

Cálculo 3 - 2024.2

Aulas 2 a 9: trajetórias

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2024.2-C3.html>

Links

Felipe Acker:

[AckerGA1p53](#) 9. Equações paramétricas

[AckerGA1](#), [AckerGA2](#), [AckerGA3](#), [AckerGA4](#)

<http://anggtwu.net/acker/README.html>

Bortolossi:

[Bort6](#) 6. curvas parametrizadas

Stewart:

[StewPtCap10p5](#) 10. Equações paramétricas e coordenadas polares

[StewPtCap10p9](#) (p.579) Figuras 10, 11 e 12

Leithold:

[Leit10](#) 10. Seções cônicas e coordenadas polares

[Leit10p43](#) (p.618) Limaçon

Introdução antiga (2021.2)

Desta vez um dos objetivos principais do curso vai ser a gente aprender a visualizar muitas coisas em 3D ou de cabeça ou fazendo umas pouquinhas contas e desenhos no papel. Pra isso a gente vai treinar fazer “desenhos tortos que todo mundo entenda” – porque fazer desenhos à mão livre medindo tudo no olhometro costuma ser bem mais rápido do que fazer desenhos com régua – e em TODOS os exercícios que eu vou passar durante o curso as contas são simples o suficiente pra poderem ser feitas meio de cabeça e meio no papel.

Em Cálculo 2 você muitas vezes teve que desenhar figuras feitas de 4, 8, ou 16 retângulos, e aí você levava 5 minutos pra entender como desenhar o primeiro retângulo, depois só um minuto pra desenhar o segundo, e aos poucos você entendia o padrão, e no final você desenhava cada retângulo em menos de 5 segundos – e aí você conseguia *visualizar* como seria a figura correspondente com 256, 512 ou 1024 retângulos, e você passava a conseguir visualizar certos somatários a partir das fórmulas deles, sem precisar desenhar as figuras correspondentes a eles.

Nos exercícios deste PDF você vai desenhar parábolas a partir de 5 pontos delas, e você vai tentar “adivinhar” o resto da parábola a partir destes poucos pontos. O modo matematicamente correto de fazer isto seria como o Bortolossi faz em alguns exercícios; dê uma olhada nas páginas 113 e 114 dele. O exercício [24] da página 113 dá seis fórmulas e seis gráficos – os gráficos estão na página seguinte – e ele pede pra você descobrir qual fórmula corresponde a qual gráfico...

Bort3p35 (p.113) Exercício [24]

Bort3p37 (p.114) Figuras pro exercício 24

Neste curso eu vou passar um monte de exercícios com enunciados como “tente adivinhar o gráfico da equação tal”. Eu vou usar a expressão “**tente adivinhar**” pra enfatizar que o que a gente vai fazer não é totalmente formal: a partir de 5 pontos a gente consegue fazer uma “hipótese razoável” de como é o formato de uma parábola, a partir de 20 pontos dessa parábola a gente conseguiria fazer uma hipótese melhor de como ela é, e calculando um milhão de pontos dela a gente conseguiria fazer um desenho bem mais preciso dela... só que a gente quer aprender a fazer desenhos bons o suficiente a partir de contas que a gente possa fazer na mão!...

Introdução ao curso

Cálculo 3 é principalmente sobre:

1. funções de \mathbb{R} em \mathbb{R}^2 – que o Bortolossi costuma chamar de **curvas parametrizadas**, mas nós vamos chamar de **trajetórias**, e
2. funções de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} , que vão gerar **superfícies**.

Depois que nós aprendermos o suficiente sobre (1) e (2) nós vamos poder lidar com coisas um pouco mais gerais, como funções $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é um **conjunto aberto**.

Nossos primeiros objetivos vão ser:

1. Aprender a representar graficamente algumas trajetórias, usando a idéia de **traço** do Bortolossi (cap.6, p.188), mas escrevendo algumas informações a mais, como “ $t = 0$ ” e “ $t = 1$ ” em alguns pontos,
2. Calcular e representar graficamente **vetores tangentes** a trajetórias (“**vetores velocidade**”),
3. Entender **vetores secantes** (cap.6, p.199),
4. Entender **aproximações de primeira ordem** pra trajetórias, que dão **retas parametrizadas**, e depois **aproximações de segunda ordem**, que vão dar **parábolas parametrizadas**.

