Lógica pra pessoas que sabem resolver $2+x=5$ mas não sabem substituir x por 3 em $2+x=5$

(World Logic Day 2026)

https://anggtwu.net/math-b.html#2026-wld

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

Índice

Links

Dedicatória

Para Walter Machado Pinheiro,
que não leu e não vai ler
documento nenhum, e se ler
não vai entender

Abstract (ou quase)

O convite do Wacs
(Wilhelm Alexander Cardoso Steinmetz):

Bom dia, Eduardo!

Tudo bem?

Eu, Abílio Rodrigues (da UFMG) e Guilherme Araújo Cardoso (da UFOP) estamos organizando umas palestras online no dia da lógica 2026, dia 14/01/2026.

O tema será: "O que é a lógica, afinal?"

Nós ficaríamos muito felizes em ter a sua contribuição em forma de uma palestra remota relacionada a este assunto. Você pode abordar esse tema tanto de uma perspectiva matemática, quanto de uma perspectiva filosófica, a seu critério.

Por favor, me informe se você teria disponibilidade.

Cordialmente,

Alex

Obs:
[Steinmetz2025]
[OchsEBL2025]
[OchsEmacsConf2024]
[OchsPanic2024]

A minha resposta:

Opa!!!
Quero sim!!!

A coisa que eu poderia apresentar melhor teriam mais a ver com as coisas de Educação Matemática que eu estou estudando, que é: qual é a ordem mais natural pra aprender as regras lógicas quando você chega em Cálculo sabendo só o método pra resolver $2 + x = 5$ mas não sabendo substituir x por 3 em $2 + x = 5$?

Eu não sou um especialista de verdade em Educação Matemática mas eu tou há meses baixando maniacamente livros e artigos sobre EM e seguindo referências bibliográficas e as pessoas com as quais eu conversei me disseram que acham que agora eu conheço a literatura sobre EM melhor do que elas... e umas das funções da minha apresentação seria apresentar essa literatura pra mais gente.

Você pode perguntar aí pro Zoto se eles gostam dessa idéia pra apresentação?

Obs: eu pus links pra alguns dos melhores livros e artigos aqui:
`https://anggtwu.net/2025.2-C2.html#o-metodo`

[[]] =),
Eduardo...

Apresentação

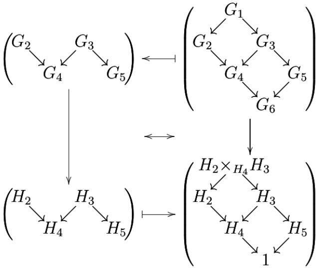
Dxô me apresentar...

Meu nome é Eduardo Ochs, eu trabalho num campus pequeno que a UFF tem em Rio das Ostras – o PURO, Pólo Universitário de Rio das Ostras, que é um lixo é tá infestado de zumbis (← mais sobre isso em breve)...

A minha área de pesquisa é (era?) principalmente Categorias, e eu passei anos empacado na minha pesquisa porque eu vi que na verdade eu não entendia direito os livros e artigos que eu deveria entender... e eu desempaquei quando eu comecei a encontrar técnicas pra fazer contas em vários niveis de detalhes em paralelo. Tem um exemplo à direita – ele é do melhor artigo que eu já escrevi, "On the Missing Diagrams in Category Theory (First-Person Version)".

$$\begin{tikzcd}
f^*G \arrow[d] & G \arrow[l, mapsto] \arrow[d] \\
H \arrow[r, mapsto] \arrow[ur, phantom, "\longleftrightarrow"] & f_*H
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[r, shift right, "f_*"'] & \mathcal{F} \arrow[l, shift right, "f^*"']
\end{tikzcd}$$



$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^{\mathbf{A}} \arrow[r, shift right, "f_*"'] & \mathbf{Set}^{\mathbf{B}} \arrow[l, shift right, "f^*"'] \\
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] & \mathbf{B}
\end{tikzcd}$$

Apresentação (2)

Eu disse que eu desempaquei – *na minha pesquisa* – quando eu comecei a encontrar técnicas pra fazer contas em vários niveis de detalhes em paralelo...

Essas técnicas também me ajudaram muito nas aulas que eu dou no PURO, que são principalmente Cálculo 2 e Cálculo 3. Tem um exemplo "básico" à direita; ele é da introdução do "Internal Diagrams and Archetypal Reasoning in Category Theory", que é um artigo meu de 2013.

Os alunos têm piorado muito, e da pandemia pra cá a gente começou a ter muitos, muitos, MUITOS alunos que acham que o objetivo de cada problema é só "chegar no resultado", e "chegar no resultado o mais rápido possível"... então, por exemplo, pra eles a resposta pra uma questão como esta

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \ = ?$$

é só:

$$\frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen}(x) + x\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} 2^{n+1} - 2^n &= 2^{1+n} - 2^n \\ &= 2 \cdot 2^n - 1 \cdot 2^n \\ &= (2-1) \cdot 2^n \\ &= 2^n \end{aligned}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} 2^{100} - 2^{99} &= 2^{1+99} - 2^{99} \\ &= 2 \cdot 2^{99} - 1 \cdot 2^{99} \\ &= (2-1) \cdot 2^{99} \\ &= 2^{99} \end{aligned}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{2^{100} - 2^{99} = 2^{99}}$$

Sanfonas

Nós que somos lógicos estamos acostumados com objetos que são como sanfonas com muita coisa estampada no tecido do fole. Quando esses objetos estão fechados a gente não vê nenhum detalhe do fole; quando a gente abre eles a gente vê tudo.

Em árvores de dedução é comum a barra dupla significar "aqui o fole tá fechado", ou "aqui a gente tá omitindo alguns passos", ou "aqui a gente tá omitindo alguns passos que são 'óbvios' *em algum sentido*".

Os dois exemplos à direita são do "*On the Missing Diagrams in Category Theory (First-Person Version)*", que fala bastante sobre essa noção de "óbvio".

$$\begin{array}{c} f : A' \to A \\ \hline\hline (\times B)_1 f : A' \times B \to A \times B \end{array} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p : A' \times B]^1}{\pi p : A'} \qquad f : A' \to A}{f(\pi p) : A} \qquad \dfrac{[p : A' \times B]^1}{\pi' p : B}}{(f(\pi p), \pi' p) : A \times B}}{(\lambda p{:}A' \times B.(f(\pi p), \pi' p) : A' \times B \to A \times B}\;1$$

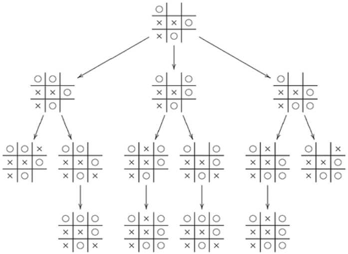
$$\begin{array}{c} P \to Q \\ \hline\hline P \land R \to Q \land R \end{array} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P \land R]^1}{P} \qquad P \to Q}{Q} \qquad \dfrac{[P \land R]^1}{R}}{Q \land R}}{P \land R \to Q \land R}\;1$$

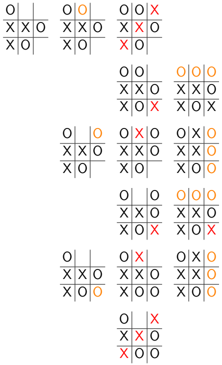
Jogo da Velha

Um bom jeito da gente introduzir essa idéia pra pessoas que sabem pouca matemática é começar por "game trees", e começar por um pedacinho da árvore do Jogo da Velha.

A figura no meio da página é do "Programming in Haskell, 2nd ed", do Graham Hutton. O Hutton sabe usar bem programas de desenho que fazem setas bonitas, mas eu não; a figura mais à direita é uma tradução minha da figura dele pra uma que eu achei mais fácil de fazem em LaTeX, em que os descendentes de cada nó são desenhados assim, $\begin{bmatrix} 1 & 1.1 & 1.1.1 \\ & & 1.1.2 \\ & 1.2 & 1.2.1 \end{bmatrix}$, e as cores indicam a última jogada e quem completou uma linha.

Daria pra desenhar a árvore toda, *mas a gente não quer*. Também daria pra apertar um botão que desativa as cores, ou apertar outros botões que mudam o jeito de desenhar a árvore.





Contas expandíveis

Pra gente é óbvio que dá pra expandir isso aqui

$$((6x^3)(7x^4))' \;=\; 294x^6$$

até chegar numa série de igualdades como a da direita, em que cada passo é fácil de justificar e a justificativa do passo (4) está escrita com todos os detalhes – esse passo usa a regra [RPot] com $n := 3$...

Mas pra muitos alunos isso é assustador, ELES NUNCA VIRAM ALGO TÃO ABSTRATO NA VIDA, e eles vão fazer de tudo pra deixar pra aprender isso depois, ou mais depois, ou mais depois ainda, ou se possível nunca.

