

Cálculo 3 - 2025.1

P2 (segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2025.1-C3.html>

Links

<http://anggtwu.net/MAXIMA/2024-2-C3-P2.mac.html>
(find-angg "MAXIMA/2024-2-C3-P2.mac")

Questão 1

(Total: 10.0 pts)

Sejam:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= x + y^2 \\ G(x, y) &= 3x + y \\ r &= G^{-1}(-6) \\ A &= \{-3 - 2, -1, 0, 1, 2, 3\}^2 \\ B &= [-3, 3]^2 \\ C &= \{(x, y) \in B \mid G(x, y) \geq -6\} \\ D &= \{(x, y) \in B \mid G(x, y) = -6\} \\ F_B : B &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto F(x, y) \\ F_C : C &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto F(x, y) \end{aligned}$$

- a) (0.5 pts) Faça o diagrama de numerezinhos da função F . Desenhe um numezinho para cada ponto de A .
- b) (0.5 pts) Idem, mas para a função G .
- c) (0.5 pts) Desenhe as curvas de nível da G para $z = -2, -1, 0, 1, 2$.
- d) (0.5 pts) Desenhe os conjuntos r, A, B, C, D .
- e) (0.5 pts) Desenhe as curvas de nível da F para $z = -2, -1, 0, 1, 2$.
- f) (0.5 pts) Desenhe as curvas de nível da F_B para $z = -2, -1, 0, 1, 2$. Inclua a fronteira do domínio da F_B no seu desenho pra leitor conseguir ver até onde essas curvas de nível vão.
- g) (0.5 pts) Desenhe as curvas de nível da F_C para $z = -2, -1, 0, 1, 2$. Inclua a fronteira do domínio da F_C no seu desenho pra leitor conseguir ver até onde essas curvas de nível vão.
- h) (1.0 pts) Dê coordenadas aproximadas para os máximos e mínimos locais da função F_C .

Nos próximos itens você vai tentar fazer um truque que o Bortolossi ensina no capítulo 12 dele, em que ele mostra como encontrar máximos e mínimos locais na fronteira a partir de pontos na fronteira em que dois vetores gradientes são paralelos – e com isso você vai conseguir fazer uma versão melhorada do seu item (h).

Digamos que:

$$\begin{aligned} d(x) &= ax + b \\ s &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = d(x)\} \\ P(x) &= (x, d(x)) \end{aligned}$$

tais que $s = r$.

Isso (†) é uma *definição indireta*. O autor – no caso, eu – não está dizendo quais são os valores de a e b , e o leitor – no caso, você – vai ter que se virar pra descobrir.

i) (0.5 pts) Encontre a e b por chutar e testar. Você vai começar fazendo vários chutes-e-testes assim:

$$\begin{aligned} \text{Se } (a, b) &= (0, 1) \text{ então } s = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{+} & \text{+} & \text{+} \\ \hline \text{+} & \text{+} & \text{+} \\ \hline \text{+} & \text{+} & \text{+} \\ \hline \end{array} \text{ e } s \neq r = (\\ \text{Se } (a, b) &= (1, 1) \text{ então } s = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{+} & \text{+} & \text{+} \\ \hline \text{+} & \text{+} & \text{+} \\ \hline \text{+} & \text{+} & \text{+} \\ \hline \end{array} \text{ e } s \neq r = (\end{aligned}$$

- j) (1.0 pts) Calcule $\nabla F(x, y)$, $\nabla G(x, y)$, $\nabla F(P(x))$ e $\nabla G(P(x))$. Dica: à primeira vista $\nabla F(P(x))$ e $P(x) + \nabla G(P(x))$ para os seguintes valores de x : $x = -2.5$, $x = -2$, $x = -1.5$.
- k) (1.0 pts) Faça uma cópia do seu desenho do item (g) incluindo os vetores $P(x) + \nabla F(P(x))$ e $P(x) + \nabla G(P(x))$ para os seguintes valores de x : $x = -2.5$, $x = -2$, $x = -1.5$.
- l) (1.0 pts) Encontre o valor de x que faz com que $\nabla F(P(x))$ e $\nabla G(P(x))$ fiquem paralelos. Sugestão: faça uma tabela e encontre ele por chutar e testar. Chame esse valor de x de x_m .
- m) (1.0 pts) Faça uma cópia do seu desenho do item (g) incluindo os vetores $P(x) + \nabla F(P(x))$ e $P(x) + \nabla G(P(x))$ para $x = x_m$. Faça ele BEM grande e capriche!
- n) (1.0 pts) Calcule $F(D)$ e $F(C)$.