...mas hoje nós vamos fazer uma revisão de algumas idéias de GA.

Você já deve ter visto estas duas convenções diferentes para representar pontos e vetores... em **Álgebra Linear** tanto pontos quanto vetores em \mathbb{R}^2 são representados como matrizes-coluna de altura 2:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 53 \end{pmatrix}$$

e em **Geometria Analítica** pontos e vetores são escritos de forma diferente – vetores têm uma seta em cima – e representados graficamente de formas diferentes...

$$(2, 3) + \overrightarrow{(40, 50)} = (42, 53)$$

Vetores como setas

Um **ponto** (a, b) é interpretado graficamente como um ponto (a, b) de \mathbb{R}^2 , e um **vetor** $\overrightarrow{(c, d)}$ é interpretado como um **deslocamento**, e desenhado como uma **seta**.

Se o vetor $\overrightarrow{(c, d)}$ aparece sozinho a representação gráfica dele é **qualquer** seta que anda c unidades pra direita e d unidades pra cima. Às vezes a gente pensa que $\overrightarrow{(c, d)}$ é o conjunto de *todas* as setas assim – o conjunto de todas as setas “equipolentes” a esta; veja a p.9 do livro do CEDERJ.

Link:

DFES1p10 CEDERJ, Geometria Analítica 1 (p.9)

Uma convenção (temporária)

O **resultado** da expressão $(a, b) + \overrightarrow{(c, d)}$ é o ponto $(a + c, b + d)$, mas a representação gráfica dele vai ser:

1) o ponto (a, b) ,

2) uma seta indo de (a, b) para $(a + c, b + d)$,

3) o ponto $(a + c, b + d)$,

4) anotações dos lados dos pontos (a, b) e $(a + c, b + d)$ dizendo os “nomes” destes pontos e uma anotação do lado da seta $\overrightarrow{(c, d)}$ dizendo o seu “nome” — como nos dois exemplos abaixo (oops! Falta fazer os desenhos!):

(pôr o desenho aqui)

Nesta aula vai ser obrigatório pôr todos os nomes, mas nas outras não.

A representação gráfica de

$$((1, 1) + \overrightarrow{(2, 0)}) + \overrightarrow{(1, 2)} = (1, 1) + (\overrightarrow{(2, 0)} + \overrightarrow{(1, 2)})$$

Vai ser um triângulo feito de três pontos e três setas – os que estão em vermelho aqui:

$$\underbrace{\underbrace{((1, 1) + \overrightarrow{(2, 0)})}_{(3, 1)} + \overrightarrow{(1, 2)}}_{(4, 3)} = (1, 1) + \underbrace{(\overrightarrow{(2, 0)} + \overrightarrow{(1, 2)})}_{\overrightarrow{(3, 2)}}_{(4, 3)}$$

O objetivo do próximo exercício é você lembrar como representar graficamente certas expressões com pontos e vetores usando quase só o olhometro, quase sem fazer contas.

Desenhando parábolas (quase) no olhómetro

Digamos que conhecemos A , \vec{v} , e \vec{w} . Então a trajetória

$$P(t) = A + t\vec{v} + t^2\vec{w}$$

é uma parábola – e queremos aprender a desenhar os 5 pontos mais fáceis dela, que são $P(0)$, $P(1)$, $P(-1)$, $P(2)$, $P(-2)$, usando o máximo de olhómetro e o mínimo possível de contas...

Exercício 1: desenhando parábolas (quase) no olhômetro

1) Sejam $A = (3, 1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1, 0)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(0, 1)}$.

