,0.5)) \subseteq C_4$
i) $\mathsf{B}_{0.1}((0.5,2)) \subseteq C_5$
j) $\mathsf{B}_{0.001}((1.1,1.01)) \subseteq C_8$

O interior de um conjunto (e conjuntos abertos)
Def: o *interior* de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Int}(A)$,
é definido como:

$$\mathrm{Int}(A) \;=\; \{\, P \in A \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq A \,\}.$$

Note que isto sempre é verdade: $\mathrm{Int}(A) \subset A$.
Dizemos que um conjunto A é *aberto* quando $A \subset \mathrm{Int}(A)$.

Infinitas operações / seja com o Bob

Pra entender a definição de interior e as próximas você vai precisar fazer um número infinito de operações pra chegar no resultado, e pra isso você vai ter que usar algumas técnicas que nós vimos em Cálculo 2 no semestre passado. Os links abaixo vão pras versões deste semestre do material sobre essas técnicas, que ficou bem melhor do que o do semestre passado.

Veja este PDF, a partir da página 11 dele:
`http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-somas-de-riemann.pdf`

e relembre as definições de inf e sup daqui:
`http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-TFC1-e-TFC2.pdf`

Exercício 5.
Seja $A = [2,4] \subset \mathbb{R}^1$.
Verifique que A não é aberto usando
a definição do slide anterior.
Dica: como $A = [2,4]$, dá pra começar por:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & A & & \text{não é aberto} \\
\Leftrightarrow & A & \not\subseteq & \mathrm{Int}(A) \\
\Leftrightarrow & A & \not\subseteq & \{\, P \in A \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq A \,\} \\
\Leftrightarrow & [2,4] & \not\subseteq & \{\, P \in [2,4] \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq [2,4] \,\}
\end{array}
$$

Pros passos seguintes você vai precisar usar
muitas das "traduções" dos próximos dois slides.

Algumas traduções

$$
\begin{array}{rcl}
A \subset B & = & \forall a \in A. a \in B \\
A = B & = & (A \subset B) \land (B \subset A) \\
\neg(P \land Q) & = & \neg P \lor \neg Q \\
\neg(P \lor Q) & = & \neg P \land \neg Q \\
\neg(\forall a \in A. P(a)) & = & \exists a \in A. \neg P(a) \\
\neg(\exists a \in A. P(a)) & = & \forall a \in A. \neg P(a) \\
x \in \{\, a \in A \mid P(a) \,\} & = & x \in A \land P(x) \\
\neg(P \to Q) & = & P \land \neg Q \\
[20, 42) & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid 20 \leq x < 42 \,\} \\
20 \leq x < 42 & = & 20 \leq x \land x < 42
\end{array}
$$

Lembre que ‘$\land$’ é “e”, ‘$\lor$’ é “ou”, ‘$\neg$’ é “não”, ‘$\to$’ é “implica”.

Alguns exemplos de traduções

$$\begin{array}{rl}
& [a,b] \subset [20,42) \\
= & \forall x \in [a,b].x \in [20,42) \\
= & \forall x \in [a,b].20 \leq x < 42 \\
= & \forall x \in \mathbb{R}.x \in [a,b] \to 20 \leq x < 42 \\
= & \forall x \in \mathbb{R}.a \leq x \leq b \to 20 \leq x < 42
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
& \neg([a,b] \subset [20,42)) \\
= & \neg(\forall x \in \mathbb{R}.a \leq x \leq b \to 20 \leq x < 42) \\
= & \exists x \in \mathbb{R}.\neg(a \leq x \leq b \to 20 \leq x < 42) \\
= & \exists x \in \mathbb{R}.\neg(a \leq x \leq b) \land (20 \leq x < 42) \\
= & \exists x \in \mathbb{R}.\neg(a \leq x \land x \leq b) \land (20 \leq x < 42) \\
= & \exists x \in \mathbb{R}.(\neg(a \leq x) \lor \neg(x \leq b)) \land (20 \leq x < 42) \\
= & \exists x \in \mathbb{R}.(x < a \lor b < x) \land (20 \leq x < 42)
\end{array}$$

Exercício 6.