Isso é uma "*pons asinorum*" bem conhecida do pessoal de Educação Matemática. Eu não conhecia nada da literatura sobre isso até um ano atrás, e um dos meus objetivos nessa apresentação vai ser mostrar um pouco disso pra vocês – com links pros melhores livros e artigos que eu encontrei.

$$
\begin{array}{rcll}
((6x^3)(7x^4))' & \overset{(1)}{=} & \frac{d}{dx}((6x^3)(7x^4)) \\
& \overset{(2)}{=} & (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\frac{d}{dx}(6x^3) \\
& \overset{(3)}{=} & (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\cdot 6 \cdot \boxed{\frac{d}{dx}x^3} \\
& \boxed{\overset{(4)}{=}} & (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\cdot 6 \cdot \boxed{3x^2} & \text{por } \underbrace{\underbrace{[\text{RPot}]}_{\left(\begin{array}{rl} & \frac{d}{dx}\,x^n \\ = & n\,x^{n-1} \end{array}\right)} \quad [n := 3]}_{\left(\begin{array}{rl} & \frac{d}{dx}\,x^3 \\ = & 3\,x^{3-1} \end{array}\right)} \\
& \overset{(5)}{=} & (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)(18x^2) \\
& \overset{(6)}{=} & (6x^3)\cdot 7\frac{d}{dx}x^4 + (7x^4)(18x^2) \\
& \overset{(7)}{=} & (6x^3)\cdot 7\cdot 4x^3 + (7x^4)(18x^2) \\
& \overset{(8)}{=} & (6x^3)(28x^3) + (7x^4)(18x^2) \\
& \overset{(9)}{=} & (6x^3)(28x^3) + 126x^6 \\
& \overset{(10)}{=} & 168x^6 + 126x^6 \\
& \overset{(11)}{=} & 294x^6
\end{array}
$$

Set comprehensions

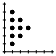
$$\{\, a \in \{2,3,4\} \mid a^2 < 10 \,\} = \{\, \underbrace{a \in \{2,3,4\}}_{\text{gen}} \mid \underbrace{a^2 < 10}_{\text{filt}} \,\}$$
$$= \{\, \underbrace{a \in \{2,3,4\}}_{\text{gen}}, \underbrace{a^2 < 10}_{\text{filt}} \,;\, \underbrace{a}_{\text{expr}} \,\}$$
$$= \{4, 9\}$$

```
for a=2,4 do
  if a^2<10 then
    print(a)
  end
end
```

$$\{\, 10a \mid a \in \{2,3,4\} \,\} = \{\, \underbrace{10a}_{\text{expr}} \mid \underbrace{a \in \{2,3,4\}}_{\text{gen}} \,\}$$
$$= \{\, \underbrace{a \in \{2,3,4\}}_{\text{gen}} \,;\, \underbrace{10a}_{\text{expr}} \,\}$$
$$= \{20, 30, 40\}$$

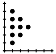
```
for a=2,4 do
  print(10*a)
end
```

$$\{\, \underbrace{x \in \{1,\ldots,5\}}_{\text{gen}}, \underbrace{y \in \{x,\ldots,6-x\}}_{\text{gen}} \,;\, \underbrace{(x,y)}_{\text{expr}} \,\} =$$



Set comprehensions (2)

$$\{\underbrace{x\in\{1,\ldots,5\}}_{\text{gen}},\underbrace{y\in\{x,\ldots,6-x\}}_{\text{gen}}\;;\;\underbrace{(x,y)}_{\text{expr}}\}\;=$$



```
for x=1,6 do
  for y=6,6-x do
    print(x,y)
  end
end
```

x	y	(x,y)
1	1	$(1,1)$
	2	$(1,2)$
	3	$(1,3)$
	4	$(1,4)$
	5	$(1,5)$
2	2	$(2,2)$
	3	$(2,3)$
	4	$(2,4)$
3	3	$(3,3)$
4	$\vert$	
5	$\vert$	

x	$6-x$	$\{x,\ldots,6-x\}$	y	(x,y)
1	5	$\{1,2,3,4,5\}$	1	$(1,1)$
			2	$(1,2)$
			3	$(1,3)$
			4	$(1,4)$
			5	$(1,5)$
2	4	$\{2,3,4\}$	2	$(2,2)$
			3	$(2,3)$
			4	$(2,4)$
3	3	$\{3\}$	3	$(3,3)$
4	2	$\{\}$	$\vert$	
5	1	$\{\}$	$\vert$	

Set comprehensions (3)

Set comprehensions também servem pra explicar como resolver problemas difíceis fazendo e testando hipóteses. Por exemplo, digamos que o aluno A tá se enrolando pra encontrar o resultado disso aqui,

$$\{\underbrace{x \in \{1,\dots,5\}}_{\text{gen}}, \underbrace{y \in \{x,\dots,6-x\}}_{\text{gen}} \; ; \; \underbrace{(x,y)}_{\text{expr}}\} \;=\; {\color{red}?}$$

que ele acha que dá isto:

Numa certa aula do curso a gente aprende as regras de um certo "jogo colaborativo", e o aluno A escreve a hipótese dele assim, e mostra pro aluno B:

$$C_1 = \{x \in \{1,\dots,5\}, y \in \{x,\dots,6-x\} \; ; \; (x,y)\}$$

$C_2 =$ 

$$C_1 \overset{{\color{red}?}}{=} C_2$$

...e o aluno B só responde: "testa o ponto $(4,3)$". Aí o aluno A faz isso aqui,

$$\begin{array}{rcl} (4,3) & \in & C_2 \\ (4,3) & \notin & C_1 \\ C_1 & \neq & C_2 \end{array}$$

...e descobre o que estava errado com o ponto que parecia estar fora do padrão.

Compare com este trecho de [SchoenfeldWhatCounts, p.70]:

So, Daro has taken a five-minute problem and blown it up into a day-and-a-half of classroom discussion. We all know teachers' response to that move: the curriculum doesn't allow the time for me to do that! Is what Phil did impractical, if not impossible?

Actually, no. If you look at the content that he covered, he did a week and a half's worth of content—tables, graphs, algebra, and connections across them—in two days. In working through the problem, he reviewed everything the students need to know about the topic. But equally important, this way of approaching the math meets issues of differentiation head on.

Set comprehensions (4)

Eu uso set comprehensions nos meus cursos desde 2010 e bolinha. Eu tenho um material com as idéias dos últimos slides e um montããããão de exercícios como estes aqui,

$$\begin{array}{rcl}
\{\, x \in \{1,2\} \;;\; (x, 3-x) \,\} &=& ? \\
\{\, x \in \{1,2,3\} \;;\; (x, 3-x) \,\} &=& ? \\
\{\, x \in \{0,1,2,3\} \;;\; (x, 3-x) \,\} &=& ? \\
\{\, x \in \{0, 0.5, 1, \ldots, 3\} \;;\; (x, 3-x) \,\} &=& ? \\
\{\, (x,y) \in \{0,1,2,3\}^2 \mid y = 3-x \,\} &=& ? \\
\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3-x \,\} &=& ?
\end{array}$$

...que costumava servir pros alunos relembrarem coisas como a equação da reta, pra eles começarem a treinar como fazer exercícios em grupo, pra eles verem como aproximar figuras com infinitos pontos por figuras como um número finito de pontos, e pra um monte de outras coisas...

E quando um aluno fazia um passo errado como o da terceira igualdade daqui,

$$\begin{array}{rcl}
y &=& \sqrt{x^2 - 16} + 5 \\
&=& \sqrt{x^2 - 4^2} + 5 \\
&=& x - 4 + 5 \\
&=& x + 1
\end{array}$$

...eu costumava dizer: vamos desenhar esses dois conjuntos daqui,

$$\begin{array}{lcl}
\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{x^2 - 4^2} + 5 \,\} &=& ? \\
\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x - 4 + 5 \,\} &=& ?
\end{array}$$

e eles viam que o primeiro era um semicírculo e o segundo era uma reta, e eles entendiam o que eles tinham errado.

Hoje em dia quando eu mostro isso eles não entendem $\boxed{\text{NADA}}$.

Equações diferenciais

No final do curso de C2 a gente vê um pouco de equações diferenciais, e eu via que 70% dos alunos não entendiam certas idéias que deveriam ser básicas... e desistiam de entender.

Considere esse problema aqui:

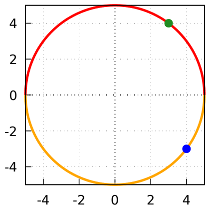
> Encontre a solução geral da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. Depois encontre a solução particular que passa pelo ponto $(3,4)$ e a que passa pelo ponto $(4,-3)$. Teste as suas respostas.

A solução particular que passa pelo $(3,4)$ é o semicírculo de cima, e a que passa pelo $(4,-3)$ é o semicírculo de beixo.

70% dos alunos até entendiam que o método às vezes dava uma solução "positiva" e uma "negativa", mas eles não faziam idéia de como testar as duas pra ver qual era a que passava por um certo ponto, não faziam idéia do que era "testar a solução" – e erravam nas contas do teste de propósito pra fingir que tudo tinha dado certo.

Se eu mantivesse o critério de correção óbvio esses alunos só perderiam 1.0 numa questão de 5.0 pontos – e eles nunca teriam motivação suficiente pra aprender algo importante mas difícil.

Eu queria encontrar critérios de correção que medissem o quanto eles sabiam, e não quantos % dos problemas-padrão eles conseguiam resolver...



...e eu queria que esses critérios fizessem eles aprenderem certas coisas rápido ao invés de deixarem elas sempre pra depois. Os critérios estabeleceriam prioridades.

Feynman (1952, CBPF)

De [FeynmanBrinc]:
Depois de muito investigar, descobri que os alunos tinham memorizado tudo, mas não sabiam o que aquilo significava. Quando ouviam dizer "luz que é refletida de um meio com um índice", não sabiam que isso significava um material como a água. Eles não sabiam que "o sentido da luz" é o sentido em que o sujeito vê alguma coisa quando está olhando para ela, e assim por diante. Tudo estava perfeitamente decorado, mas significado nenhum fora absorvido. Assim, se eu perguntasse "O que é ângulo de Brewster?", estaria entrando no computador com a senha correta. Mas se dissesse "Olhem para a água", nada acontecia — não havia resposta ao comando "Olhem para a água!"