Represente graficamente **num gráfico só**:

a) A

b) $(A + \vec{v}) + \vec{w}$

c) $(A + \vec{w}) + \vec{v}$

d) $(A + 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

e) $(A + 4\vec{w}) + 2\vec{v}$

f) $(A - \vec{v}) + \vec{w}$

g) $(A + \vec{w}) - \vec{v}$

h) $(A - 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

i) $(A + 4\vec{w}) - 2\vec{v}$

Exercício 2: desenhando parábolas (quase) no olhometro, 2

2) Sejam $A = (1, 1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1, -1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(1, 1)}$.

Represente graficamente **num gráfico só**:

a) A

b) $(A + \vec{v}) + \vec{w}$

c) $(A + \vec{w}) + \vec{v}$

d) $(A + 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

e) $(A + 4\vec{w}) + 2\vec{v}$

f) $(A - \vec{v}) + \vec{w}$

g) $(A + \vec{w}) - \vec{v}$

h) $(A - 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

i) $(A + 4\vec{w}) - 2\vec{v}$

Exercício 3: desenhando parábolas (quase) no olhometro, 3

3) Sejam $A = (1, 1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1, -1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(-1, 1)}$.

Represente graficamente **num gráfico só**:

a) A

b) $(A + \vec{v}) + \vec{w}$

c) $(A + \vec{w}) + \vec{v}$

d) $(A + 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

e) $(A + 4\vec{w}) + 2\vec{v}$

f) $(A - \vec{v}) + \vec{w}$

g) $(A + \vec{w}) - \vec{v}$

h) $(A - 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

i) $(A + 4\vec{w}) - 2\vec{v}$

Exercício 4: desenhando parábolas (quase) no olhometro, 4

4) Sejam $A = (2, 6)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1, 1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(2, -1)}$.

Represente graficamente **num gráfico só**:

a) A

b) $(A + \vec{v}) + \vec{w}$

c) $(A + \vec{w}) + \vec{v}$

d) $(A + 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

e) $(A + 4\vec{w}) + 2\vec{v}$

f) $(A - \vec{v}) + \vec{w}$

g) $(A + \vec{w}) - \vec{v}$

h) $(A - 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

i) $(A + 4\vec{w}) - 2\vec{v}$

Obs: você vai precisar de um gráfico que contenha os pontos $(0,0)$ e $(12,8)$.

Introdução (2022.2)

Sobre a aula 1

Na aula 1 nós usamos as idéias dos 8 primeiros slides daqui,

3dT2 Aulas 4 e 5: introdução ao curso e do slide 10 daqui,

3bT93 ...usam um caso particular disfarçado ...pra desenhar casos particulares das figuras das seções 7.4 e 7.5 do “GA1” do Felipe Acker:

AckerGA1p43 (p.27) 7.4 Soma de vetores

Introdução ao vetor velocidade

Em cursos de Cálculo 3 “pra matemáticos” a gente normalmente começa definindo o vetor velocidade como um limite. O Felipe Acker faz isso muito bem nos capítulos 2 e 3 do “GA4”,

AckerGA4p21 (p.13) Capítulo 2: Velocidade

AckerGA4p27 (p.19) Capítulo 3: Aceleração

Eu costumava fazer mais ou menos isso no curso de Cálculo 3, e a gente gastava uma aula inteira aprendendo a decifrar a fórmula daquele limite e visualizar o que ela queria dizer.

Dessa vez vamos tentar fazer algo diferente. Vamos começar com exemplos e animações. Assista este vídeo aqui até o 9:00,

3dT25 Aula 7: um vídeo sobre curvas de Bézier
<https://www.youtube.com/watch?v=aVwxzDHniEw>

...mas considere que tudo no vídeo até o 6:34 são idéias avançadas que a gente só vai entender nuns exercícios que a gente vai fazer daqui a algumas aulas. Por enquanto reserve praticamente toda a sua atenção pro trecho entre 6:34 e 9:00, que é o trecho que a Freya Holmér mostra os vetores velocidade e aceleração pra algumas curvas de Bézier.

A gente vai fazer o seguinte. Nós vamos acreditar que *em geral* quando temos uma trajetória $P(t) = (x(t), y(t))$ o vetor velocidade dessa trajetória é $P'(t) = (x'(t), y'(t))$. Nós vamos ver vários exemplos disso, e vamos deixar pra entender os detalhes desse “em geral” quando formos entender a definição “pra matemáticos” do vetor velocidade.