Represente graficamente:

a) $\mathrm{Int}(C_8)$,
b) $\mathrm{Int}(C_4)$,
c) $\mathrm{Int}(C_5)$,
d) $\mathrm{Int}(\mathsf{B}_1((2,2)))$.

O fecho de um conjunto (e conjuntos fechados)
Def: o *fecho* de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$, $\overline{A}$,
é definido como:

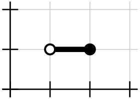
$$\overline{A} \;=\; \{\, P \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \cap A \neq \emptyset \,\}$$

Compare com a definição do interior:

$$\mathrm{Int}(A) \;=\; \{\, P \in A \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq A \,\}.$$

Isto aqui sempre é verdade: $A \subset \overline{A}$.
Quando $\overline{A} \subset A$ dizemos que A é um conjunto *fechado*.

Exercício 7.
Digamos que:

$D_1 \quad =$ 

Represente graficamente:
a) $\overline{C_8}$
b) $\overline{D_1}$
c) $\mathrm{Int}(D_1)$

Um aviso sobre a P2 (de 2021.2)

Em quase todos os problemas deste PDF é muito mais fácil mostrar que uma resposta está errada do que mostrar que ela está certa... e o método pra mostrar que uma resposta está errada vai ser um dos assuntos principais da P2.

Imagem inversa

Algumas das igualdades abaixo são definições, as outras são exemplos.

$$
\begin{array}{rcl}
H(x,y) &=& xy \\
H_I &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)\in I\,\} \\
H_{[a,b]} &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)\in [a,b]\,\} \\
H_{[0,1]} &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)\in [0,1]\,\} \\
H^{-1}(a) &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)= a\,\} \\
H^{-1}(I) &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)\in I\,\} \\
H^{-1}([0,1]) &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)\in [0,1]\,\} \\
&=& H_{[0,1]}
\end{array}
$$

Exercício 8.
Represente graficamente:

$$
\begin{array}{rcl}
C_1 &=& H^{-1}(0) \\
C_2 &=& H^{-1}(1) \\
C_3 &=& H^{-1}([0,1]) \\
C_4 &=& H^{-1}((0,1)) \\
C_5 &=& \mathrm{Int}(C_3) \\
C_6 &=& \overline{C_4} \\
C_7 &=& H^{-1}(4) \\
C_8 &=& H^{-1}([0,4]) \\
C_9 &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x \text{ e } 1\le y\,\} \\
C_{10} &=& C_8\cap C_9
\end{array}
$$

Conjuntos limitados e compactos
Um conjunto $C\in\mathbb{R}^2$ é *limitado* quando ele obedece isto:

$$\exists r\in\mathbb{R}.\, C\subset B_r((0,0))$$

.
Um conjunto $C\in\mathbb{R}^2$ é *compacto* quando ele é fechado e limitado.

Exercício 9.
Preencha a tabela abaixo com '**V**'s e '**F**'s.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_{10}
é aberto									
é fechado									
é limitado									
é compacto									

Máximos numa elipse

Dê uma olhada nas figuras das páginas 355 e 356 do Bortolossi, no capítulo 10 dele:
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-10.pdf#page=5
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-10.pdf#page=6
Ele usa:

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & x^2+y^2 \\ g(x,y) & = & \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \\ D_2 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)\le 1\,\} \\ D_3 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)=1\,\} \end{array}$$

D_2 é uma elipse "cheia" incluindo o interior dela, e
D_3 é só a fronteira de D_2.
Note que $(-2,0),(2,0),(0,3),(0,-3)\in D_3$.

Exercício 10.
a) Desenhe algumas curvas de nível de $f(x,y)$.

b) Na página 354 o Bortolossi desenha curvas de nível dentro de um quadrado. Desenhe algumas curvas de nível de $f(x,y)$ dentro da "elipse cheia" D_2.

c) Tente descobrir *no olhômetro* quais são os máximos e mínimos de $f(x,y)$ em D_2. Dica: o Bortolossi leva várias páginas fazendo isso — leia o texto dele!

