Cálculo 2 - 2025.1

P1 (Primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2025.1-C2.html

Questão 1
(Total: 1.0 pts)

Seja $f(t)$ a função no topo da página seguinte. Seja

$$F(x) \;=\; \int_{t=3}^{t=x} f(t)\,dt.$$

Desenhe o gráfico de $F(x)$ em algum dos grids vazios da próxima página. Indique claramente qual é a versão final e quais desenhos são rascunhos.

Questão 2
(Total: 4.0 pts)

Resolva esta integral:

$$\int \frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15}\,dx.$$

Lembre que eu vou corrigir a sua solução usando os critérios de correção que eu expliquei no PDFzinho de "Dicas para a P1", mas as bancas de revisão de prova costumam ignorar os meus critérios de correção e costumam usar outros critérios – que nunca são explicados direito.

Questão 3
(Total: 5.0 pts)

Seja:

$$F(x) \;=\; \int \frac{4\cos(\log x)(\operatorname{sen}(\log x))^3}{x}\,dx.$$

a) **(0.5 pts)** Integre $F(x)$ pelo "método rápido" dos anexos – use duas mudanças de variável, cada uma com uma caixinha de anotações, e siga exatamente o modelo – alinhe os sinais de '=', etc.

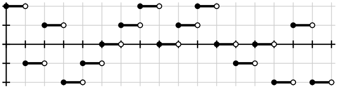
Chame a igualdade da primeira mudança de variável de '$\overset{(a)}{=}$' e a da segunda mudança de variável de '$\overset{(b)}{=}$'.

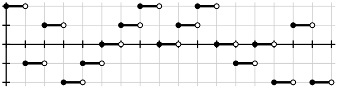
b) **(2.0 pts)** Imagine que alguém te diz "eu não acredito no método rápido, você pode me mostrar justificativas pras igualdades '$\overset{(a)}{=}$' e '$\overset{(b)}{=}$' usando casos particulares da [MVI1]?"

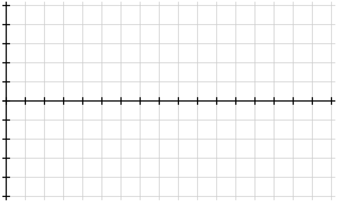
Traduza as suas justificativas do item (a) pra justificativas que satifaçam a pessoa do item (b).

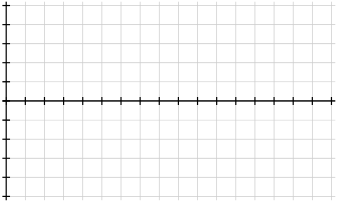
c) **(2.5 pts)** Imagine que alguém te diz "eu não acredito na [MVI1], você pode me mostrar justificativas pras igualdades '$\overset{(a)}{=}$' e '$\overset{(b)}{=}$' usando casos particulares da [MVD4]?"

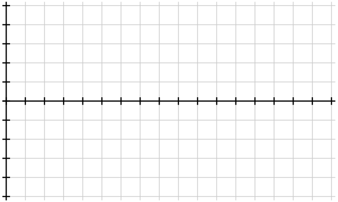
Traduza as suas justificativas do item (b) pra justificativas que satifaçam a pessoa do item (c).

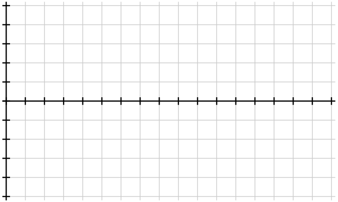












Anexo: método rápido, [MVI1], [MVD4]