Exercício 5: Traço

Comece entendendo a definição de traço de uma curva parametrizada do Bortolossi:

Bort6p2 (p.188) Definição 6.1

Agora sejam:

$$\begin{aligned} P(t) &= (4, 0) + t\overrightarrow{(0, 1)}, \\ Q(u) &= (0, 3) + u\overrightarrow{(2, 0)}. \end{aligned}$$

Exercício 5

a) Represente num gráfico só o traço de $P(t)$ e o de $Q(u)$.

b) Marque o ponto $P(0)$ e escreva ' $t = 0$ ' do lado dele.

c) Faça o mesmo para os pontos $P(1)$ (' $t = 1$ ') e $Q(0)$ e $Q(1)$ (' $u = 0$ ' e ' $u = 1$ ').

d) Seja r o traço de $P(t)$ e s o traço de $Q(u)$.

Seja X o ponto de interseção de r e s .

Quais são as coordenadas de X ?

e) Cada ponto de r está "associado" a um valor de t e cada ponto de s a um valor de u . Quais são os valores de t e u associados ao ponto X ? Chame-os de t_0 e u_0 e indique-os no seu gráfico – por exemplo, se $t_0 = 99$ e $u_0 = 200$ você vai escrever ' $t = 99$ ' e ' $u = 200$ ' do lado do ponto X . Note que " $t_0 = 99$ " e " t_{99} " são coisas totalmente diferentes!

Dica:

MpgP17

Agora releia as dicas 1, 2 e 7 daqui:

2gT4 "Releia a dica 7"

e entenda a notação de "set comprehensions" daqui:

MpgP8 "Set comprehensions"

Se você aprender a definir os seus objetos em linguagem matemática você vai conseguir aprender (e fazer!) muitas coisas do curso **MUITO** mais rápido, e vai ter muito mais facilidade pra escrever elas de um jeito legível. Então:

Exercício 5 (cont.)

f) No item (d) a gente definiu r , s e X usando muitas palavras em português. Dá pra definir r , s e X com bem menos português se a gente usar a notação de "set comprehensions". Aprenda a usar essa notação e complete as lacunas abaixo:

Sejam:

$$\begin{aligned} P(t) &= (4, 0) + t\overrightarrow{(0, 1)}, \\ Q(u) &= (0, 3) + u\overrightarrow{(2, 0)}, \\ r &= \{ ____ \mid ____ \}, \\ s &= \{ ____ \mid ____ \}, \\ X &= r \cap s \end{aligned}$$

Exercício 6: um círculo

Seja:

$$P(t) = (\cos t, \sin t).$$

Exercício 6.

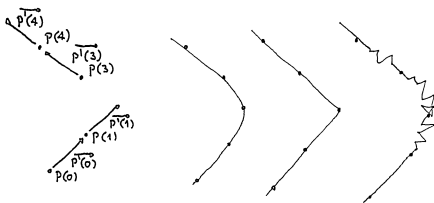
Represente num gráfico só:

- o traço de $P(t)$,
- $P(\frac{\pi}{2}) + P'(\frac{\pi}{2})$, escrevendo ' $P(\frac{\pi}{2})$ ' ao lado do ponto e ' $P'(\frac{\pi}{2})$ ' ao lado da seta,
- Idem para estes outros valores de t : $0, \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \pi$.
- Seja $Q(u) = P(\pi) + uP'(\pi)$. Desenhe o traço de $Q(u)$ e anote ' $Q(0)$ ' e ' $Q(1)$ ' nos pontos adequados.
- O traço de $Q(u)$ é uma reta tangente ao traço de $P(t)$ no ponto $P(\pi)$? Encontre no livro ou no resto da internet uma definição formal de reta tangente e descubra se isto é verdade ou não.