Dica: o objetivo do item (c) é você aprender a resolver só com curvas de nível as idéias que o Bortolossi apresenta usando figuras em 3D. Se você não conseguir fazer a tradução das figuras 3D pra curvas de nível direto você pode começar desenhando "cortes" sobre as figuras 3D, como na questão do mini-teste 1 de 2020.2:
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-tudo.pdf#page=83

...e repare que quando o Bortolossi chega no capítulo 12 ele passa a usar quase só curvas de nível e gradientes — ele praticamente abandona as figuras 3D:
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-12.pdf

Cálculo 3 - 2024.2

P2 (segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.2-C3.html

Links

http://anggtwu.net/e/maxima.e.html#2024.2-C3-P2
(find-es "maxima" "2024.2-C3-P2")

Questão 1

(Total: 10.0 pts)

Sejam:

$$\begin{array}{rcl} F(x,y) &=& x+y^2 \\ G(x,y) &=& 2x+y \\ r &=& G^{-1}(-2) \\ A &=& \{-2,-1,0,1,2\}^2 \\ B &=& [-2,2]^2 \\ C &=& \{\,(x,y)\in B \mid G(x,y)\geq -2\,\} \\ D &=& \{\,(x,y)\in B \mid G(x,y)= -2\,\} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} F_B &:& B &\to& \mathbb{R} \\ && (x,y) &\mapsto& F(x,y) \\ F_C &:& C &\to& \mathbb{R} \\ && (x,y) &\mapsto& F(x,y) \end{array}$$

a) **(0.5 pts)** Faça o diagrama de numerozinhos da função F. Desenhe um numerozinho para cada ponto de A.

b) **(0.5 pts)** Idem, mas para a função G.

c) **(0.5 pts)** Desenhe as curvas de nível da G para $z=-2,-1,0,1,2$.

d) **(0.5 pts)** Desenhe os conjuntos r,A,B,C,D.

e) **(0.5 pts)** Desenhe as curvas de nível da F para $z=-1,0,1,2$.

f) **(0.5 pts)** Desenhe as curvas de nível da F_B para $z=-1,0,1,2$. Inclua a fronteira do domínio da F_B no seu desenho pra leitor conseguir ver até onde essas curvas de nível vão.

g) **(1.0 pts)** Desenhe as curvas de nível da F_C para $z=-1,0,1,2$. Inclua a fronteira do domínio da F_C no seu desenho pra leitor conseguir ver até onde essas curvas de nível vão.

h) **(1.0 pts)** Dê coordenadas *aproximadas* para os máximos e mínimos locais da função F_C.

Nos próximos itens você vai tentar fazer um truque que o Bortolossi ensina no capítulo 12 dele, em que ele mostra como encontrar máximos e mínimos locais na fronteira a partir de pontos na fronteira em que dois vetores gradientes são paralelos – e com isso você vai conseguir fazer uma versão melhorada do seu item (h).

Digamos que:

$$\begin{array}{rcl} d(x) &=& ax+b \\ s &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=d(x)\,\} \\ P(x) &=& (x,d(x)) \end{array}$$

tais que $s=r$.

Isso (↑) é uma *definição indireta*. O autor – no caso, eu – não está dizendo quais são os valores de a e b, e o leitor – no caso, você – vai ter que se virar pra descobrir.

i) **(0.5 pts)** Encontre a e b por chutar e testar. Você vai começar fazendo vários chutes-e-testes assim:

Se $(a,b)=(0,1)$ então $s=$  e $s\neq r$ =(

Se $(a,b)=(1,1)$ então $s=$  e $s\neq r$ =(

j) **(0.5 pts)** Calcule $\nabla F(x,y)$, $\nabla G(x,y)$, $\nabla F(P(x))$ e $\nabla G(P(x))$.