Depois assisti a uma aula na escola de engenharia. A aula foi mais ou menos assim: "Dois corpos... são considerados equivalentes... se torques iguais... gerarem aceleração igual. Dois corpos são considerados equivalentes se torques iguais gerarem aceleração igual." Os alunos estavam lá sentados, escrevendo o ditado, e, quando o professor repetia a sentença, verificavam se tinham escrito tudo certo. E aí escreviam a próxima sentença e por aí vai. Eu era o único que sabia que o professor estava falando sobre corpos com o mesmo momento de inércia, e era difícil concluir isso.

Eu não conseguia vislumbrar como eles iam aprender com aquele método, fosse qual fosse o conteúdo. Ali estava o professor, falando de momento de inércia, mas não havia discussão sobre como varia a dificuldade de abrir uma porta quando do outro lado dela se põe um peso mais perto ou mais longe das dobradiças — nada!

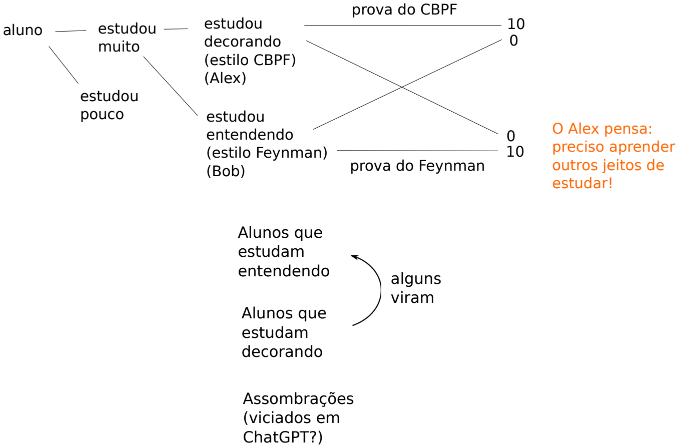
(...)

Dei um curso de métodos matemáticos aplicados à física na escola de engenharia, durante o qual tentei ensinar os alunos a resolver problemas por tentativa e erro. É uma coisa que eles normalmente não aprendem, então comecei com alguns exemplos simples de aritmética para introduzir o método. Fiquei surpreso porque apenas 10% dos alunos resolveu a primeira tarefa proposta. Então fiz uma grave preleção dizendo que eles precisavam tentar em vez de ficarem apenas sentados me vendo fazer.

Depois da aula, alguns alunos vieram a mim numa pequena delegação e disseram que eu não entendia a formação deles, que eles eram capazes de estudar sem resolver problemas, que já tinham aprendido aritmética e que as coisas que eu estava dizendo estavam abaixo do nível deles.

Então continuei com o curso, e, por mais complexa ou avançada que a matéria estivesse ficando, eles nunca me entregaram nenhum trabalho. Claro que percebi o que era aquilo: eles não conseguiam!

A prova do Feynman



Tipos de alunos

Eu costumo preparar os meus cursos pensando na "demografia" das turmas – quais vão ser os tipos de alunos que vão aparecer naquela turma, e quantos alunos eu vou ter de cada tipo.

As duas colunas à direita são de abril/2025 – "Resposta ao ofício da Engenharia de Produção". Deixa eu contar um pouco da história desse texto...

Em ago/2024 os alunos fizeram umas reclamações contra mim na coordenação do curso de Engenharia de Produção. A EP preparou um ofício e mandou pro meu departamento, o RCN. Eu só soube da existência dessas reclamações e desse ofício 5 meses depois; eu pedi cópia dele pra poder ler e responder e o chefe do RCN na época, o Fabinho, me disse "não vou te mandar". Eu só consegui a cópia mais 3 meses depois, e escrevi uma resposta grande, detalhada e cheia de links, e deixei pública e mandei pra EP e pro RCN.

Depois disso a demografia dos cursos mudou muito – TALVEZ por causa do ChatGPT – e agora os nossos cursos mais básicos têm pelo menos 50% de assombrações.

Obs: em 2025.2 eu dei uma optativa de λ-Cálculo pra uma turma com 80% de assombrações e Cálculo 3 numa turma em que as assombrações não vinham nas aulas, e as aulas eram como na foto do próximo slide.

- O aluno A já estudou Cálculo 2 pelo material do MIT,
- O aluno B fez Cálculo 2 no CEDERJ e passou, mas não conseguiu dispensa de disciplina,
- O aluno C também não conseguiu dispensa de disciplina, e ele aprendeu integração e EDOs em uma outra universidade, com o Professor Fulano, que é infinitamente melhor do que eu, mas o Professor Fulano não tem página na internet e o aluno C não guardou nada do material dos cursos dele, e portanto esse aluno C não pode me mostrar nada sobre como era o curso do professor Fulano,
- O aluno D fica perdido nas aulas e deixa pra estudar em casa por vídeos do Youtube,
- O aluno E trabalha, chega super atrasado nas aulas em que vem, e acha que os seus erros nas provas têm que ser considerados como erros pequenos porque afinal o objetivo do curso é inserir os estudantes no mercado de trabalho,
- O aluno F responde as questões da prova com umas contas que são 50% umas coisas incompreensíveis e 50% uns erros gritantes, e na vista de prova ele fica berrando "MAS TÁ CERTO, PORRA!!!" e dizendo que eu tou de marcação com ele,
- O aluno G fez Cálculo 1 com o Antônio, e segundo ele o Antônio tem um método de correção que é o melhor do mundo, em que se o aluno vem na vista de prova e justifica cada passo que ele, Antônio, não tinha entendido então ele, aluno, ganha um monte de pontos. Aí na vista de prova eu peço pra esse aluno G justificar um passo errado, e o diálogo é o seguinte:

  \- Eu aprendi esse método no Youtube!

  \- Onde? Você pode me dar o link?

  \- Eu não lembro!

  E esse aluno considera que conseguiu justificar o seu passo, e que portanto ele merece um montão de pontos.
- O aluno H sabe que teve um ensino médio péssimo mas é super dedicado, faz perguntas sempre que precisa e estuda o que a gente recomendar.
- O aluno I é parecido com o aluno H mas ele geralmente ignora recomendações e estuda pelos materiais que ele escolhe.

Todos esses personagens são inspirados em alunos que eu já tive. Os alunos parecidos com os personagens A, B e C são raros, mas os alunos parecidos com os personagens D, E, F, G, H e I são muito comuns...

Um curso sem assombrações

Uma foto da minha turma de Cálculo 3 em 2025.2...

Assombrações

Tem um filme de terror/suspense com a Christina Ricci chamado “The Gathering”, que é sobre uma cidadezinha da Inglaterra em que:

- estão acontecendo umas coisas sinistras,
- e uns arqueólogos estão escavando uma igreja do Século I, recém-descoberta,
- nessa igreja tem um cristo crucificado que fica de costas pro público e pro padre e de frente pra um painel no fundo da igreja,
- esse painel mostra várias figuras que estão assistindo a crucificação passivamente, por pura curiosidade mórbida...
- em cada tragédia que acontece nessa cidadezinha aparece um grupo de pessoas misteriosas que ficam assistindo a tragédia passivamente, *por pura curiosidade mórbida*, e desaparecem depois...
- e no final a gente descobre que essas pessoas são exatamente as que assistiram a crucificação de cristo, que são imortais e estão amaldiçoadas, condenadas a repetirem isso por toda a eternidade.

Como lidar com assombrações?

Na historinha do Feynman no CBPF tem uns alunos que só sabiam estudar "decorando", não sabiam estudar "entendendo", e aí eles nem conseguiam perguntar nada...

No meu slide sobre o CBPF o Alex tira 0 na prova do Feynman e pensa: preciso aprender outros modos de estudar.

Isso acontece de vez em quando nas minhas aulas, e esses Alexes viram alguns dos meus alunos mais empolgados...

...mas tem um monte de alunos que não interagem de jeito nenhum, e eu só consigo descobrir um *pouquinho* sobre como eles pensam vendo as provas deles – eu fotografei as provas deles e reli elas dezenas de vezes...

...e lendo as reclamações que eles fazem na coordenação. A coluna do meio é um trecho do ofício com as reclamações deles; e lembre que eu só recebi isso 8 meses depois do fim de semestre...

4) Metodologia de ensino baseada em repetição ("Integre como um macaco") e tentativa e erro, sem desenvolvimento de pensamento crítico. Essa abordagem vai de encontro ao perfil profissional do egresso em Engenharia de Produção da UFF, que tem como principais características:

I - ter visão holística e humanista, ser crítico, reflexivo, criativo, cooperativo e ético e com forte formação técnica;

II - estar apto a pesquisar, desenvolver, adaptar e utilizar novas tecnologias, com atuação inovadora e empreendedora;

III - ser capaz de reconhecer as necessidades dos usuários, formular, analisar e resolver, de forma criativa, os problemas de Engenharia;

IV - adotar perspectivas multidisciplinares e transdisciplinares em sua prática;

V - considerar os aspectos globais, políticos, econômicos, sociais, ambientais, culturais e de segurança e saúde no trabalho;

5) Dificuldade de diálogo com o professor, principalmente para sanar dúvidas.

Compare com este trecho da história do Feynman:

Depois da aula, alguns alunos vieram a mim numa pequena delegação e disseram que eu não entendia a formação deles, que eles eram capazes de estudar sem resolver problemas, que já tinham aprendido aritmética e que as coisas que eu estava dizendo estavam abaixo do nível deles.

Como lidar com assombrações (2)?

Até pouco tempo atrás eu achava que a maioria dos "alunos que não interagiam" eram só tímidos, inseguros, tinham "math anxiety" e coisas assim... mas hoje em dia o meu modelo mental é diferente.