Lembre que o "método rápido" tem essa cara aqui:

$$\begin{array}{rl}
\displaystyle\int \frac{(\ln x)^3\cos((\ln x)^4)}{x}\,dx & \left[\begin{array}{c} u=\ln x \\ \frac{du}{dx}=\frac{1}{x} \\ du=\frac{1}{x}dx \end{array}\right] \\
= \int (\ln x)^3\cos((\ln x)^4)\frac{1}{x}\,dx & \\
= \int u^3\cos(u^4)\,du & \left[\begin{array}{c} v=u^4 \\ \frac{dv}{du}=4u^3 \\ dv=4u^3du \\ \frac{1}{4}dv=u^3du \end{array}\right] \\
= \int \cos(u^4)u^3\,du & \\
= \int \cos v\cdot\frac{1}{4}\,dv & \\
= \frac{1}{4}\int \cos v\,dv & \\
= \frac{1}{4}\operatorname{sen} v & \\
= \frac{1}{4}\operatorname{sen}(u^4) & \\
= \frac{1}{4}\operatorname{sen}((\ln x)^4) &
\end{array}$$

e em cada caixinha de anotações a) a primeira linha diz a relação entre a variável antiga e a variável nova, b) todas as outras linhas da caixinha são consequências dessa primeira, e c) dentro da caixinha a gente permite gambiarras com diferenciais.

E lembre que:

$$[\text{MVI1}] \;=\; \left(\int f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int f'(u)\,du\right)$$

$$[\text{MVD4}] \;=\; \left(\begin{array}{rcl}
\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\
 & = & f(g(b))-f(g(a)) \\
 & = & f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\
 & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du
\end{array}\right)$$

Anexo: como justificar uma MV de cabeça

Por exemplo...

$$\int t^2\cos(t^3)\,dt \;=\; {\color{red}?}$$

$$\int x^2\cos(x^3)\,dx \;=\; {\color{red}?} \qquad \left[\begin{array}{r} u = x^3 \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}x^3 = 3x^2 \end{array}\right]$$

$$\int \cos(\underbrace{x^3}_{u})\cdot\tfrac13\cdot\underbrace{\underbrace{3x^2}_{\frac{du}{dx}}\,dx}_{du} \;=\; \int \cos(u)\cdot\tfrac13\,du \qquad \left[\begin{array}{r} u = x^3 \\ \frac{du}{dx} = 3x^2 \end{array}\right]$$

$$\int \underbrace{\cos(\underbrace{x^3}_{g(x)})\cdot\tfrac13}_{f'(g(x))}\cdot\underbrace{3x^2}_{g'(x)}\,dx \;=\; \int \underbrace{\cos(u)\cdot\tfrac13}_{f'(u)}\,du$$

$$\underbrace{\underbrace{\overbrace{\int f'(g(x))g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du}^{\color{red}[\text{MVI1}]}\left[\begin{array}{r} g(x) := x^3 \\ g'(x) := 3x^2 \\ f'(u) := \cos(u)\cdot\frac13 \end{array}\right]}_{\int \cos(x^3)\cdot\frac13\cdot 3x^2\,dx = \int \cos(u)\cdot\frac13\,du}\left[\begin{array}{l} x := t \\ u := w \end{array}\right]}_{\int \cos(t^3)\cdot\frac13\cdot 3t^2\,dt = \int \cos(w)\cdot\frac13\,dw}$$

$$\int t^2\cos(t^3)\,dt \;=\; \int \tfrac13\cos(w)\,dw \qquad \text{Por } {\color{red}[\text{MVI1}]}\left[\begin{array}{r} g(x) := x^3 \\ g'(x) := 3x^2 \\ f'(u) := \frac13\cos(u) \end{array}\right]\left[\begin{array}{l} x := t \\ u := w \end{array}\right]$$

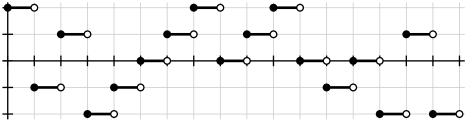
Dicas:
Repare que no exemplo à esquerda o problema original era este,