k) **(1.0 pts)** Faça uma cópia do seu desenho do item (g) incluindo os vetores $P(x)+\nabla F(P(x))$ e $P(x)+\nabla G(P(x))$ para os seguintes valores de x: $x=-1.5$, $x=-1$, $x=-0.5$.

l) **(1.0 pts)** Encontre o valor de x que faz com que $\nabla F(P(x))$ e $\nabla G(P(x))$ fiquem paralelos. Sugestão: faça uma tabela e encontre ele por chutar e testar. Chame esse valor de x de x_m.

m) **(1.0 pts)** Faça uma cópia do seu desenho do item (g) incluindo os vetores $P(x)+\nabla F(P(x))$ e $P(x)+\nabla G(P(x))$ para $x=x_m$. Faça ele BEM grande e capriche!

n) **(1.0 pts)** Calcule $F(D)$ e $F(C)$..

Lembre que se $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ então:

$$\begin{array}{rcl} F(A) & = & \{\, F(x,y) \mid (x,y) \in A \,\} \\ F^{-1}(b) & = & \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = b \,\} \\ F^{-1}(B) & = & \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) \in B \,\} \end{array}$$

e que quando a gente escreve

$$\begin{array}{rccl} G : & A & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & F(x,y) \end{array}$$

isso define uma função G que se comporta como a F dentro do conjunto A, mas o domínio dessa G é só o conjunto A – quando a G recebe um ponto de $\mathbb{R}^2 \backslash A$ ela dá um erro.

Lembre que dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não nulos são *paralelos* quando $\exists \lambda \in \mathbb{R}. \vec{v} = \lambda \vec{w}$. Por exemplo, $\overrightarrow{(2,3)}$ e $\overrightarrow{(20,30)}$ são paralelos mas $\overrightarrow{(2,3)}$ e $\overrightarrow{(5,4)}$ não são paralelos.

```
(%i1) [xmin,xmax, ymin,ymax] : [-2,2, -2,2]$
(%i2) numsB(expr) :=
        apply(matrix,
              makelist(makelist(ev(expr), x,-2,2),
                       y, seqby(2,-2,-1)))$

(%i3) F : x + y^2$
(%i4) G : 2*x + y$
(%i5) define(F(x,y), F);
```

(%o5)

$$F(x,y) := y^2 + x$$

```
(%i6) define(G(x,y), G);
```

(%o6)

$$G(x,y) := y + 2\,x$$

```
(%i7)
      /* (a): 0.5 pts */
      numsB(F);
```

(%o7)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

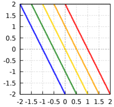
```
(%i8)
      /* (b): 0.5 pts */
      numsB(G);
```

(%o8)

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ -3 & -1 & 1 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -5 & -3 & -1 & 1 & 3 \\ -6 & -4 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

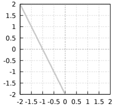
```
(%i9) /* (c): 0.5 pts */
      G_B : [myimp1(G=-2, lc(blue)),
             myimp1(G=-1, lc(forest_green)),
             myimp1(G=0,  lc(gold)),
             myimp1(G=1,  lc(orange)),
             myimp1(G=2,  lc(red))]$

(%i10) myqdrawp(xyrange(), G_B);

       /* (d): 0.5 pts */
```

(%o10)



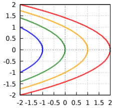

```
(%i11) D_B : [myimp1(G=-2, lc(gray))]$

(%i12) myqdrawp(xyrange(), D_B);
```

(%o12)



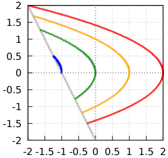

```
(%i13)
       /* (e): 0.5 pts */
       /* (f): 0.5 pts */
       F_B : [myimp1(F=-1, lc(blue)),
              myimp1(F=0,  lc(forest_green)),
              myimp1(F=1,  lc(orange)),
              myimp1(F=2,  lc(red))]$
(%i14) myqdrawp(xyrange(), F_B);
```

