

Cálculo 2 - 2025.1

Aulas 29 e 30: revisão de números complexos

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2025.1-C2.html>

Links

Provas:

2jT227 (2024.2, P1, gabarito)

2yT12 (2019.2, P1, gabarito)

<http://anggtwu.net/LATEX/2018-2-C2-P1.pdf#page=2> Questão 1

StewPtCap17p6 (p.1020) Equações diferenciais de 2ª ordem

StewPtCap17p20 (p.1034) Caso 3: subamortecimento

StewPtApendiceHp5 (p.A51) **Apêndice H: Números complexos**

BoyceDip3p5 (p.105) Capítulo 3: Equações lineares de 2ª ordem

BoyceDip3p11 (p.111) Seção 3.2: o operador diferencial L

BoyceDip3p13 (p.113) Teorema 3.2.2: o princípio da superposição

BoyceDip3p21 (p.121) 3.3. Raízes complexas da equação característica

BoyceDip3p23 (p.123) Figura 3.3.1

BoyceDipEng3p4 (p.103) Chapter 3: Second-order linear ODEs

BoyceDipEng3p11 (p.110) Section 3.2: the differential operator L

BoyceDipEng3p13 (p.112) Theorem 3.2.2: principle of superposition

BoyceDipEng3p21 (p.120) 3.3 Complex Roots of the Characteristic Equation

BoyceDipEng3p24 (p.123) Figure 3.3.1

<http://www.youtube.com/watch?v=-dhHrg-KbJ0> $e^{\pi i}$ for dummies (Mathologer)

https://en.wikipedia.org/wiki/Complex_number (bom)

https://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmoro_complexo (ruim, cheio de erros)

HernandezP57 (p.47) principais identidades trigonométricas

Quadros:

2jQ55 (2024.2)

2iQ81 (2024.1)

2hQ66 (2023.2)

2fQ45 (2022.2)

2yQ63 (2019.2)

```

(%i1) Re(z)      := realpart(z)$
(%i2) Im(z)      := imagpart(z)$
(%i3) sqhyp(z)   := Re(z)^2 + Im(z)^2$
(%i4) tom(z)     := matrix([Re(z),-Im(z)], [Im(z),Re(z)])$
(%i5) det(M)     := determinant(M)$
(%i6) nm(z)      := Re(z) + %i*Im(z)$
(%i7) stringdisp : false$
(%i8) z : a + %i*b;
(%o8)

```

$$ib + a$$

```

(%i9) w : c + %i*d;
(%o9)

```

$$id + c$$

```

(%i10) matrix([  z , "+",   w , "=",  nm(z+w)],
               [tom(z), "+", tom(w), "=", tom(z)+tom(w)],
               [  "", "",    "", "",    ""      ],
               [  z , "*",   w , "=",  nm(z*w)  ],
               [tom(z), ".", tom(w), "=", tom(z).tom(w)]);
(%o10)

```

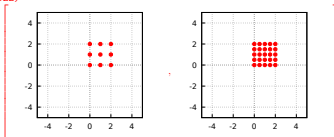
$$\left(\begin{array}{lcl}
 \begin{pmatrix} ib+a \\ a-b \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} id+c \\ c-d \\ d \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} i(d+b)+c+a \\ c+a-d-b \\ d+b+c+a \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} ib+a \\ a-b \\ b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} id+c \\ c-d \\ d \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} i(ad+bc)-bd+ac \\ ac-bd-(ad)-bc \\ ad+bc \quad ac-bd \end{pmatrix}
 \end{array} \right)$$

```
(%i11) drawzpts (zs,[opts]) := myqdrawp(xyrange(), zpts(zs, opts))$
(%i12) [xmin,ymin, xmax,ymax] : [-5,-5, 5,5]$
(%i13) myqdrawp_to_screen()$ myps(size) := ps(size)$
(%i15) myqdrawp_to_new_pdf()$ myps(size) := ps(size/5)$
(%i17) as_33      : create_list(x+%i*y, y,seqn(2,0,2), x,seqn(0,2,2));
(%o17)
```

```
[2i,2i+1,2i+2,2i+1,2i+2,0,1,2]
```

```
(%i18) as_55      : create_list(x+%i*y, y,seqn(2,0,4), x,seqn(0,2,4))$
(%i19) as_22      : create_list(x+%i*y, y,seqn(0,1,1), x,seqn(0,1,1))$
(%i20) D1 : drawzpts(as_33,      myps(3), pc(red))$
        D2 : drawzpts(as_55,      myps(3), pc(red))$
```

