

# Cálculo 3 - 2024.2

Aula nn: ponha o título aqui

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2024.2-C3.html>

## Links

3iQ1 Quadros da aula de 18/mar/2024

3iQ3 Quadros da aula de 20/mar/2024

“Links pra hoje” de 20/mar/2024:

3hT10 Uma trajetória em três partes

3hT11 Uma trajetória em três partes (2)

3iQ1 Quadros da aula de 18/mar/2024

2iQ7 Quadros da aula de C2 de 20/mar/2024

3hT8 Pontos mais fáceis de calcular

3FT1 Introdução a trajetórias

“Links pra hoje” de 18/mar/2024:

Mpg8 Set comprehensions

2hT4 “Releia a Dica 7”

3dT6 Vetores em Álgebra Linear e em GA

3dT7 Vetores como setas

3hT6 Seja seu próprio GeoGebra: links

3hT8 Pontos mais fáceis de calcular

3FT1 Introdução a trajetórias

2hT129 Um jogo colaborativo

3jQ1 Quadros da aula 1 (23/set)

3jQ5 Quadros da aula 2 (23/set)

MpgP8 Set comprehensions

MpgP18 Sistemas de coordenadas

MpgP19 Sistemas de coordenadas (2)

3hT6 Seja seu próprio GeoGebra: links (2023.2)

Pontos mais fáceis de calcular

## Pontos mais fáceis de calcular

### Muito importante:

Se você for uma pessoa pra quem

12345 + 9675 é tão fácil de calcular de cabeça quanto 12000 + 345,

e  $4 + 5x = 6$  é tão fácil de resolver de cabeça quanto  $1 + x = 2$ ,

...então **tente** pensar como uma pessoa pra quem

12345 + 9675 é muito mais difícil de calcular que 12000 + 345,

e  $4 + 5x = 6$  é muito mais difícil de resolver quanto  $1 + x = 2$ ...

...e além disso considere que somas são mais fáceis de calcular de cabeça do que subtrações – e que, por exemplo, dá pra calcular  $34 + 45$  de cabeça mas dá um trabalhão, e que calcular  $34 - 45$  de cabeça é quase impossível.

Sejam:

$$f_1(t) = 34 + t \cdot 45$$

$$f_2(t) = 34 + (t - 56) \cdot 45$$

$$f_3(t) = 34 + (t + 56) \cdot 45$$

$$f_4(t) = 34 + ((t - 56)/4) \cdot 45$$

$$f_5(t) = 34 + ((t + 56)/4) \cdot 45$$

$$P_1(t) = (12, 23) + t \overrightarrow{(4, 5)}$$

$$P_2(t) = (12, 23) + (t - 8) \overrightarrow{(4, 5)}$$

$$P_3(t) = (12, 23) + (t + 8) \overrightarrow{(4, 5)}$$

$$P_4(t) = (12, 23) + ((t - 8)/34) \overrightarrow{(4, 5)}$$

$$P_5(t) = (12, 23) + ((t + 8)/34) \overrightarrow{(4, 5)}$$

Os pontos mais fáceis de calcular do  $f_4(t)$  são estes aqui.

O caso mais fácil de todos é este,

$$34 + \underbrace{((t - 56)/4)}_0 \cdot 45$$

em que temos:

$$f(56) = 34 + \underbrace{\underbrace{\underbrace{(t - 56)}_{56}}_0}_0 \cdot 45$$

E o segundo caso mais fácil é este,

$$34 + \underbrace{((t - 56)/4)}_1 \cdot 45$$

em que temos:

$$f(56 + 4) = 34 + \underbrace{\underbrace{\underbrace{(t - 56)}_{60}}_4}_1 \cdot 45$$

## Pontos mais fáceis de calcular (2)

Sejam:

$$f_1(t) = 34 + t \cdot 45$$

$$f_2(t) = 34 + (t - 56) \cdot 45$$

$$f_3(t) = 34 + (t + 56) \cdot 45$$

$$f_4(t) = 34 + ((t - 56)/4) \cdot 45$$

$$f_5(t) = 34 + ((t + 56)/4) \cdot 45$$

$$P_1(t) = (12, 23) + t \overrightarrow{(4, 5)}$$

$$P_2(t) = (12, 23) + (t - 8) \overrightarrow{(4, 5)}$$

$$P_3(t) = (12, 23) + (t + 8) \overrightarrow{(4, 5)}$$

$$P_4(t) = (12, 23) + ((t - 8)/34) \overrightarrow{(4, 5)}$$

$$P_5(t) = (12, 23) + ((t + 8)/34) \overrightarrow{(4, 5)}$$

### Exercício

Complete a tabela à direita com os dois pontos mais fáceis de calcular de cada uma das 10 funções acima. *Faça todas as contas de cabeça e escreva só os resultados finais!* O segundo ponto mais fácil de calcular sempre pode ser escrito nestes dois formatos,  $f_4(56 + 4) = 34 + 45$  e  $f_4(60) = 79 - e$  você pode escolher qual dos formatos usar.

$$f_1(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$f_1(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$f_2(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$f_2(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$f_3(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$f_3(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$f_4(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$f_4(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$f_5(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$f_5(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$P_1(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$P_1(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$P_2(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$P_2(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$P_3(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$P_3(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$P_4(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$P_4(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$P_5(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