(%o14)



```
(%i15) /* (g): 1.0 pts */
       F_ys(z) := block([ys],
         ys : solve([G=-2,F=z],[x,y]),
         [rhs(ys[1][2]), rhs(ys[2][2])])$
(%i16) F_miny(z) := apply('min, F_ys(z))$
(%i17) F_maxy(z) := apply('max, F_ys(z))$
(%i18) F_C_z(z,color) := myapply_fl('imp1,
              F=z, x,-2,2, y,F_miny(z),F_maxy(z), lc(color))$
(%i19) F_C : [F_C_z(-1, blue),
              F_C_z( 0, forest_green),
              F_C_z( 1, orange),
              F_C_z( 2, red)]$
(%i20) myqdrawp(xyrange(), D_B, F_C);
```

(%o20)




```
(%i21) /* (h): 1.0 pts */
       [F(-1,0), F(2,-2), F(2,2)];
```

(%o21)

$$[-1, 6, 6]$$

```
(%i22) /* (i): 0.5 pts */
       G=-2;
```

(%o22)

$$y + 2\,x = -2$$

```
(%i23) solve(G=-2, y);
```

(%o23)

$$[y = -(2\,x) - 2]$$

```
(%i24) solve(G=-2, y)[1];
```

(%o24)

$$y = -(2\,x) - 2$$

```
(%i25) rhs(solve(G=-2, y)[1]);
```

(%o25)

$$-(2\,x) - 2$$

```
(%i26) define(d(x), rhs(solve(G=-2, y)[1]));
```

(%o26)

$$d(x) := -(2\,x) - 2$$

```
(%i27) define(P(x), [x,d(x)]);
```

(%o27)

$$P(x) := [x, -(2\,x) - 2]$$

```
(%i28) [a,b] : [-2,-2];
```

(%o28)

$$[-2, -2]$$

```
(%i29) /* (j): 0.5 pts */
       grad(F) := [diff(F,x), diff(F,y)]$
(%i30) define(gradF (x,y), grad(F));
```

(%o30)

$$\mathrm{gradF}\,(x,y) := [1, 2\,y]$$

```
(%i31) define(gradG (x,y), grad(G));
```

(%o31)

$$\mathrm{gradG}\,(x,y) := [2, 1]$$

```
(%i32) define(gradFP(x), apply('gradF, P(x)));
```

(%o32)

$$\mathrm{gradFP}\,(x) := [1, 2\,(-(2\,x) - 2)]$$

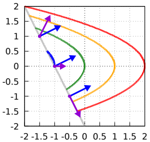
```
(%i33) define(gradGP(x), apply('gradG, P(x)));
```

(%o33)

$$\mathrm{gradGP}\,(x) := [2, 1]$$

```
(%i34) /* (k): 1.0 pts */
       gradsP(x) := [myPv_c(P(x),gradGP(x)/3, blue),
                     myPv_c(P(x),gradFP(x)/3, dark_violet)]$
(%i35) gradsP_3  : [gradsP(-1.5), gradsP(-1), gradsP(-0.5)]$
(%i36) myqdrawp(xyrange(), D_B, F_C, gradsP_3);
```

(%o36)




```
(%i37) /* (l): 1.0 pts */
       eq1 : 2*gradFP(x)    = gradGP(x);
```

(%o37)

$$[2, 4\,(-(2\,x) - 2)] = [2, 1]$$

```
(%i38) eq2 : 2*gradFP(x)[2] = gradGP(x)[2];
```

(%o38)

$$4\,(-(2\,x) - 2) = 1$$

```
(%i39)          solve(eq2, x);
```

(%o39)

$$\left[x = -\left(\frac{9}{8}\right)\right]$$

```
(%i40)          solve(eq2, x)[1];
```

(%o40)

$$x = -\left(\frac{9}{8}\right)$$

```
(%i41) xm : rhs(solve(eq2, x)[1]);  /*  -9/8  */
```

(%o41)

$$-\left(\frac{9}{8}\right)$$

```
(%i42) ym : d(xm);                  /*   1/4  */
```