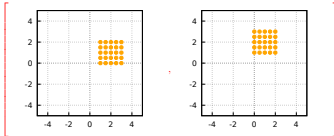
```
(%i21)
(%i22) [D1, D2];
(%o22)
```



```
(%i23) D3 : drawzpts(as_55 + 1,      myps(3), pc(orange))$
```

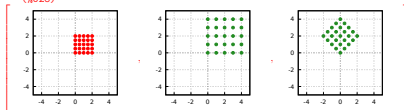
```
(%i24) D4 : drawzpts(as_55 + %i,      myps(3), pc(orange))$
```

```
(%i25) [D3, D4];
(%o25)
```



```
(%i26) D5 : drawzpts(as_55 * 2,      myps(3), pc(forest_green))$
(%i27) D6 : drawzpts(as_55 * (1+%i), myps(3), pc(forest_green))$
(%i28) [D2, D5, D6];
```

```
(%o28)
```



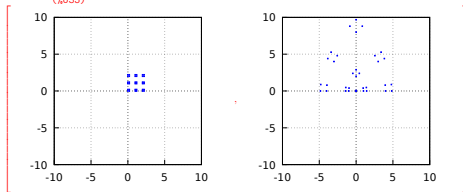
```
(%i29) topdf_opts : "height=10cm"$
(%i30) as_332      : create_list(z+w, z,as_33, w,as_22*0.2)$
(%i31) as_332_sq : makelist(z^2, z, as_332)$
(%i32) [xmin,ymin, xmax,ymax] : [-10,-10, 10,10];
```

```
(%o32)
```

```
[-10,-10,10,10]
```

```
(%i33) D7 : drawzpts(as_332,      myps(0.5))$
(%i34) D8 : drawzpts(as_332_sq, myps(0.5))$
(%i35) [D7, D8];
```

```
(%o35)
```



```
(%i36)
```

2019.2

$$\begin{aligned}
& (\operatorname{sen} 5\theta)^2 (\cos 6\theta)^2 \\
&= \left(\frac{E^5 - E^{-5}}{2i} \right)^2 \left(\frac{E^6 + E^{-6}}{2} \right)^2 \\
&= -\frac{1}{16} (E^{10} - 2 + E^{-10}) (E^{12} + 2 + E^{-12}) \\
&= -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} (E^{10} - 2 + E^{-10}) E^{12} + \\ (E^{10} - 2 + E^{-10}) \cdot 2 + \\ (E^{10} - 2 + E^{-10}) E^{-12} \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} E^{22} - 2E^{12} + E^2 + \\ 2E^{10} - 4 + 2E^{-10} + \\ E^{-2} - 2E^{-12} + E^{-22} \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{16} ((E^{22} + E^{-22}) - 2(E^{12} + E^{-12}) + 2(E^{10} + E^{-10}) + (E^2 + E^{-2}) - 4) \\
&= -\frac{1}{16} (2 \cos 22\theta - 4 \cos 12\theta + 4 \cos 10\theta + 2 \cos 2\theta - 4) \\
&= -\frac{1}{8} \cos 22\theta + \frac{1}{4} \cos 12\theta - \frac{1}{4} \cos 10\theta - \frac{1}{8} \cos 2\theta \\
\int (\operatorname{sen} 5x)^2 (\cos 6x)^2 dx &= \int -\frac{1}{8} \cos 22x + \frac{1}{4} \cos 12x - \frac{1}{4} \cos 10x - \frac{1}{8} \cos 2x + \frac{1}{4} dx \\
&= -\frac{1}{8 \cdot 22} \operatorname{sen} 22x + \frac{1}{4 \cdot 12} \operatorname{sen} 12x - \frac{1}{4 \cdot 10} \operatorname{sen} 10x - \frac{1}{8 \cdot 2} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4} x
\end{aligned}$$