Lembre que se $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ então:

$$\begin{aligned} F(A) &= \{ F(x, y) \mid (x, y) \in A \} \\ F^{-1}(b) &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = b \} \\ F^{-1}(B) &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) \in B \} \end{aligned}$$

e que quando a gente escreve

$$\begin{aligned} G : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto F(x, y) \end{aligned}$$

isso define uma função G que se comporta como a F dentro do conjunto A , mas o domínio dessa G é só o conjunto A – quando a G recebe um ponto de $\mathbb{R}^2 \setminus A$ ela dá um erro.

Lembre que dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não nulos são *paralelos* quando $\exists \lambda \in \mathbb{R}. \vec{v} = \lambda \vec{w}$. Por exemplo, $\overrightarrow{(2, 3)}$ e $\overrightarrow{(20, 30)}$ são paralelos mas $\overrightarrow{(2, 3)}$ e $\overrightarrow{(5, 4)}$ não são paralelos.

Gabarito (abcdef)

```
(%i1) [xmin,xmax, ymin,ymax] : [-3,3, -3,3];
(%o1)
      [-3,3, -3,3]
```

```
(%i2) nums8(expr) :=
      apply(matrix,
      makelist(makelist(ev(expr), x,-3,3),
      y, seqby(3,-3,-1)))$
```

```
(%i3) F : x + y^2;
(%o3)
      y^2 + x
```

```
(%i4) G : 3*x + y;
(%o4)
      y + 3 x
```

```
(%i5) define(F(x,y), F);
(%o5)
      F(x,y) := y^2 + x
```

```
(%i6) define(G(x,y), G);
(%o6)
      G(x,y) := y + 3 x
```

```
(%i7) /* (a): 0.5 pts */
      nums8(F);
(%o7)
      ( 6 7 8 9 10 11 12
      1 2 3 4 5 6 7
      -2 -1 0 1 2 3 4
      -3 -2 -1 0 1 2 3
      -2 -1 0 1 2 3 4
      1 2 3 4 5 6 7
      6 7 8 9 10 11 12)
```

```
(%i8) /* (b): 0.5 pts */
      nums8(G);
(%o8)
      ( -6 -3 0 3 6 9 12
      -7 -4 -1 2 5 8 11
      -8 -5 -2 1 4 7 10
      -9 -6 -3 0 3 6 9
      -10 -7 -4 -1 2 5 8
      -11 -8 -5 -2 1 4 7
      -12 -9 -6 -3 0 3 6)
```

```
(%i9) /* (c): 0.5 pts */
      G_B : [myimp1(G~-2, lc(blue)),
      myimp1(G~-1, lc(forest_green)),
      myimp1(G~0, lc(gold)),
      myimp1(G~1, lc(orange)),
      myimp1(G~2, lc(red))];
```

```
(%i10) myqdrawp(xyrange(), G_B);
(%o10)
```



```
(%i11) /* (d): 0.5 pts */
      D_B : [myimp1(G~-6, lc(gray))];
(%i12) myqdrawp(xyrange(), D_B);
(%o12)
```



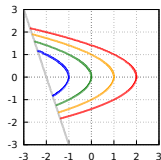
```
(%i13) /* (e): 0.5 pts */
      /* (f): 0.5 pts */
      F_B : [myimp1(F~-1, lc(blue)),
      myimp1(F~0, lc(forest_green)),
      myimp1(F~1, lc(orange)),
      myimp1(F~2, lc(red))];
```

```
(%i14) myqdrawp(xyrange(), F_B);
(%o14)
```