(%o42)

$$\frac{1}{4}$$

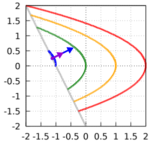
```
(%i43) Fm : F(xm,ym);               /* -17/16 */
```

(%o43)

$$-\left(\frac{17}{16}\right)$$

```
(%i44) /* (m): 1.0 pts */
(%i44) gradsP_xm : [gradsP(xm)]$
(%i45) myqdrawp(xyrange(), D_B, F_C, gradsP_xm);
```

(%o45)




```
(%i46) /* (n): 1.0 pts */
       Fnw : F(-2,d(-2));
```

(%o46)

$$2$$

```
(%i47) Fsw : F(0,d(0));
```

(%o47)

$$4$$

```
(%i48) Fne : F(2,2);
```

(%o48)

$$6$$

```
(%i49) Fse : F(2,-2);
```

(%o49)

$$6$$

```
(%i50)      [Fm, Fnw, Fsw];
```

(%o50)

$$\left[-\left(\frac{17}{16}\right), 2, 4\right]$$

```
(%i51) FD : [Fm, max(Fnw, Fsw)];
```

(%o51)

$$\left[-\left(\frac{17}{16}\right), 4\right]$$

```
(%i52) FC : [Fm, max(Fnw, Fsw, Fne, Fse)];
```

(%o52)

$$\left[-\left(\frac{17}{16}\right), 6\right]$$

Cálculo 3 - 2024.2

Prova de reposição (VR)
pra quem perdeu a P2

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.2-C3.html

Links

Gabarito em Maxima:

```
(find-angg "MAXIMA/2024-2-C3-VR.mac")
```

http://anggtwu.net/MAXIMA/2024-2-C3-VR.mac.html

Questão 1
(Total: 10.0 pts)
Sejam:

$$\begin{array}{rcl} F(x,y) &=& x+y^2 \\ G(x,y) &=& 3x+y \\ r &=& G^{-1}(-6) \\ A &=& \{-3-2,-1,0,1,2,3\}^2 \\ B &=& [-3,3]^2 \\ C &=& \{\,(x,y)\in B \mid G(x,y)\geq -6\,\} \\ D &=& \{\,(x,y)\in B \mid G(x,y)= -6\,\} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcl} F_B &:& B &\to& \mathbb{R} \\ && (x,y) &\mapsto& F(x,y) \\ F_C &:& C &\to& \mathbb{R} \\ && (x,y) &\mapsto& F(x,y) \end{array}$$

a) **(0.5 pts)** Faça o diagrama de numerozinhos da função F. Desenhe um numerozinho para cada ponto de A.

b) **(0.5 pts)** Idem, mas para a função G.

c) **(0.5 pts)** Desenhe as curvas de nível da G para $z=-2,-1,0,1,2$.

d) **(0.5 pts)** Desenhe os conjuntos r,A,B,C,D.

e) **(0.5 pts)** Desenhe as curvas de nível da F para $z=-2,-1,0,1,2$.

f) **(0.5 pts)** Desenhe as curvas de nível da F_B para $z=-2,-1,0,1,2$. Inclua a fronteira do domínio da F_B no seu desenho pra leitor conseguir ver até onde essas curvas de nível vão.

g) **(0.5 pts)** Desenhe as curvas de nível da F_C para $z=-2,-1,0,1,2$. Inclua a fronteira do domínio da F_C no seu desenho pra leitor conseguir ver até onde essas curvas de nível vão.

h) **(1.0 pts)** Dê coordenadas *aproximadas* para os máximos e mínimos locais da função F_C.

Nos próximos itens você vai tentar fazer um truque que o Bortolossi ensina no capítulo 12 dele, em que ele mostra como encontrar máximos e mínimos locais na fronteira a partir de pontos na fronteira em que dois vetores gradientes são paralelos – e com isso você vai conseguir fazer uma versão melhorada do seu item (h).

Digamos que:

$$\begin{array}{rcl} d(x) &=& ax+b \\ s &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=d(x)\,\} \\ P(x) &=& (x,d(x)) \end{array}$$

tais que $s=r$.