Hoje em dia eu acho que muitos – talvez 90% – dos "alunos que não interagem" *não vão interagir de jeito nenhum*... nem que eu implore, nem que eles tenham todo o apoio pra começar fazendo perguntas péssimas, nem que eles tirem 0 na P1 e 0 na P2 porque só estudaram "coisas de quem decora", nem que eles sejam reprovados n vezes, etc, etc...

Um bom jeito pra gente pensar nisso é imaginar que eles são viciados em ChatGPT, no sentido do artigo do Ronald Purser na Current Affais, "*AI is Destroying the University and Learning Itself*"...

Esses alunos querem "passar fazendo o mínimo possível de esforço", querem "aprender o mínimo possível", e "não querem que ninguém descubra nada do que eles pensam"...

Até um tempo atrás eu achava que eu podia pedir coisas tipo isso pra eles: "*peçam pra algum amigo músico de vocês, se possível um amigo baterista, tentar tocar só a parte da mão direita do exercício abaixo*" – o exercício 1 do "Syncopation", do Ted Reed – "*ele provavelmente vai dizer 'caraca, eu vou precisar de uma semana pra conseguir tocar direito os compassos 10, 11 e 12'... e peçam pra ele explicar pra vocês porque é que ele só vai conseguir tocar isso direito se treinar bastante.*"

Precisamos de mais Patrícias e menos Anas Isabéis

Antigamente todo mundo tinha medo dos cursos com muita Matemática, como Engenharia de Produção e Ciência da Computação, e as pessoas só entravam nesses cursos quando elas sabiam que "levavam jeito pra Matemática"... e elas descobriam que levavam jeito pra Matemática na escola, quando elas viam que conseguiam descobrir muita coisa sozinhas.

Aí a educação piorou muito, e primeiro começaram a aparecer nos nossos cursos alguns alunos como os dessas historinhas daqui – a do "professor, qual é a fórmula?", e a do Gênio da Turma... link:

Slogans#01:10

E de uns tempos pra cá os alunos que queriam só decorar fórmulas se tornaram tão numerosos que eles nem reparam mais que alguns colegas deles já conhecem algumas técnicas pra descobrirem os métodos sozinhos... e aí acontecem coisas como essa reclamação daqui,

`https://anggtwu.net/2025-oficio-da-EP-resp.html#macaco`

que a coordenação não fazia idéia de como responder e repassou pra mim.

A GENTE PRECISA DE TODA AJUDA QUE PUDER, e eu tou conversando sobre isso com tipo *todo mundo*, porque eu sei que muitas das pessoas que podem me ajudar estão espalhadas por aí, disfarçadas de pessoas comuns...

...e nisso a Patrícia do Hortifruti Sabor da Fruta virou uma referência pra mim, porque a gente sempre conversava quando eu ia lá comprar coisas com a minha catchorrinha, e um dia eu contei essas histórias dos meus alunos pra ela e eu descobri que ela já tinha trabalhado como professora de alfabetização, e ela me disse pra eu ler os livros da Emília Ferrero, e eu achei eles fantásticos, e durante muito tempo eles foram os únicos livros sobre Educação EM PORTUGUÊS que eu conhecia e que eu achava muito bons e muito úteis pro que eu tava fazendo...

O meu departamento tá um lixo, né? A gente tem a Ana Isabel, que todo mundo do campus considera como a nossa grande especialista em Educação, e o Reginaldo, que é menos famoso mas que fez licenciatura... e em 2025.1, que foi o semestre em que eu disse pra todos os meus alunos fazerem requerimentos de revisão de prova...

...a Ana Isabel só me recomendou um livro que eu achei uma BOSTA, e o Reginaldo não recomendou nada, só mandou um "O professor Eduardo já deveria saber"...

Pensa na seguinte situação: você tá numa mesa com um monte de gente e você fala pra pessoa do seu lado "passa o sal?", e ela responde "NÃO". Isso é meio inconcebível, né? Por mais que as pessoas tenham éticas um pouco diferentes acho que todo mundo vai concordar que pega incrivelmente mal responder "NÃO!" quando o seu vizinho de mesa te pede "passa o sal?"...

Eu vou usar a Patrícia como símbolo, e vou usar o termo "Patrícia" pra me referir às pessoas que acham natural as pessoas trocarem idéias, compartilharem conhecimento e se ajudarem, e vou usar o termo "Ana Isabel" pra me referir às pessoas que acham natural não "passar o sal" pra um colega de departamente que está com dificuldades EM ALGO EM QUE VOCÊ É ESPECIALISTA.

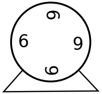
Versão completa:

Cálculo 2 é horrível

Obs: este slide é só pra quem já estudou Cálculo...

$$
\begin{array}{rcl}
\int \cos x^2 \; (2\,x) \;\; dx & = & \int \cos u \; du \\
\int \cos \underbrace{x^2}_{u} \; \underbrace{\underbrace{2\,x}_{\frac{d\,u}{d\,x}} \; (d\,x)}_{d\,u} & = & \int \cos \underbrace{u}_{x^2} \;\; \underbrace{d\,u}_{\underbrace{\frac{d\,u}{d\,x} \; (d\,x)}_{2\,x \; (d\,x)}} \\
\int \cos x^2 \; (2\,x) \;\; dx & = & \sin x^2 \\
 & = & \sin u \\
 & = & \int \cos u \; du \\
\int_{x=a}^{x=b} \cos x^2 \; (2\,x) \;\; dx & = & \sin x^2|_{x=a}^{x=b} \\
 & = & \sin b^2 - \sin a^2 \\
 & = & \sin u|_{u=a^2}^{u=b^2} \\
 & = & \int_{u=a^2}^{u=b^2} \cos u \; du
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\int f'\,(g\,(x)) \;\; g'\,(x) \;\; dx & = & \int f'\,(u) \;\; du \\
\int f'\,(\underbrace{g\,(x)}_{u}) \;\; \underbrace{\underbrace{g'\,(x)}_{\frac{d\,u}{d\,x}} \; (d\,x)}_{d\,u} & = & \int f'\,(\underbrace{u}_{g\,(x)}) \;\;\; \underbrace{d\,u}_{\underbrace{\frac{d\,u}{d\,x} \; (d\,x)}_{g'\,(x) \; (d\,x)}} \\
\int f'\,(g\,(x)) \;\; g'\,(x) \;\; dx & = & f\,(g\,(x)) \\
 & = & f\,(u) \\
 & = & \int f'\,(u) \;\; du \\
\int_{x=a}^{x=b} f'\,(g\,(x)) \;\; g'\,(x) \;\; dx & = & f\,(g\,(x))|_{x=a}^{x=b} \\
 & = & f\,(g\,(b)) - f\,(g\,(a)) \\
 & = & f\,(u)|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\
 & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'\,(u) \;\; du
\end{array}
$$



Testes de nivelamento

Em cada semestre a partir de 2024.1 eu dava pelo menos um dos testes TN1, TN2 e TN3 abaixo. Os resultados eram catastróficos, e depois a gente passava pelo menos uma hora discutindo pra eu tentar entender o que os alunos sabiam e o que não sabiam – e o que eles conseguiam descobrir (ou pelo menos entender) e o que não.

Este teste é só pra eu descobrir o quanto vocês sabem de certas técnicas de Cálculo 1 – eu vou usar as informações daqui pra decidir como organizar o curso.

Por favor escrevam:

- seu nome legível (em todas as folhas),
- com quem você fez GA, C1 e Prog1 no semestre em que você passou em cada uma, e em qual semestre foi,
- as respostas dos exercícios e tudo que você conseguir fazer pra tentar resolver eles.

TN1) Represente graficamente:

$$f(x) = \begin{cases} 3-x, & \text{quando } x \leq 2 \\ x-2, & \text{quando } 2 < x \end{cases}$$

TN2) $\frac{d}{dx} f(\mathrm{sen}(x^4) + \ln x) \;=\; ?$

TN3) Represente o limite abaixo como $f'(a)$. Quem são f e a?

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(1+\varepsilon)^{10}-1}{\varepsilon}$$

Obs: o TN3 é cópia exata de um exercícios do Stewart...
StewPtCap2p62 (p.133) Definição da derivada
StewPtCap2p67 (p.138) Exercícios 33–38

Dicas (que você não é obrigado a usar!):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} \\ f'(a) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon} \\ f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ f'(a) &= \left.\left(\frac{d}{dx} f(x)\right)\right|_{x=a} \end{aligned}$$

Testes de nivelamento: modelagem

Em C1 e GA os alunos deveriam aprender a resolver problemas em português, como esse aqui...

> Dê a equação da reta que passa pelos pontos $(1,2)$ e $(3,-4)$ e confira o seu resultado.

Mas isso tava tão *obviamente acima* do nível dos meus alunos de C2 que eu nem dei um teste de nivelamento pra confirmar que eles não sabiam como lidar com problemas assim. Deixa eu explicar.

Uma solução pra ele em português começa assim: "sejam $P = (1,2)$, $Q = (3,-4)$, e seja $f(x) = ax + b$ uma reta que passa pelos pontos A e B".

Pros meus alunos de Cálculo 2 isso é apavorante, porque tá cheio de operações que eles não entendem e que o texto da solução trata como óbvias, mas que são conceitos tão complicadas quanto "variável" e '='... tem o "seja", tem a escolha de nomes como P, Q, f, a e b pra certos objetos do problema, tem o "que passa pelos pontos A e B", que a gente usa pra encontrar os valores de a e b...

Eu acho que é mais fácil entender a solução em português se a gente começa também com a solução em Maxima – à direita – e a gente compara a solução em português com a solução em Maxima.