Sobre “adivinhar trajetórias”

Nos próximos dois exercícios nós vamos *começar* a fazer uma coisa que vai ser muito comum aqui nesse curso de Cálculo 3, e que geralmente é inadmissível nos cursos de Cálculo 1: nós vamos tentar “adivinhar” como certas trajetórias são a partir de umas poucas informações sobre elas.

Esse “adivinhar” na verdade é “fazer hipóteses razoáveis”, e às vezes a gente precisa de mais informações pra descobrir qual hipótese é mais razoável. Na figura do próximo slide eu desenhei à esquerda $P(t) + P'(t)$ para a trajetória de um personagem de videogame em $t = 0, 1, 3, 4$, mas existem muitas trajetórias que se passam por esses pontos com essas velocidades. Na primeira figura à direita eu desenhei uma trajetória de uma nave no espaço; na segunda eu desenhei a trajetória de um personagem de um videogame do meu tempo — naquela época nada nos videogames obedecia as leis da Física, e nos meus jogos preferidos o meu personagem era um quadradinho — e na terceira o personagem é atingido por um raio em $t = 1.05$ e ele adquire superpoderes.



Exercícios 7 e 8: Lissajous

Os exercícios desta página vão dar curvas de Lissajous, como as daqui:

https://en.wikipedia.org/wiki/Lissajous_curve

Exercício 7

Seja $P(t) = (\cos t, \sin 2t)$.

Represente graficamente $P(t) + P'(t)$ para os seguintes valores de t :

$0, \frac{1}{4}\pi, \frac{2}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \dots, 2\pi$.

Faça as anotações adequadas nos seu pontos e vetores pra lembrar qual é o t associado a cada um.

Tente usar as informações deste gráfico pra desenhar o traço de $P(t)$. Isto não é nada óbvio – se inspire nas figuras das páginas 208 e 209 do capítulo 6 do Bortolossi e tente conseguir uma hipótese razoável.

Você pode pensar que $P(t)$ é a posição do Super Mario Kart no instante t e $P'(t)$ é o vetor velocidade dele no instante t (lembre que um vetor tem “direção”, “orientação” e “módulo”!)... você só sabe a posição e a velocidade dele em alguns instantes, isto é, em alguns valores de t , e você vai ter que encontrar uma aproximação razoável, olhométrica, pra pista onde ele está correndo.

Exercício 8

Seja $P(t) = (\cos 2t, \sin t)$.

Represente graficamente $P(t) + P'(t)$ para os seguintes valores de t :

$0, \frac{1}{4}\pi, \frac{2}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \dots, 2\pi$.

Faça as anotações adequadas nos seu pontos e vetores pra lembrar qual é o t associado a cada um.

Tente usar as informações deste gráfico pra desenhar o traço de $P(t)$. Isto não é nada óbvio – se inspire nas figuras das páginas 208 e 209 do capítulo 6 do Bortolossi e tente conseguir uma hipótese razoável.

Links:

Bort6p22 Bortolossi, cap.6, p.208

Bort6p23 Bortolossi, cap.6, p.209

Exercício 9: órbita

Este exercício vai dar uma figura que é a órbita de uma lua.

O resultado vai ser algo como a figura da última página daqui,

<http://anggtwu.net/LATEX/2022-1-C3-orbita.pdf>

mas olhe pra essa figura durante só uns poucos segundos.

Neste exercício você vai tentar redescobrir essa figura sozinho, e você vai tentar descobrir como desenhar uma aproximação bem razoável pra ela só somando uns vetores no olhômetro e sem fazer nenhuma conta complicada — por exemplo, você vai evitar usar uma aproximação numérica pra $(\cos(\frac{1}{12} \cdot 2\pi), \sin(\frac{1}{12} \cdot 2\pi))$; ao invés disso você vai usar a representação gráfica deste ponto no \mathbb{R}^2 .

Seja $h = \frac{1}{12} \cdot 2\pi$.

Esse h vai ser uma “hora”. Vou explicar isso no quadro.

Sejam:

$$P(t) = (\cos t, \sin t),$$

$$Q(t) = (\cos 4t, \sin 4t),$$

$$R(t) = \frac{1}{2}(\cos 4t, \sin 4t) = (\frac{1}{2} \cos 4t, \frac{1}{2} \sin 4t),$$

$$S(t) = P(t) + R(t).$$

Exercício 9.