Isso (↑) é uma *definição indireta*. O autor – no caso, eu – não está dizendo quais são os valores de a e b, e o leitor – no caso, você – vai ter que se virar pra descobrir.

i) **(0.5 pts)** Encontre a e b por chutar e testar. Você vai começar fazendo vários chutes-e-testes assim:

Se $(a,b)=(0,1)$ então $s=$  e $s\neq r$ =(

Se $(a,b)=(1,1)$ então $s=$  e $s\neq r$ =(

j) **(1.0 pts)** Calcule $\nabla F(x,y)$, $\nabla G(x,y)$, $\nabla F(P(x))$ e $\nabla G(P(x))$. Dica: à primeira vista $\nabla F(P(x))$ tem duas interpretações possíveis – mas uma delas faz mais sentido do que a outra...

k) **(1.0 pts)** Faça uma cópia do seu desenho do item (g) incluindo os vetores $P(x)+\nabla F(P(x))$ e $P(x)+\nabla G(P(x))$ para os seguintes valores de x: $x=-2.5$, $x=-2$, $x=-1.5$.

l) **(1.0 pts)** Encontre o valor de x que faz com que $\nabla F(P(x))$ e $\nabla G(P(x))$ fiquem paralelos. Sugestão: faça uma tabela e encontre ele por chutar e testar. Chame esse valor de x de x_m.

m) **(1.0 pts)** Faça uma cópia do seu desenho do item (g) incluindo os vetores $P(x)+\nabla F(P(x))$ e $P(x)+\nabla G(P(x))$ para $x=x_m$. Faça ele BEM grande e capriche!

n) **(1.0 pts)** Calcule $F(D)$ e $F(C)$..

Lembre que se $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ então:

$$\begin{array}{rcl} F(A) & = & \{\, F(x,y) \mid (x,y) \in A \,\} \\ F^{-1}(b) & = & \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = b \,\} \\ F^{-1}(B) & = & \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) \in B \,\} \end{array}$$

e que quando a gente escreve

$$\begin{array}{rccl} G : & A & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & F(x,y) \end{array}$$

isso define uma função G que se comporta como a F dentro do conjunto A, mas o domínio dessa G é só o conjunto A – quando a G recebe um ponto de $\mathbb{R}^2 \backslash A$ ela dá um erro.

Lembre que dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não nulos são *paralelos* quando $\exists \lambda \in \mathbb{R}. \vec{v} = \lambda \vec{w}$. Por exemplo, $\overrightarrow{(2,3)}$ e $\overrightarrow{(20,30)}$ são paralelos mas $\overrightarrow{(2,3)}$ e $\overrightarrow{(5,4)}$ não são paralelos.

Cálculo 3 - 2024.2

Prova suplementar (VS)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.2-C3.html

Links

Questão 1
(Total: 10.0 pts)
Sejam:

$$\begin{array}{rcl} F(x,y) &=& x+y^2 \\ G(x,y) &=& 3x+y \\ r &=& G^{-1}(-6) \\ A &=& \{-3-2,-1,0,1,2,3\}^2 \\ B &=& [-3,3]^2 \\ C &=& \{\,(x,y)\in B \mid G(x,y)\geq -6\,\} \\ D &=& \{\,(x,y)\in B \mid G(x,y) = -6\,\} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} F_B &:& B &\to& \mathbb{R} \\ && (x,y) &\mapsto& F(x,y) \\ F_C &:& C &\to& \mathbb{R} \\ && (x,y) &\mapsto& F(x,y) \end{array}$$

a) **(0.5 pts)** Faça o diagrama de numerozinhos da função F. Desenhe um numerozinho para cada ponto de A.

b) **(0.5 pts)** Idem, mas para a função G.

c) **(0.5 pts)** Desenhe as curvas de nível da G para $z=-2,-1,0,1,2$.

d) **(0.5 pts)** Desenhe os conjuntos r,A,B,C,D.

e) **(0.5 pts)** Desenhe as curvas de nível da F para $z=-2,-1,0,1,2$.

f) **(0.5 pts)** Desenhe as curvas de nível da F_B para $z=-2,-1,0,1,2$. Inclua a fronteira do domínio da F_B no seu desenho pra leitor conseguir ver até onde essas curvas de nível vão.

g) **(0.5 pts)** Desenhe as curvas de nível da F_C para $z=-2,-1,0,1,2$. Inclua a fronteira do domínio da F_C no seu desenho pra leitor conseguir ver até onde essas curvas de nível vão.

h) **(1.0 pts)** Dê coordenadas *aproximadas* para os máximos e mínimos locais da função F_C.