Na solução em Maxima fica claro como o estado do sistema muda a cada passo, e várias perguntas são naturais... por exemplo, a gente pode responder a pergunta "eu poderia ter usado outros nomes ao invés de P, Q e f?" trocando os nomes P, Q e f, que são "bons" no sentido de que seguem as convenções dos livros, por nomes como "Drácula", "mãe", "repolho" e "deus", que são nomes "ruins", *mas o computador não sabe disso...*

Eu acho que pros alunos que estão chegando nas minhas turmas de C2 hoje em dia o problema em português à esquerda fica mais bem fácil de resolver se a gente acrescenta instruções como estas: "Comece tentando fazer um programa em Maxima que funcione. Não se preocupe se você usou nomes bons ou não. Não se preocupe se o seu problema tem linhas desnecessárias ou não. Consulte os programas tais e tais pra ter exemplos de comandos que funcionam. Depois tente traduzir a sua solução pra 'Português com Matematiquês' seguindo o estilo dos exemplos tais e tais. *Esta é a parte mais difícil, porque o significado dos termos como "seja" e "que passa pelos pontos tais e tais" não está explicado precisamente em lugar nenhum – você vai ter se virar.*

```
(%i1) P : [1,2]$
(%i2) Q : [3,-4]$
(%i3) f(x) := a*x + b$
(%i4) eq1 : f(P[1]) = P[2];
(%o4)
```
$$b + a = 2$$
```
(%i5) eq2 : f(Q[1]) = Q[2];
(%o5)
```
$$b + 3a = -4$$
```
(%i6) ab  : solve([eq1,eq2], [a,b]);
(%o6)
```
$$[[a = -3, b = 5]]$$
```
(%i7) subst(ab, f(x));
(%o7)
```
$$5 - 3x$$
```
(%i8) define(g(x), %);
(%o8)
```
$$g(x) := 5 - 3x$$
```
(%i9) g(1);
(%o9)
```
$$2$$
```
(%i10) g(3);
(%o10)
```
$$-4$$

O teste de nivelamento 3

$$\frac{d}{dx}\,f(x)\Big|_{x=a} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(a+\epsilon)-f(a)}{\epsilon}$$

$$\frac{d}{dx}\,x^{10}\Big|_{x=1} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{(1+\epsilon)^{10}-1^{10}}{\epsilon}$$

"É só notação"

O TN2 era assim:

$$\frac{d}{dx}\,f(\mathrm{sen}(x^4)+\ln x) \;=\; {\color{red}?}$$

Os alunos achavam que isso era "a derivada da função $\mathrm{sen}(x^4)+\ln x$", e que o f "era só notação".

No diagrama à direita – $\begin{smallmatrix}1 & \to & 2\\ \downarrow & \searrow & \downarrow\\ 3 & \to & 4\end{smallmatrix}$ – eles conheciam a fórmula 1 e conseguiam usar a regra da cadeia pra chegar na 4, mas não entendiam nem as fórmulas 2 e 3 e nem isso aqui:

```
ddx
|
f
|
+-----.
|     |
sen   ln
|     |
^     x
|--.
|  |
x  4
```

Talvez eles não entendessem a idéia de "f é uma função qualquer"...

$$\begin{tikzcd}
\left(\begin{array}{c}\frac{d}{dx}f(g(x)) = \\ f'(g(x))g'(x)\end{array}\right) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \left(\begin{array}{c}\frac{d}{dx}f(42x) = \\ f'(42x)\cdot 42\end{array}\right) \arrow[d] \\
\left(\begin{array}{c}\frac{d}{dx}\sin(g(x)) = \\ \cos(g(x))g'(x)\end{array}\right) \arrow[r] & \left(\begin{array}{c}\frac{d}{dx}\sin(42x) = \\ \cos(42x)\cdot 42\end{array}\right)
\end{tikzcd}$$

O que os alunos não sabiam

Então: os alunos estavam chegando nas minhas turmas de Cálculo 2 "sem saberem nada", e eu comecei a documentar isso, dando testes de nivelamento e fotografando esses testes e as provas deles e relendo esses testes e provas dezenas de vezes pra entender os erros...

...e eu acabei descobrindo que eles "*não sabiam*" coisas que eu achava "*que era impossível alguém não saber*".

Lembre que o título desta apresentação é:

> *Lógica pra pessoas que sabem resolver* $2 + x = 5$ *mas não sabem substituir* x *por* 3 *em* $2 + x = 5$

A coluna do meio deste slide é do [Hewitt1, p.6] – "*Arbitrary and Necessary Part 1: a Way of Viewing the Mathematics Curriculum*". Repare no "his actions are informed by a memory of something to 'do' "...

rightfully returns to the realm of awareness. All too often, however, a student just accepts this received wisdom and treats it as something to be memorised or, indeed, forgotten.

In a lesson I observed, some 14-15-year-olds were working on solving simultaneous equations, and one student was having difficulties with re-arranging an equation. He had written:

$$x - y = 2$$

$$y = 2 - x$$

I asked him about the '–' sign in front of the y and his response was to re-write the second equation as:

$$y = 2 + x$$

I said that I felt he had done the correct thing when taking away the x, but that there was still a '–' sign in front of the y. I wrote a '–' in front of the y in the original second equation:

$$-y = 2 - x$$

He then changed both the subtractions to additions saying "two negatives make a positive":

$$+y = 2 + x$$

This is one example of a student remembering some received wisdom – "two negatives make a positive" – but not remembering the situations in which this received wisdom is appropriate. This is a phrase he has remembered, but he has not got the awareness to accompany the memorised phrase. Rather than basing his actions on a mathematical awareness of inverse, his actions are informed by a memory of something to 'do' when there are two negatives present.

Transformations of equations are concerned with what is necessary and a teacher providing such a phrase turns such awareness into received wisdom which a student may then try to memorise. The problem with memory is that it gives the opportunity to forget. In this case, the phrase is remembered, but the associated situation it relates to (which is relatively complex) is forgotten.

Muitos alunos estão chegando em Cálculo 2 com a certeza absoluta de que *Matemática é decorar métodos*, e acho que eles acham que "entender" e "deduzir" é só pra gênios, e que eles não têm tempo pra isso...

Isto é da p.7 do [SchoenfeldWhenGood]:

> Belief 3: Only geniuses are capable of discovering, creating, or really understanding mathematics. Corollary: Mathematics is studied passively, with students accepting what is passed down "from above" without the expectation that they can make sense of it for themselves.

Métodos e memória: a regra da cadeia

Uma coisa que eu descobri era que os meus alunos de Cálculo 2 tinham uma lembrança beeeem vaga de que a fórmula da Regra da Cadeia era esta,

$$\frac{d}{dx} f(g(x) \;=\; f'(g(x))g'(x)$$

E em Cálculo 1 eles tinham decorado um método que era parecido com isso aqui,

$$\frac{d}{dx} \underbrace{f}_{\substack{\text{função}\\\text{de fora}}} \underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{avaliada}\\\text{na função}\\\text{de dentro}}} \;=\; \underbrace{f'}_{\substack{\text{derivada}\\\text{na função}\\\text{de fora}}} \underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{avaliada}\\\text{na função}\\\text{de dentro}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivada}\\\text{da função}\\\text{de dentro}}}$$

e que servia pra fazer contas como esta,

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen}(42x) \;=\; \cos(42x) \cdot 42$$

mas no método que eles tinham aprendido – *e que já tinham esquecido quase que totalmente* – eles tinham que guardar na memória quais era "a função de fora", "a função de dentro", "a derivada da função de fora" e a "derivada da função de dentro"...

...eles não tinham nenhum truque pra escrever num cantinho do papel quais eram essas quatro funções, então esse método só funcionava quando eles lembravam o método tão bem que sobrava espaço mental suficiente pra um pouco de "memória de trabalho" ("working memory") pra eles lembrarem as quatro funções.

Esse método acabava só funcionando em casos muito simples, e falhava em vários casos mais complicados, como:

- $\frac{d}{dx} \operatorname{sen}(\tan x)$, em que eles não conseguiam escolher o melhor modo de escrever a "derivada da função de dentro",
- $\frac{d}{dx} \operatorname{sen}(\cos 42x)$, em que eles não conseguiam escolher se a "função de fora" seria $\operatorname{sen}(u)$ ou $\operatorname{sen}(\cos u)$,
- $\frac{d}{dx} \operatorname{sen}(\cos(\tan(42x)))$, em que mesmo se eles conseguissem escolher qual era a "função de fora" e a "função de dentro" eles não conseguiriam calcular as derivadas das duas de cabeça – e eles não sabiam os truques pra calcular as derivadas em outra parte do papel,
- $\frac{d}{dx} f(x^4)$, que eu vou discutir daqui a pouco.

A regra da cadeia

O que era a regra da cadeia pra esses alunos?
Eles sabiam que a fórmula era essa,

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) \;=\; f'(g(x))g'(x)$$

e que isso valia "pra qualquer f e qualquer g"...
Será que eles pensavam de algum destes jeitos?

$$\begin{array}{ll} \text{[RC1]} & \forall f,g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}).\, \frac{d}{dx}f(g(x)) \;=\; f'(g(x))g'(x) \\ \text{[RC2]} & \forall f,g \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}).\, \frac{d}{dx}f(g(x)) \;=\; f'(g(x))g'(x) \\ \text{[RC3]} & \forall f \in C^1(J,\mathbb{R}).\, \forall f \in C^1(I,J).\, \frac{d}{dx}f(g(x)) \;=\; f'(g(x))g'(x) \end{array}$$

Variáveis livres são um conceito bem complicado – pra mim —
e eu geralmente me livro delas usando quantificadores...