Exercícios de “seja o seu próprio Geogebra”

Nestes exercícios a gente vai usar algumas técnicas de Cálculo 3 que eu vou explicar no quadro: o “seja o seu próprio Geogebra”, a convenção de escrever todos os labels, a convenção de que um vetor $\vec{v}$ é um deslocamento, e a convenção de que $A + \vec{v}$ é representado como **um ponto e uma seta**. Lembre que se **quase sempre** se você precisou fazer um conta – como o **resultado** de $A + \vec{v}$ – é porque você está fazendo algo errado.

Links:

3jT16 Uma convenção (temporária)

2kT140 Sobre músculos mentais e perguntar

Exercício 1.

a) Seja $z = i + 1$.

Represente graficamente $\{z^0, z^1, z^2, z^3, z^4\}$.
(Aqui você vai precisar fazer contas).

b) Faça o mesmo para $z = i$ (num outro gráfico).
(Aqui você também vai precisar fazer contas).

Exercício 2.

Sejam:

$$\begin{aligned} A(z, w) &= \{z, w, z + \overrightarrow{(w - z)}, z + \frac{1}{2}\overrightarrow{(w - z)}\} \\ B(z, w) &= \{z, w, z + \overrightarrow{(w - z)}, z + \frac{1}{4}\overrightarrow{(w - z)}\} \\ C(z, w) &= \{z, w, \frac{z+w}{2}\} \end{aligned}$$

Para cada um dos casos abaixo faça três gráficos – um pra $A(z, w)$, um pra $B(z, w)$ e um pra $C(z, w)$.

a) $z = 2 + 4i$ e $w = -3 + 4i$

b) $z = 2 + 4i$ e $w = 2 + i$

c) $z = 1 + 2i$ e $w = 4 + 3i$.

Exercício 3.

Lembre que $E = e^{i\theta}$ e $E^k = (e^{i\theta})^k = e^{i(k\theta)}$.

Seja

$$A(\theta) = \{E, E^2, E^3, E^0, E^{-1}\}$$

a) Represente graficamente $A(\theta)$ para $\theta = 45^\circ$.

b) Represente graficamente $A(\theta)$ para $\theta = 30^\circ$.

c) Represente graficamente $A(\theta)$ para $\theta = 60^\circ$.

d) Represente graficamente $A(\theta)$ para $\theta = -30^\circ$.

Exercícios de “seja o seu próprio Geogebra” (2)

O *conjugado* é definido assim: $\overline{a + ib} = a - ib$.

Mais precisamente: $\forall a, b \in \mathbb{R}, \overline{a + ib} = a - ib$.

Um exemplo concreto: $\overline{3 + 4i} = 3 - 4i$.

Exercício 4.

Sejam:

$$\begin{aligned} A(z) &= \{z, \bar{z}, -\bar{z}, \frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z+(-\bar{z})}{2}\} \\ B(z) &= \{z, \bar{z}, -\bar{z}, \frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2}\} \end{aligned}$$

Em cada um dos itens abaixo faça um gráfico para $A(z)$ e outro para $B(z)$. Os dois gráficos vão ser muito parecidos, só um label/rótulo vai mudar.

- a) $z = 3 + 2i$
- b) $z = 2 + 3i$
- c) $z = 2 + i$
- d) $z = 2 - i$

Exercício 5.

Lembre que $E = e^{i\theta}$.

Seja:

$$A(\theta) = \{E, E^{-1}, -E^{-1}, \frac{E+E^{-1}}{2}, \frac{E-E^{-1}}{2}\}.$$

Represente graficamente $A(\theta)$ em cada um dos casos abaixo.

- a) $\theta = 45^\circ$
- b) $\theta = 60^\circ$
- c) $\theta = 135^\circ$