$$\int t^2\cos(t^3)\,dt = {\color{red}?}$$

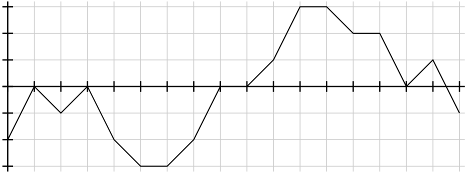
e eu resolvi ele nesta ordem: 1) eu mudei a variável dele pra x pra ficar com algo mais parecido com a [MVI1], 2) eu escolhi a mudança de variável certa, que era $u = x^3$, 3) eu calculei o $\frac{du}{dx}$, 4) eu rearrumei o problema original pro $\frac{du}{dx}$ ficar colado no dx, 5) eu fiz a mudança de variável pelo método rápido, 6) eu reescrevi as anotações do método rápido pra obter $g(x)$, $g'(x)$ e $f'(u)$, 7) eu transformei essas $g(x)$, $g'(x)$ e $f'(u)$ numa substituição, 8) eu calculei os resultados parciais dessa substituição e da $\left[\begin{smallmatrix} x:=t \\ u:=w \end{smallmatrix}\right]$, 9) eu reescrevi a substituição que eu tinha obtido e testado pra fingir que eu primeiro tinha resolvido o problema original de cabeça e depois eu escrevi a justificativa porque alguém me perguntou como eu tinha chegado naquele resultado.

Questão 1: gabarito

$$f(x) \ = $$



$$F(x) \ = \ \int_{t=3}^{t=x} f(t)\,dt \ = $$



Questão 2: gabarito

Temos:

$$\begin{aligned}
\frac{2x^3-6x^2-15x+55}{x^2-2x-15} &= \frac{(2x-2)(x^2-2x-15)+11x+25}{x^2-2x-15} \\
&= 2x-2+\frac{11x+25}{x^2-2x-15} \\
&= 2x-2+\frac{11x+25}{(x-5)(x+3)}
\end{aligned}$$

Queremos encontrar A e B tais que:

$$\begin{aligned}
\frac{11x+25}{(x-5)(x+3)} &= \frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+3} \\
&= \frac{A(x+3)+B(x-5)}{(x-5)(x+3)} \\
&= \frac{(A+B)x+(3A-5B)}{(x-5)(x+3)}
\end{aligned}$$

Vamos resolver um problema um pouco mais simples:

$$\begin{aligned}
11x+25 &= (A+B)x+(3A-5B) \\
A+B &= 11 \\
3A-5B &= 25 \\
B &= 11-A \\
3A-5(11-A) &= 25 \\
3A-55+5A &= 25 \\
8A &= 80 \\
A &= 10 \\
B &= 11-10 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^3-6x^2-15x+55}{x^2-2x-15}\,dx &= \int 2x-2+\frac{11x+25}{(x-5)(x+3)}\,dx \\
&= \int 2x-2+\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+3}\,dx \\
&= \int 2x-2+\frac{10}{x-5}+\frac{1}{x+3}\,dx \\
&= x^2-2x+10\log(x-5)+\log(x+3)
\end{aligned}$$

Questão 3: mini-gabarito

$$\begin{array}{ll}
\displaystyle\int \frac{4\cos(\log x)(\operatorname{sen}(\log x))^3}{x}\,dx & \\
= \int 4\cos(\log x)(\operatorname{sen}(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x}\,dx & \\
\overset{(a)}{=} \int 4\cos(u)(\operatorname{sen}(u))^3\,du & \left[\begin{array}{c} u=\log x \\ \frac{du}{dx}=\frac{1}{x} \\ du=\frac{1}{x}dx \end{array}\right] \\
= \int 4(\operatorname{sen}(u))^3\cos(u)\,du & \\
\overset{(b)}{=} \int 4v^3\,dv & \left[\begin{array}{c} v=\operatorname{sen}u \\ \frac{dv}{du}=\cos u \\ dv=\cos u\,du \end{array}\right] \\
= v^4 & \\
= (\operatorname{sen}u)^4 & \\
= (\operatorname{sen}(\log x))^4 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
\text{[S3a]} & = & \left[\begin{array}{c} g(x):=\log x \\ g'(x):=\frac{1}{x} \\ f'(u):=4\cos(x)(\operatorname{sen}(u))^3 \end{array}\right] \\
\text{[S4a]} & = & \left[\begin{array}{c} g(x):=\log x \\ g'(x):=\frac{1}{x} \\ f'(u):=4\cos(x)(\operatorname{sen}(u))^3 \\ f(u):=(\operatorname{sen}u)^4 \end{array}\right] \\
\text{[MVI1][S3a]} & = & \left(\int 4\cos(\log x)(\operatorname{sen}(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x}\,dx \;=\; \int 4\cos(u)(\operatorname{sen}(u))^3\,du \right) \\
\text{[MVD4][S3a]} & = & \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} 4\cos(\log x)(\operatorname{sen}(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x}\,dx & = & f(\log x)\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & f(\log b) - f(\log a) \\ & = & f(u)\big|_{u=\log a}^{u=\log b} \\ & = & \int_{u=\log a}^{u=\log b} 4\cos(u)(\operatorname{sen}(u))^3\,du \end{array}\right) \\
\text{[MVD4][S4a]} & = & \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} 4\cos(\log x)(\operatorname{sen}(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x}\,dx & = & (\operatorname{sen}(\log x))^4\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & (\operatorname{sen}(\log b))^4 - (\operatorname{sen}(\log a))^4 \\ & = & (\operatorname{sen}(u))^4\big|_{u=\log a}^{u=\log b} \\ & = & \int_{u=\log a}^{u=\log b} 4\cos(u)(\operatorname{sen}(u))^3\,du \end{array}\right)
\end{array}$$