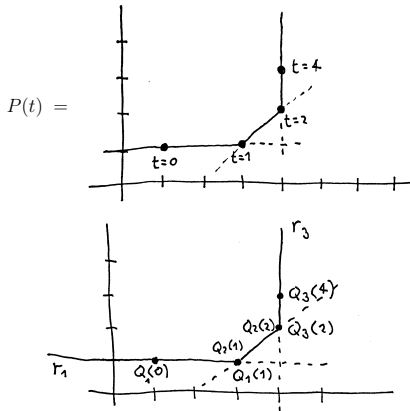
$$P_5(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

## Uma trajetória em três partes

Agora você vai tentar encontrar uma descrição “formal”, “algébrica”, da trajetória  $P(t)$  que eu desenhei à direita. Uma descrição informal dela seria assim: um corpo (pra usar terminologia de físicos...) se move em movimento retilíneo uniforme na horizontal pra direita desde  $t = -\infty$  até  $t = 1$ , depois ele muda pra um outro movimento retilíneo uniforme e anda em diagonal na direção nordeste até  $t = 2$ , e a partir de  $t = 3$  ele muda pra um outro movimento retilíneo uniforme, dessa vez na vertical. Temos  $P(0) = (1, 1)$ ,  $P(1) = (3, 1)$ ,  $P(2) = (4, 2)$ , e  $P(3) = (4, 3)$  – dá pra ver isso pelo gráfico – e a gente pode começar definindo três trajetórias mais simples,  $Q_1(t)$ ,  $Q_2(t)$ , e  $Q_3(t)$ , que são movimentos retilíneos uniformes, e depois montar a definição da trajetória  $P(t)$  a partir delas.

Note que:

$$\begin{aligned} (1, 1) &= P(0) = Q_1(0) \\ (3, 1) &= P(1) = Q_1(1) = Q_2(1) \\ (4, 2) &= P(2) = Q_2(2) = Q_3(2) \\ (4, 3) &= P(4) = Q_3(4) \end{aligned}$$



## Uma trajetória em três partes (2)

Agora complete todas as lacunas abaixo:

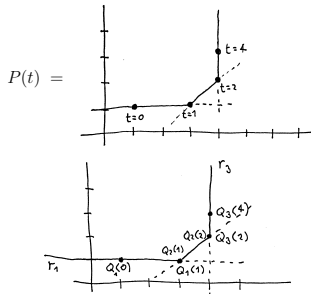
$$\begin{aligned}
 Q_1(t) &= (\_, \_) + t(\overrightarrow{\_, \_}) \\
 Q_2(t) &= (\_, \_) + (t - \_)(\overrightarrow{\_, \_}) \\
 Q_3(t) &= (\_, \_) + ((t - \_)/\_)(\overrightarrow{\_, \_}) \\
 r_1 &= \{Q_1(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \\
 r_2 &= \{Q_2(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \\
 r_3 &= \{Q_3(t) \mid t \in \mathbb{R}\}
 \end{aligned}$$

$$P(t) = \begin{cases} (\_, \_) + t(\overrightarrow{\_, \_}) & \text{quando } t \leq 1, \\ (\_, \_) + (t - \_)(\overrightarrow{\_, \_}) & \text{quando } 1 \leq t \leq 2, \\ (\_, \_) + ((t - \_)/\_)(\overrightarrow{\_, \_}) & \text{quando } 2 \leq t, \end{cases}$$

Importante: faça todas as contas de cabeça e calcule só os “pontos mais fáceis de calcular” que eu expliquei alguns slides atrás. Você pode fazer quantos chutes-e-testes você precisar, desde que você marque eles com “se” e “então”. *Não apague nenhum dos seus chutes-e-testes!*

Dê uma olhada em como as pessoas fizeram isso no quadro na aula 2:

3hQ5 Quadros de 01/set/2023



## Parâmetros e casos degenerados

Sejam:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \{ \{ (1, 1), (2, 1) \}, \{ (2, 1), (2, 2) \} \} \\ \mathcal{B} &:= \{ a, b \in \mathbb{R}; \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b \} \} \\ \mathcal{C} &:= \{ a, b, c \in \mathbb{R}; \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c \} \} \\ \mathcal{D} &:= \{ a, b, c, d \in \mathbb{R}; \{ t \in \mathbb{R}; (a, b) + t \overrightarrow{(c, d)} \} \} \\ r_1 &:= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0x + 0y = 0 \} \\ r_2 &:= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0x + 0y = 2 \} \\ r_3 &:= \{ t \in \mathbb{R}; (2, 3) + t \overrightarrow{(0, 0)} \} \\ r_4 &:= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 12x + 23 \} \end{aligned}$$

Children:  
IDARCTp2  
ZHAsP3  
MissingP6

Então:

$\mathcal{A}$  é [desenho],

$\mathcal{B}$  é o conjunto de todas as retas não-verticais,

$\mathcal{C}$  é o conjunto de todas as retas e mais o  $\mathbb{R}^2$  e o  $\emptyset$ ,

$\mathcal{D}$  é o conjunto de todas as retas e mais todos os pontos de  $\mathbb{R}^2$ ,

$r_1 = \mathbb{R}^2$ ,

$r_2 = \emptyset$ ,

$r_3 = \{(2, 3)\}$ ,

$r_4$  é uma reta difícil de desenhar.