Na [RC3] aparecem duas variáveis livres novas,
os intervalos I e J...

O que esses alunos viram em C1? Será que eles viram teoremas
e demonstrações? Talvez sim, ó:

Reginaldo: O Edwin por exemplo já deu cálculo 1. Duvido q ele tenha dado uma única ideia de demonstração no curso todo. Não deve nem ter provado q se a função tem derivada zero ela tem q ser constante. Quem dirá o TVM.

Mas como a gente entende os teoremas de C1 sem entender caso particular?

f é uma função qualquer

De [PuigRojano, p.216]:

As one follows the developments of the solutions in the examples just given, in the Trattato di Fioretti (abbaco) and in De Numeris Datis, one observes that these mediaeval works correspond to two clearly differentiated levels of language, but one also observes that a characteristic that they have in common is the fact that in them there is no systematic treatment of the operations performed on the terms (of the equation) that involve unknown quantities. That is, there is no operation on the unknown. An indication of operation between literals that appears in De Numeris Datis is the juxtaposition of characters to indicate a sum of magnitudes, but this symbolisation of an operation does not go beyond the level of the expression, that is, it is not translated into syntax rules applied to these new symbols.

De [FilloyRojano, p.19]:

These observations make it feasible to hypothesize certain lines of evolution from arithmetical to algebraic language which correspond to the notions and the forms of representation of the objects and operations involved in the changeover. The changes which the learner has to make to gain access to algebraic language can then be visualized, on each of these lines, as cut-points separating one kind of thought from the other.

One of these cuts is particularly interesting for the theme of problem solving: it is suggested by an analysis of the strategies and methods of solving systems of equations found in the pre-symbolic algebra textbooks of the 13th, 14th and 15th centuries...

Tipos de memória

Eu costumo pensar em termos de "tipos de memória" de um jeito bem improvisado. O Hewitt tem um artigo interessantíssimo sobre tipos de memória – "*Arbitrary and Necessary Part 2: Assisting Memory*", de 2001, [Hewitt2] – e a coluna da direita é de um artigo chamado "*The math anxiety-math performance link and its relation to individual and environmental factors: a review of current behavioral and psychophysiological research*" ([ChangBeilock, p.34]), que eu encontrei googlando por "working memory" bem amadoristicamente...

Working memory is a limited short-term memory system that enables one to attend to the relevant task at hand while inhibiting irrelevant information (see [21]). Math-anxious individuals perform poorly on math tasks that rely substantially on working memory, such as addition that involves carrying, but do not show decrements when the problems can be solved via simple fact retrieval [14]. Consequently, it is hypothesized that worries and intrusive thoughts associated with math anxiety reduce working memory resources needed for cognitively demanding math tasks

Level reduction

De [TallLongTerm, pp.58–59]:

In geometry, this development is formulated in terms of successive van Hiele levels. For instance, at the first visual level, squares and rectangles are seen as being different, but at the next level, a square is a special case of a rectangle. Likewise in arithmetic and algebra, expressions that represent different processes are later seen as representing the same crystalline concept. As the number systems become more sophisticated through whole numbers, fractions, signed numbers, infinite decimals, real numbers, and complex numbers, the crystalline structure subtly changes.

In practice, new ideas are often introduced by learning how to carry out procedures. For example, in the United States, the acronym "FOIL" is introduced to calculate $(a+b)(c+d)$ by multiplying the first elements in the brackets $a \times c$, then the outside elements $a \times d$, then the inside elements $b \times c$, then the last elements $b \times d$. We also teach a more subtle technique to factorize an expression such as x^2+5x+6 by seeking two numbers whose product is 6 and sum is 5.

This may have the unintended consequence that what is happening is the translation of one expression into a different expression, without realizing that these are just different ways of representing the same underlying crystalline concept. In this case, level reduction has occurred in which the student has learnt to carry out the procedures without grasping the rich flexibility of the mathematical structure.

In the United States, there are many examples of level reduction in teaching college algebra where textbooks are laid out using various devices such as color coding text or placing significant statements in boxes to remind the learner what should be remembered to be able to pass the test. As a result, there are more and more disconnected ideas to be remembered that increase the longer-term likelihood of overload and error.

The Gains and Pitfalls of Reification

If the context changes, $3(x+5)+1$ may become yet another thing: a function...

(...)

The things look still more complicated when a letter appears instead of one of the numerical coefficients, like in $a(x+5)+1$. The resulting expression may now be treated as an entire family of functions from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$. Alternatively, one may claim that what hides behind the symbols is a function of two variables, from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}$.

There is, of course, a much simpler way of looking at $3(x+5)+1$: it may be taken at its face value, as a mere string of symbols which represents nothing. It is an algebraic object in itself. Although semantically empty, the expression may still be manipulated and combined with other expressions of the same type, according to certain well-defined rules.

The plurality of perspectives which one may assume while looking at such a seemingly simple thing as $3(x+5)+1$ is certainly confusing. In the next sections it will be argued that it is also a source of algebra's strength.

(...)

Algebraic symbols do not speak for themselves. What one actually sees in them depends on the requirements of the specific problem to which they are applied. Not less important, it depends on what one is prepared to notice and able to perceive. It is this last observation which will be the leading theme of the present article. The main focus will be on the versatility and adaptability of the algebraic knowledge of the student. The question that will be addressed is to what extent the learner is capable of seeing and using the variety of possible interpretations of algebraic constructs.

As colunas da esquerda são da p.191 de [SfardLinchevskiGPR] – um artigo de 1994.

Hoje em dia eu acho melhor a gente ver expressões como árvores.

```
(%i1) lisptreemq(3*(x+5)+1);
(%o1)
        +--------.
        |        |
        *--.     1
        |  |
        3  +--.
           |  |
           x  5
(%i2)          3*(x+5)+1;
(%o2)
```
$$3\,(x+5)+1$$

```
(%i3) f(x) :=   3*(x+5)+1;
(%o3)
```
$$f\,(x) := 3\,(x+5)+1$$

```
(%i4) f(0);
(%o4)
```
$$16$$

```
(%i5) f(195);
(%o5)
```
$$601$$

“A small variation in notation”

[GrayTall]
As duas colunas do meio deste slide são da primeira página do artigo “*Duality, Ambiguity, and Flexibility: A ‘Proceptual’ View of Simple Arithmetic*”, do Eddy Gray e do David Tall, de 1994. Esse artigo deles começa com a citação do William Thurston que eu pus na segunda coluna e depois tem a introdução deles, que eu pus na terceira coluna...

A quarta coluna é uma mini-introdução ao Maxima. Repare que quando a gente bate ‘Enter’ ele executa um comando e mostra o resultado, e geralmente o comando quer dizer “simplifique essa expressão aqui o máximo possível”.

I remember as a child, in fifth grade, coming to the amazing (to me) realization that the answer to 134 divided by 29 is 134/29 (and so forth). What a tremendous labor-saving device! To me, “134 divided by 29” meant a certain tedious chore, while 134/29 was an object with no implicit work. I went excitedly to my father to explain my major discovery. He told me that of course this is so, a/b and a divided by b are just synonyms. To him it was just a small variation in notation.

– William P. Thurston, Fields Medallist, 1990

Mathematics has been notorious over the centuries for the fact that so many of the population fail to understand what a small minority regard as being almost trivially simple. In this article we look at the way in which mathematical ideas are developed by learners and come to the conclusion that the reason why some succeed and a great many fail lies in the fact that the more able are doing qualitatively different mathematics from the less able. The mathematics of the more able is conceived in such a way as to be – for them – relatively simple, whereas the less able are doing a different kind of mathematics that is often intolerably hard. “A small variation in notation” will be seen to hide a huge gulf in thinking between those who succeed and those who eventually fail.

Maturidade

[FerreiroCTL, p.19]:
Por mais que se repita nas declarações iniciais dos métodos, manuais ou programas, que a criança aprende em função de sua atividade, e que se tem que estimular o raciocínio e a criatividade, as práticas de introdução à língua escrita desmentem sistematicamente tais declarações. O ensino neste domínio continua apegado às práticas mais envelhecidas da escola tradicional, aquelas que supõem que só se aprende algo através da repetição, da memorização, da cópia reiterada de modelos, da mecanização.
Toda essa prática transmite certas mensagens, frequentemente contraditórias. Ao mesmo tempo que se apresenta a escrita como um objeto imutável (não como o produto de uma prática histórica) e como um objeto "em si" quase sacralizado (não como um poderoso instrumento nas ações sociais), se propõem à criança orações para ler e para copiar que constituem uma afronta à inteligência infantil. Há crianças que chegam à escola sabendo que a escrita serve para escrever coisas inteligentes, divertidas ou importantes. Essas são as que terminam de alfabetizar-se na escola, mas começaram a alfabetizar-se muito antes, através da possibilidade de entrar em contato, de interagir com a língua escrita. Porém, há outras crianças, precisamente aquelas de quem se fala no Projeto Principal, que necessitam da escola para apropriar-se da escrita. Essas práticas escolares, entretanto, não lhes permitem apropriar-se de nada: acabam por ser meras reprodutoras de signos estranhos.

[FerreiroCTL, p.50]:
5. A noção de maturidade tem-se prestado para encobrir os fracassos metodológicos. Efetivamente, se são as crianças que estão imaturas, o método é inocente. As condições de aprendizagem ficam fora de questão.
6. Finalmente, a noção de maturidade tem funcionado para discriminar as crianças dos setores marginalizados. Qualquer que seja o teste de maturidade que se aplique e quaisquer que sejam os critérios de prontidão que se utilizem, os imaturos são sempre os mesmos: os filhos dos analfabetos. Como os testes se aplicam com critério seletivo (para deixar fora da escola primária ou para formar classes especiais), esta "maturidade", definida como algo que o sujeito deve trazer consigo, e que é independente das condições de aprendizagem escolar, tem sempre as mesmas consequências.