Nos próximos itens você vai tentar fazer um truque que o Bortolossi ensina no capítulo 12 dele, em que ele mostra como encontrar máximos e mínimos locais na fronteira a partir de pontos na fronteira em que dois vetores gradientes são paralelos – e com isso você vai conseguir fazer uma versão melhorada do seu item (h).

Digamos que:

$$\begin{array}{rcl} d(x) &=& ax+b \\ s &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=d(x)\,\} \\ P(x) &=& (x,d(x)) \end{array}$$

tais que $s=r$.

Isso (↑) é uma *definição indireta*. O autor – no caso, eu – não está dizendo quais são os valores de a e b, e o leitor – no caso, você – vai ter que se virar pra descobrir.

i) **(0.5 pts)** Encontre a e b por chutar e testar. Você vai começar fazendo vários chutes-e-testes assim:

Se $(a,b)=(0,1)$ então $s=$  e $s\neq r$ =(

Se $(a,b)=(1,1)$ então $s=$  e $s\neq r$ =(

j) **(1.0 pts)** Calcule $\nabla F(x,y)$, $\nabla G(x,y)$, $\nabla F(P(x))$ e $\nabla G(P(x))$. Dica: à primeira vista $\nabla F(P(x))$ tem duas interpretações possíveis – mas uma delas faz mais sentido do que a outra...

k) **(1.0 pts)** Faça uma cópia do seu desenho do item (g) incluindo os vetores $P(x)+\nabla F(P(x))$ e $P(x)+\nabla G(P(x))$ para os seguintes valores de x: $x=-2.5$, $x=-2$, $x=-1.5$.

l) **(1.0 pts)** Encontre o valor de x que faz com que $\nabla F(P(x))$ e $\nabla G(P(x))$ fiquem paralelos. Sugestão: faça uma tabela e encontre ele por chutar e testar. Chame esse valor de x de x_m.

m) **(1.0 pts)** Faça uma cópia do seu desenho do item (g) incluindo os vetores $P(x)+\nabla F(P(x))$ e $P(x)+\nabla G(P(x))$ para $x=x_m$. Faça ele BEM grande e capriche!

n) **(1.0 pts)** Calcule $F(D)$ e $F(C)$..

Lembre que se $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $A\subseteq\mathbb{R}^2$ e $B\subseteq\mathbb{R}$ então:

$$\begin{array}{rcl}
F(A) &=& \{\, F(x,y) \mid (x,y)\in A \,\} \\
F^{-1}(b) &=& \{\, (x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid F(x,y)=b \,\} \\
F^{-1}(B) &=& \{\, (x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid F(x,y)\in B \,\}
\end{array}$$

e que quando a gente escreve

$$\begin{array}{rccl}
G &:& A & \to & \mathbb{R} \\
& & (x,y) & \mapsto & F(x,y)
\end{array}$$

isso define uma função G que se comporta como a F dentro do conjunto A, mas o domínio dessa G é só o conjunto A – quando a G recebe um ponto de $\mathbb{R}^2\backslash A$ ela dá um erro.

Lembre que dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não nulos são *paralelos* quando $\exists\lambda\in\mathbb{R}.\,\vec{v}=\lambda\vec{w}$. Por exemplo, $\overrightarrow{(2,3)}$ e $\overrightarrow{(20,30)}$ são paralelos mas $\overrightarrow{(2,3)}$ e $\overrightarrow{(5,4)}$ não são paralelos.