Represente graficamente:

- $P(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \dots, 12h$.
- $P(t) + P'(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \dots, 12h$.
- $Q(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \dots, 12h$.
- $Q(t) + Q'(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \dots, 12h$.
- $R(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \dots, 12h$.
- $R(t) + R'(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \dots, 12h$.
- $S(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \dots, 12h$.
- $S(t) + S'(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \dots, 12h$.

(Continua...)

Exercício 9: órbita (cont.)

Nos itens a até f você deve ter obtido pontos sobre círculos e vetores tangentes aos círculos apoiados nestes pontos. Nos itens g e h você deve ter obtido algo bem mais complicado: pontos e vetores apoiados nestes pontos, mas você ainda não sabe direito sobre que curva eles estão.

Reveja o trecho entre 6:34 e 9:00 do vídeo da Freya Holmér. A trajetória que ela analisa é bem “suave”, no sentido de que ela não bicos ou teleportes, e a derivada da aceleração dela é constante. No item h você obteve alguns pontos e vetores velocidade *de uma trajetória que você não sabe direito qual é...* você só tem uma lembrança vaga do “traço” dessa trajetória, porque você viu a figura-spoiler durante uns poucos segundos.

i) Desenhe uma trajetória bem suave que nos instantes $t = 0h, 1h, \dots, 12h$ passe pelos pontos que você obteve no item g. Aqui você vai conseguir uma aproximação bem tosca pro “traço” da trajetória $S(t)$.

j) Desenhe uma trajetória bem suave que nos instantes $t = 0h, 1h, \dots, 12h$ passe pelos pontos que você obteve no item h, e que naqueles instantes tenha exatamente os vetores velocidade que você também desenhou no item h. Aqui você provavelmente vai conseguir uma aproximação bastante boa pro “traço” da trajetória $S(t)$.

k) Refaça o desenho do item j pra ele ficar mais caprichado e simétrico e tal. Quando você achar que conseguiu fazer uma versão caprichada boa olhe de novo a figura-spoiler e compare o seu desenho com ela.

Exercícios 10 e 11: bico e teleporte

Exercício 10: uma trajetória com um bico

Dê uma olhada no item 1e daqui:

3eT70 VS extra de 2022.1 - questão 1

Faça o que essa questão pede e represente graficamente $Q(t) + Q'(t)$ pra um monte de outros valores de t também — até você entender como essa trajetória se comporta. *Dica:* ela é um movimento retilíneo uniforme até um determinado instante, aí ela muda de vetor velocidade subitamente e vira um outro movimento retilíneo uniforme.

Exercício 11: um trajetória com teleporte

Represente graficamente a trajetória abaixo. Ela é parecida com a anterior, mas nessa tem um momento em que a partícula desaparece do ponto em que em estava e se teleporta pra outro lugar.

$$R(t) = \begin{cases} (t, 4) & \text{quando } t \leq 6, \\ (5, 11 - t) & \text{quando } 6 < t. \end{cases}$$

Dicas pro exercícios 10 e 11

Este vídeo aqui tem algumas figuras sobre como desenhar trajetórias:

<http://www.youtube.com/watch?v=3yWLubqHsic>

<http://anggtwu.net/eev-videos/2020.2-C3-intro.mp4>

Quase todo mundo achou muito difícil desenhar a trajetória do exercício 11 — se a gente calcula $R(t)$ só pra valores inteiros de t a gente não consegue descobrir como a $R(t)$ se comporta entre $t = 6$ e $t = 7$...

Um jeito de resolver isso é calcular $R(t)$ para $t = 6.1, t = 6.2, \dots, t = 6.9$, desenhar esses pontos no gráfico, e aí tentar descobrir qual é o comportamento da $R(t)$ pra todos os valores em $[6, 7]$.

Um outro jeito é considerar que $R(t) = (x(t), y(t))$ e tentar entender as funções $x(t)$ e $y(t)$, que são funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} .