Maxima: árvores e substituição

```
(%i3) lisptree2(    matrix([10,20],[30,40]));
(%o3)
```

$$\begin{pmatrix}10 & 20\\ 30 & 40\end{pmatrix} =$$

```
matrix__.
|       |
[---.   [---.
|   |   |   |
10  20  30  40
```

```
(%i4) lisptree2(   bmatrix([10,20],[30,40]));
(%o4)
```

$$\begin{bmatrix}10 & 20\\ 30 & 40\end{bmatrix} =$$

```
bmatrix__.
|        |
[---.    [---.
|   |    |   |
10  20   30  40
```

```
(%i5) lisptree2(barematrix([10,20],[30,40]));
(%o5)
```

$$\begin{matrix}10 & 20\\ 30 & 40\end{matrix} =$$

```
barematrix__.
|           |
[---.       [---.
|   |       |   |
10  20      30  40
```

```
(%i6)
      qno()$  lisptree2(matrix([a,b],["c",""]));
(%o7)
```

$$\begin{pmatrix}a & b\\ \mathrm{c} & \end{pmatrix} =$$

```
matrix__.
|       |
[--.    [--.
|  |    |  |
a  b    c
```

```
(%i8) qno()$  lisptree2(matrix([a,"=",b],["", "=",c]));
(%o9)
```

$$\begin{pmatrix}a & = & b\\ & = & c\end{pmatrix} =$$

```
matrix___.
|        |
[--.--.  [--.--.
|  |  |  |  |  |
a  =  b     =  c
```

```
(%i10) S1 : [a=2,b=3];
(%o10)
```

$$[a=2, b=3]$$

```
(%i11) V(S1);
(%o11)
```

$$\begin{bmatrix}a := 2\\ b := 3\end{bmatrix}$$

```
(%i12) lisptree2(S1);
(%o12)
```

$$[a=2, b=3] =$$

```
[-----.
|     |
=--.  =--.
|  |  |  |
a  2  b  3
```

```
(%i13) lisptree2(V(S1));
(%o13)
```

$$\begin{bmatrix}a := 2\\ b := 3\end{bmatrix} =$$

```
bmatrix_____.
|           |
[           [
|           |
becomes__.  becomes__.
|        |  |        |
a        2  b        3
```

```
(%i14)  a+.b=b+.a;
(%o14)
```

$$a+b=b+a$$

```
(%i15) (a+.b=b+.a) _s_   S1;
(%o15)
```

$$2+3=3+2$$

```
(%i16) (a+.b=b+.a) _ss_  S1;
(%o16)
```

$$(a+b=b+a)\begin{bmatrix}a := 2\\ b := 3\end{bmatrix}$$

```
(%i17) (a+.b=b+.a) _sss_ S1;
(%o17)
```

$$(a+b=b+a)\begin{bmatrix}a := 2\\ b := 3\end{bmatrix} = (2+3=3+2)$$

```
(%i18) (a+.b=b+.a) _ssu_ S1;
(%o18)
```

$$\underbrace{(a+b=b+a)\begin{bmatrix}a := 2\\ b := 3\end{bmatrix}}_{2+3=3+2}$$

```
(%i19)
      lisptree2q((a+.b=b+.a) _s_   S1);
(%o19)
```

$$\_s\_(a+b=b+a, S1) =$$

```
_s_____________.
|              |
=------.       S1
|      |
+.--.  +.--.
|   |  |   |
a   b  b   a
```

```
(%i20) lisptree2 ((a+.b=b+.a) _s_   S1);
(%o20)
```

$$2+3=3+2 =$$

```
=------.
|      |
+.--.  +.--.
|   |  |   |
2   3  3   2
```

```
(%i21) lisptree2 ((a+.b=b+.a) _ss_  S1);
(%o21)
```

$$(a+b=b+a)\begin{bmatrix}a := 2\\ b := 3\end{bmatrix} =$$

```
*.------------.
|             |
=------.      bmatrix_____.
|      |      |           |
+.--.  +.--.  [           [
|   |  |   |  |           |
a   b  b   a  becomes__.  becomes__.
              |        |  |        |
              a        2  b        3
```

```
(%i22)
```

Maxima: mais exemplos da substituição

```
(%i5) S1  : [f=h,g=k]$
(%i6) S2  : [h=g,k=f]$
(%i7) S3  : [x=t]$
(%i8) S4  : [f=g,g=f,x=t]$
(%i9) S1b : [f=h,g=k,fp=hp,gp=kp]$
(%i10) S2b : [h=g,k=f,hp=gp,kp=fp]$
(%i11) S4b : [f=g,g=f,fp=gp,gp=fp,x=t]$
(%i12)
       RCL _ssu_ S1  _usu_ S2  _usu_ S3;
(%o12)
```

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{d}{d\,x}\,f\left(g\left(x\right)\right)\begin{bmatrix} f:=h \\ g:=k \end{bmatrix}}_{\frac{d}{d\,x}\,h\left(k\left(x\right)\right)}\begin{bmatrix} h:=g \\ k:=f \end{bmatrix}}_{\frac{d}{d\,x}\,g\left(f\left(x\right)\right)}\left[x:=t\right]}_{\frac{d}{d\,t}\,g\left(f\left(t\right)\right)}$$

```
(%i13) RCL _ssu_ S1b _usu_ S2b _usu_ S3;
(%o13)
```

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{d}{d\,x}\,f\left(g\left(x\right)\right)\begin{bmatrix} f:=h \\ g:=k \\ f':=h' \\ g':=k' \end{bmatrix}}_{\frac{d}{d\,x}\,h\left(k\left(x\right)\right)}\begin{bmatrix} h:=g \\ k:=f \\ h':=g' \\ k':=f' \end{bmatrix}}_{\frac{d}{d\,x}\,g\left(f\left(x\right)\right)}\left[x:=t\right]}_{\frac{d}{d\,t}\,g\left(f\left(t\right)\right)}$$

```
(%i14) RCV _ssu_ S1b _usu_ S2b _usu_ S3;
(%o14)
```

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\left(= \begin{matrix} \frac{d}{d\,x}\,f\left(g\left(x\right)\right) \\ f'\left(g\left(x\right)\right)\,g'\left(x\right) \end{matrix}\right)\begin{bmatrix} f:=h \\ g:=k \\ f':=h' \\ g':=k' \end{bmatrix}}_{\left(= \begin{matrix} \frac{d}{d\,x}\,h\left(k\left(x\right)\right) \\ h'\left(k\left(x\right)\right)\,k'\left(x\right) \end{matrix}\right)}\begin{bmatrix} h:=g \\ k:=f \\ h':=g' \\ k':=f' \end{bmatrix}}_{\left(= \begin{matrix} \frac{d}{d\,x}\,g\left(f\left(x\right)\right) \\ g'\left(f\left(x\right)\right)\,f'\left(x\right) \end{matrix}\right)}\left[x:=t\right]}_{\left(= \begin{matrix} \frac{d}{d\,t}\,g\left(f\left(t\right)\right) \\ g'\left(f\left(t\right)\right)\,f'\left(t\right) \end{matrix}\right)}$$

```
(%i15) RCL _ssu_ S4;
(%o15)
```

$$\underbrace{\frac{d}{d\,x}\,f\left(g\left(x\right)\right)\begin{bmatrix} f:=g \\ g:=f \\ x:=t \end{bmatrix}}_{\frac{d}{d\,t}\,g\left(f\left(t\right)\right)}$$

```
(%i16) RCV _ssu_ S4b;
(%o16)
```

$$\underbrace{\left(= \begin{matrix} \frac{d}{d\,x}\,f\left(g\left(x\right)\right) \\ f'\left(g\left(x\right)\right)\,g'\left(x\right) \end{matrix}\right)\begin{bmatrix} f:=g \\ g:=f \\ f':=g' \\ g':=f' \\ x:=t \end{bmatrix}}_{\left(= \begin{matrix} \frac{d}{d\,t}\,g\left(f\left(t\right)\right) \\ g'\left(f\left(t\right)\right)\,f'\left(t\right) \end{matrix}\right)}$$

```
(%i17)
```

Substituição: detalhes técnicos

Em alguns casos, como este,

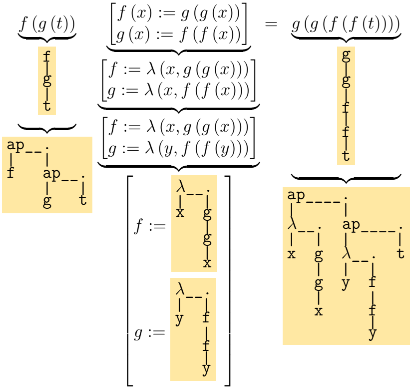
$$f\,(g\,(t))\begin{bmatrix} f\,(x) := g\,(g\,(x)) \\ g\,(x) := f\,(f\,(x)) \end{bmatrix} = g\,(g\,(f\,(f\,(t))))$$

só matemáticos experientes, que estão acostumados a pensar em termos de "qual DEVE SER a definição certa", conseguem dizer qual deve ser o resultado dessa substituição sem fazer as contas...

