

Cálculo 2 - 2025.1

Aula 45: EDOs lineares

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2025.1-C2.html>

Links

[StewPtCap9p37](#) (p.557) 9.5 Equações Lineares

[StewPtCap9p41](#) (p.561) 9.5 Exercícios

[BoyceDip2p5](#) (p.23) 2.1 Equações lineares; método dos fatores integrantes

[BoyceDip2p11](#) (p.29) Problemas

[BoyceDipEng2p4](#) (p.24) 2.1 Linear Differential Equations; Method of Integrating Factors

[BoyceDipEng2p11](#) (p.31) Problems

[ZillCullenCap2p33](#) (p.68) 2.5 Equações lineares

[ZillCullenCap2p42](#) (p.77) 2.5 Exercícios

[ZillCullenEngCap2p26](#) (p.53) 2.3 Linear equations

[ZillCullenEngCap2p33](#) (p.60) Exercises 2.3

[DiffyQsP40](#) 1.4 Linear equations and the integrating factor

[DiffyQsP43](#) 1.4.1 Exercises

Provas:

[2jT273](#) 2024.2, P2

[2iT227](#) 2024.1, P2

[2hT279](#) 2023.2, P2

Quadros:

[2kQ108](#) 2025.1

[2jQ93](#) 2024.2

[2iQ86](#) 2024.1

[2hQ77](#) 2023.2

O método

Aqui a gente tem a explicação do Stewart de como resolver EDOs lineares com todas as partes em português deletadas:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} + P(x)y &= Q(x) & [1] \\
 I(x)(y' + P(x)y) &= (I(x)y)' & [3] \\
 (I(x)y)' &= I(x)Q(x) \\
 I(x)y &= \int I(x)Q(x) dx + C \\
 y(x) &= \frac{1}{I(x)} \left[\int I(x)Q(x) dx + C \right] & [4] \\
 I(x)y' + I(x)P(x)y &= (I(x)y)' = I'(x)y + I(x)y' \\
 I(x)P(x) &= I'(x) \\
 \int \frac{1}{I} dI &= \int P(x) dx \\
 I(x) &= Ae^{\int P(x) dx} \\
 A &= \pm e^C \\
 A &= 1 \\
 I(x) &= e^{\int P(x) dx} & [5]
 \end{aligned}$$

Repare que sem as partes em português ela vira algo que só gênios conseguem decifrar – e um dos nossos objetivos neste curso é aprender a organizar as contas de modo que elas fiquem fáceis de entender, de justificar e de verificar.

Se a gente deixa só as linhas [1], [4] e [5] e põe elas nesta ordem,

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} + P(x)y &= Q(x) & [1] \\
 I(x) &= e^{\int P(x) dx} & [5] \\
 y(x) &= \frac{1}{I(x)} \left[\int I(x)Q(x) dx + C \right] & [4]
 \end{aligned}$$

o método fica bem claro: pra resolver uma EDO da forma [1] a gente define um fator integrante $I(x)$ usando a definição da linha [5], e aí as nossas soluções vão ser as funções $y(x)$ da linha [4], onde C é uma constante qualquer.

Agora se a gente precisar resolver EDOs lineares basta aplicar um método que cabe em três linhas. Eu prefiro escrever ele usando outras letras,

$$\begin{aligned}
 y(x) &\Rightarrow f(x) \\
 P(x) &\Rightarrow g(x) \\
 \int P(x) dx &\Rightarrow G(x) \\
 Q(x) &\Rightarrow h(x) \\
 I(x) &\Rightarrow m(x)
 \end{aligned}$$

o omitindo os ' (x) ' na maioria dos lugares. A tradução é isto,

$$\begin{aligned}
 f' + gf &= h \\
 m &= e^G \\
 f &= \frac{1}{m} \left(\int mh dx + C \right)
 \end{aligned}$$

mas eu vou preferir escrever ela deste jeito:

$$[\text{EL}_3] = \left(\begin{array}{l} f' + fg = h \\ G' = g \\ f = e^{-G} \left(\int e^G h dx + C \right) \end{array} \right)$$

Exercício 0

O Stewart começa por este exemplo, que ele chama de [2]:

StewPtCap9p37 (p.557) $y' + \frac{1}{x}y = 2$

Seja $[S_1] = \left[\begin{array}{l} g:=1/x \\ h:=2 \\ G:=\ln x \end{array} \right]$.

- Use $[\text{EL}_3][S_1]$ pra obter a solução geral da EDO [2].
- Chame esta solução geral de $f_1(x)$ – use um “seja”! – e teste-a.
- Encontre a solução particular que passa pelo ponto $(2, 5)$.
- Chame esta solução particular de $f_2(x)$ – use um “seja”! – e teste-a.

O que realmente importa

Exercício importantíssimo!!!

Entenda isto aqui e reescreva num formato BEM mais fácil de entender:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad [1]$$

$$I(x)(y' + P(x)y) = (I(x)y)' \quad [3]$$

$$(I(x)y)' = I(x)Q(x)$$

$$I(x)y = \int I(x)Q(x) dx + C$$

$$y(x) = \frac{1}{I(x)} \left[\int I(x)Q(x) dx + C \right] \quad [4]$$

$$I(x)y' + I(x)P(x)y = (I(x)y)' = I'(x)y + I(x)y'$$

$$I(x)P(x) = I'(x)$$

$$\int \frac{1}{I} dI = \int P(x) dx$$

$$I(x) = Ae^{\int P(x) dx}$$

$$A = \pm e^C$$

$$A = 1$$

$$I(x) = e^{\int P(x) dx} \quad [5]$$

(%i1) e1 : 'diff(y,x) + 1/x * y = 2;

(%o1)

$$\frac{d}{dx}y + \frac{y}{x} = 2$$

(%i2) e2 : ode2(e1,y,x);

(%o2)

$$y = \frac{x^2 + \%c}{x}$$

(%i3) solve(e2, %c);

(%o3)

$$[\%c = x y - x^2]$$

(%i4) e3 : solve(e2, %c)[1];

(%o4)

$$\%c = x y - x^2$$

(%i5) e4 : subst([x=2,y=5], e2);

(%o5)

$$5 = \frac{\%c + 4}{2}$$

(%i6) solve(e4, %c);

(%o6)

$$[\%c = 6]$$

(%i7) e4 : solve(e4, %c)[1];

(%o7)

$$\%c = 6$$

(%i8)

subst(e4,e2);

(%o8)

$$y = \frac{x^2 + 6}{x}$$

(%i9) define(f2(x), rhs(subst(e4,e2)));

(%o9)

$$f2(x) := \frac{x^2 + 6}{x}$$

(%i10) e5 : subst([y=f2(x)], e1);

(%o10)

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 + 6}{x} \right) + \frac{x^2 + 6}{x^2} = 2$$

(%i11) ev(e5, diff);

(%o11)

$$2 = 2$$

(%i12)