Gabarito (ghi)

```
(%i15) /* (g): 1.0 pts */
      F_ys(z) := block([ys],
        ys : solve([G=-6,F=z],[x,y]),
        [rhs(ys[1][2]), rhs(ys[2][2])])$
(%i16) F_min(y) := apply('min, F_ys(z))$
(%i17) F_max(y) := apply('max, F_ys(z))$
(%i18) F_C_z(z,color) := myapply_fl('impl, F=z, x=-3,3,
        y,F_min(y),F_max(y), lc(color))$
(%i19) F_C : [F_C_z(-1, blue),
        F_C_z( 0, forest_green),
        F_C_z( 1, orange),
        F_C_z( 2, red)]$
(%i20) myqdrawp(xyrange(), D_B, F_C);
```



```
(%i21) /* (h): 1.0 pts */
      [F(-2,0), F(3,-3), F(3,3)];
(%o21) [-2,12,12]
```

```
(%i22) /* (i): 0.5 pts */
      G=-6;
(%o22) y+3x=-6
(%i23) solve(G=-6, y);
(%o23) [y=-(3x)-6]
(%i24) solve(G=-6, y)[1];
(%o24) y=-(3x)-6
(%i25) rhs(solve(G=-6, y)[1]);
(%o25) -(3x)-6
(%i26) define(d(x), rhs(solve(G=-6, y)[1]));
(%o26) d(x):=-(3x)-6
(%i27) define(P(x), [x,d(x)]);
(%o27) P(x):=[x, -(3x)-6]
(%i28) [a,b] : [-3,-6];
(%o28) [-3,-6]
```

Gabarito (jkl)

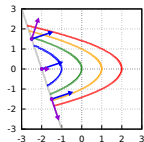
```
(%i29) /* (j): 0.5 pts */
grad(F) := [diff(F,x), diff(F,y)]$
(%i30) define(gradF (x,y), grad(F));
(%o30)
gradF (x,y) := [1,2 y]

(%i31) define(gradG (x,y), grad(G));
(%o31)
gradG (x,y) := [3,1]

(%i32) define(gradFP(x), apply('gradF, P(x)));
(%o32)
gradFP (x) := [1,2 (-(3 x) - 6)]

(%i33) define(gradGP(x), apply('gradG, P(x)));
(%o33)
gradGP (x) := [3,1]

(%i34) /* (k): 1.0 pts */
gradsP(x) := [myPv_c(P(x),gradGP(x)/3, blue),
myPv_c(P(x),gradFP(x)/3, dark_violet)]$
(%i35) gradsP_3 : [gradsP(-2.5), gradsP(-2), gradsP(-1.5)]$
(%i36) myqdrawp(xyrange(), D_B, F_C, gradsP_3);
(%o36)
```



```
(%i37) /* (l): 1.0 pts */
eq1 : 3*gradFP(x) = gradGP(x);
(%o37)
[3,6 (-(3 x) - 6)] = [3,1]

(%i38) eq2 : 3*gradFP(x)[2] = gradGP(x)[2];
(%o38)
6 (-(3 x) - 6) = 1

(%i39) solve(eq2, x);
(%o39)
[ x = -(37/18) ]

(%i40) solve(eq2, x)[1];
(%o40)
x = -(37/18)

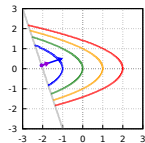
(%i41) xm : rhs(solve(eq2, x)[1]); /* -37/18 */
(%o41)
-(37/18)

(%i42) ym : d(xm); /* 1/6 */
(%o42)
1/6

(%i43) Fm : F(xm,ym); /* -73/36 */
(%o43)
-(73/36)
```

Gabarito (mn)

```
(%i44) /* (m): 1.0 pts */
(%i44) gradsP_xm : [gradsP(xm)]$
(%i45) myqdrawp(xyrange(), D_B, F_C, gradsP_xm);
(%o45)
```



```
(%i46) /* (n): 1.0 pts */
(%i46) Fnw : F(-3,d(-3));
```

```
(%o46)
```

6

```
(%i47) Fsw : F(-1,d(-1));
```

```
(%o47)
```

8

```
(%i48) Fne : F(3,3);
```

```
(%o48)
```

12

```
(%i49) Fse : F(3,-3);
```

```
(%o49)
```

12

```
(%i50) [Fm, Fnw, Fsw];
```

```
(%o50)
```

$$\left[-\left(\frac{73}{36}\right), 6, 8 \right]$$

```
(%i51) FD : [Fm, max(Fnw, Fsw)];
```

```
(%o51)
```

$$\left[-\left(\frac{73}{36}\right), 8 \right]$$

```
(%i52) FC : [Fm, max(Fnw, Fsw, Fne, Fse)];
```

```
(%o52)
```

$$\left[-\left(\frac{73}{36}\right), 12 \right]$$