Questão 3: mini-gabarito (cont.)

$$
\begin{array}{rl}
& \displaystyle\int \frac{4\cos(\log x)(\operatorname{sen}(\log x))^3}{x}\,dx \\
= & \int 4\cos(\log x)(\operatorname{sen}(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x}\,dx \\
\overset{(a)}{=} & \int 4\cos(u)(\operatorname{sen}(u))^3\,du \qquad \left[\begin{smallmatrix} u=\log x \\ \frac{du}{dx}=\frac{1}{x} \\ du=\frac{1}{x}dx \end{smallmatrix}\right] \\
= & \int 4(\operatorname{sen}(u))^3\cos(u)\,du \\
\overset{(b)}{=} & \int 4v^3\,dv \qquad \left[\begin{smallmatrix} v=\operatorname{sen} u \\ \frac{dv}{du}=\cos u \\ dv=\cos u\,du \end{smallmatrix}\right] \\
= & v^4 \\
= & (\operatorname{sen} u)^4 \\
= & (\operatorname{sen}(\log x))^4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\text{[S2b]} & = & \left[\begin{smallmatrix} x:=u \\ u:=v \end{smallmatrix}\right] \\
\text{[S3b]} & = & \left[\begin{smallmatrix} g(x):=sen(x) \\ g'(x):=cos(x) \\ f'(u):=4u^3 \end{smallmatrix}\right] \\
\text{[S4b]} & = & \left[\begin{smallmatrix} g(x):=sen(x) \\ g'(x):=cos(x) \\ f'(u):=4u^3 \\ f(u):=u^4 \end{smallmatrix}\right] \\
\text{[MVI1][S3b]} & = & \left(\int 4(\operatorname{sen}(x))^3\cos(x)\,dx = \int 4u^3\,du \right) \\
\text{[MVI1][S3b][S2b]} & = & \left(\int 4(\operatorname{sen}(u))^3\cos(u)\,du = \int 4v^3\,dv \right) \\
\text{[MVD4][S3b][S2b]} & = & \left(\begin{array}{rcl} \int_{u=a}^{u=b} 4(\operatorname{sen}(u))^3\cos(u)\,du & = & f(\operatorname{sen}(u))\big|_{u=a}^{u=b} \\ & = & f(\operatorname{sen}(b)) - f(\operatorname{sen}(a)) \\ & = & f(v)\big|_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} \\ & = & \int_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} 4v^3\,dv \end{array} \right) \\
\text{[MVD4][S4b][S2b]} & = & \left(\begin{array}{rcl} \int_{u=a}^{u=b} 4(\operatorname{sen}(u))^3\cos(u)\,du & = & (\operatorname{sen}(u))^4\big|_{u=a}^{u=b} \\ & = & (\operatorname{sen}(b))^4 - (\operatorname{sen}(a))^4 \\ & = & v^4\big|_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} \\ & = & \int_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} 4v^3\,dv \end{array} \right)
\end{array}
$$