Na verdade aqui as contas são bem complicadas. A definição do '[:=]' "que todo mundo usa" é a que está na p.7 do [HindleySeldin2008], e ela tem umas cláusulas que "*chang[e] bound variables to avoid clashes*". Mas a definição mais natural no Maxima é essa aqui,

```
"_s_"(obj, substs) := psubst(substs, obj);
infix("_s_");
```

com uma melhorias pra operação '`_s_`' aceitar substituir funções. No exemplo à direita a substituição é calculada assim, $\left(\begin{smallmatrix}\bullet & & \bullet\\ \downarrow & & \uparrow \\ \bullet & \to & \bullet\end{smallmatrix}\right)$, e o Maxima cuida das β-reduções. "Todo mundo" sabe β-redução e Church-Rosser: veja [HindleySeldin2008], páginas 11 e 14.



Prioridades

Aprender a perguntar
Aprender a fazer perguntas boas
Maxima
Substituição
Chutar e testar

"Learning occurs only in the context of meaningful activity" - links:
[FreudenthalChina, p.14 e p.97]
[JonassenRohrerMurphy, p.62]
[Sierpinska, p.101]
[TallThomas, p.127]
[SteffeNesherCobb, p.91]

Chutar e testar

[WebbAbels, p.102, p.108]
[DrijversBoonReeuwijk, p.180]

De [GrayTall, p.135]:

The less able child who is fixed in process can only solve problems at the next level up by coordinating sequential processes. This is, for them, an extremely difficult process. If they are faced with a problem two levels up, then the structure will almost certainly be too burdensome for them to support (see Linchevski & Sfard, 1991). Multiplication facts are almost impossible for them to coordinate while they are having difficulty with addition. Even the process of reversing addition to give subtraction is seen by them as a new process (count-back instead of count-up).

The more able, proceptual thinker is faced with an easier task. The symbols for sum and product again represent numbers. Thus counting, addition, and multiplication are operating on the same procept, which can be decom- posed into process for calculation purposes whenever desired. A proceptual view that amalgamates process and concept through the use of the same notation therefore collapses the hierarchy into a single level in which arith- metic operations (processes) act on numbers (procepts).

Perguntas boas e ruins

Alguns exemplos de perguntas ruins:

1. "How do you do problem 6?" ([Krantz, p.13 e p.60])
2. "Will this be on the test?" ([Krantz, p.84])
3. "Faz um vídeo explicando esse capítulo?"
4. "Fessôr, se eu escrever desse jeito na prova o senhor aceita?"
5. "PROFESSOR, QUAL É A FÓRMULA?" (Slogans02:36)
6. "Professor, a raiz quadrada de um número ao quadrado mais outro número ao quadrado é o número mais o outro número?"
7. Perguntas de 10 minutos em português, cheias de termos errados, e com o aluno perguntando "Entendeu? Entendeu? Até aqui ok, né?", o tempo todo...

As perguntas 1, 2 e 3 são ruins porque não revelam nada sobre o que o aluno sabe – então eu não tenho como encontrar o nível certo pra resposta. De [SchoenfeldWhatCounts, p.66]:

> The reason this is important is that there's a large body of research that says that when students find things difficult and ask for help, the modal response from teachers is to say "Here, do it this way"—thereby removing the challenge for the student. This is a problem: if the teacher is the one doing the heavy lifting, then the students aren't developing their mathematical muscles. The real art of teaching is in providing the appropriate scaffolding for students. You don't want to spoon-feed them, and you don't want them at sea. If a student is confused, can you provide just enough structure or guidance so that the student can now grapple productively with the mathematics in front of him or her?

Halmos

Será que os meus alunos que "só" não sabiam conferir a solução mereciam 9 na prova?

Será que eles eram que nem o Halmos, que na citação na coluna do meio conta que aprendeu um método primeiro e entendeu ele depois?

Será que o erro deles era pequeno, como o que o Krantz fala sobre "a small arithmetic slip" em [Krantz, p.46]?

Será que existe um modo "óbvio" de pontuar a questão desses alunos? Não! Veja a citação na última coluna...

De [Sfard, p.29] (ela cita [Halmos]):

I was a student, sometimes pretty good and sometimes less good. Symbols didn't bother me. I could juggle them quite well... [but] I was stumped by the infinitesimal subtlety of epsilonic analysis. I could read analytic proofs, remember them if I made an effort, and reproduce them, sort of, but I didn't really know what was going on.

(...)

One afternoon something happened. I remember standing at the blackboard in Room 213 of the mathematics building talking with Warren Ambrose and suddenly I understood epsilons. I understood what limits were, and all of the stuff that people had been drilling into me became clear. I sat down that afternoon with the calculus textbook by Granville, Smith, and Longley. All of that stuff that previously had not made any sense became obvious.

De [McGowen, p.35]:

Faculty participants discussed how they would grade this work. Some instructors maintained that they would give the students no credit because he hadn't solved the linear system algebraically. Other instructors argued that the student should receive full credit as the response demonstrated very good understanding of the problem and his responses were correct. When the workshop facilitator asked participants: "Given the technology available today when will students be asked to solve a 3×3 linear system using pencil and paper outside of the classroom?" No one provided an answer to the question.

“GUIs are antisocial”

De [Snover] (podcast com transcrição, jul/2024):

Um, yeah. realized at some point, like, oh, yeah, this is, this is familiar. You know, computing used to be fun. And then it sort of wasn’t fun anymore, but this is fun again. And as I thought about that, I realized that, you know, that the mouse is antisocial, The GUI is antisocial, So what’s that mean? you have a problem to solve and you solve it with the GUI. What do you have? A problem solved. But when you solve it with a command line interface in a scripting environment, you have an artifact. And all of a sudden that artifact can be shared with someone. By the way, the way you did it can show cleverness.

I’ve never seen anybody use a GUI in a clever way. Ever. There’s no cleverness to it. No, like, Oh my God, you should see the way Adam clicked that mouse. Oh my God. Guys, guys, guys, guys, come on, check it out. Adam’s going to click the button. Oh my God. That’s amazing. It just doesn’t happen.

Scripting, you’re using a language, right? You’re communicating.

It’s like, Oh my God, did you see what, Proust did, that’s phenomenal. This guy’s a freaking genius. And then, Hey, give that to me. I’m going to steal that technique and apply it to my code. Or then I have this artifact and I publish it and people are using it. There’s a debt of gratitude. Like they owe me a beer.

Bob e o sistema

O Alex, o Bob, o Carlos, o Daniel e o Evandro começar a estagiar na mesma empresa. Eles têm que pôr dados no sistema da empresa, o FuDados, que foi feito pelo programador Fulano, e é super mal documentado.

O Bob começa a fazer perguntas pro Fulano por e-mail com cópia pra todo mundo. O Fulano dá respostas super boas, e ele começa a reescrever a documentação do FuDados, e ela fica bem melhor.

O problema do Fulano era que antes ele não sabia pra quem estava escrevendo, e quando a gente escreve algo sem conveguir imaginar pra quem a gente tá escrevendo em geral fica horrível.

Agora o Fulano escreve imaginando que está escrevendo pro Bob – e o Carlos, o Daniel e o Evandro também se inspiraram no estilo do Bob e estão conseguindo escrever boas perguntas e bons relatórios.

Agora todo mundo adora o Bob – e todo mundo odeia o Alex, que não conversa com ninguém e tira todas as dúvidas dele com só com o ChatGPT e o Claude Code.

O Alex acaba sendo demitido.

Moral: seja como o Bob, que criou uma rede de pessoas que se ajudam, e não seja como o Alex, que quer só passar nas provas e não quer ajudar ninguém.

Dois jeitos de ser foda

Você tá numa matéria avançada de Matemática, sei lá, uma do mestrado ou do doutorado, e o professor tá demonstrando uma coisa, e tá lá fazendo os passos da demonstração, e de repente tem um passo que um aluno diz: "professor, esse passo não é óbvio"... aí o professor olha e diz: "ué, é óbvio sim"... o aluno diz "não, não é óbvio não". Aí o professor pensa, pensa um pouquinho mais, anda um pouquinho, sai da sala um instante, volta 30 segundos depois, e diz: "é óbvio sim!" E aí ele continua a explicação lá do teorema que ele tava apresentando.

Isso é um piada com fundo de verdade. Dxô explicar ela.

Alguns passos em demonstrações de Matemática podem ser explicados em vários níveis de detalhe. Vamos imaginar por um instante que a gente pode numerar os níveis de conhecimento das pessoas... e para uma pessoa no nível 42 aquele passo da historinha não era nada óbvio, mas para pessoas do nível 43 aquele passo é óbvio sim, só que os detalhes são trabalhosos.

Então o que o professor tava dizendo era basicamente "*vá estudar e vire uma pessoa no nível 43 - eu não tenho tempo de apresentar agora os detalhes daquele passo, então VIRE-SE... e essa aula daqui TEM que ser apresentada no nível 43*".

Imagina que o Alex estudou, estudou, estudou, e virou uma pessoas no nível 43, pra quem aquele passo é óbvio, mas ele não sabe explicar aquilo pra ninguém.

Imagina que o Bob estudou de outro jeito e treinou muito fazer "contas com justificativas". O Bob sabe conversar com as pessoas, descobrir as dúvidas delas, e expandir os passos complicados até as pessoas entenderem os detalhes deles.

O Alex é foda de um jeito meio egoísta.

O Bob é foda de outro jeito, muito mais legal.

As pessoas que conhecem o Bob e que sabem que dá pra ser como ele detestam o Alex.

Seja como o Bob!

Zumbis e processos

Eu comecei a estudar e documentar obsessivamente as dificuldades dos meus alunos por causa de um processo administrativo absurdo que os meus coleguinhas abriram contra mim em 2022...

Esse processo – o "PAD" – tá emperrado, e eu agora tou pressionando eles a abrirem dois outro processos contra mim – um na UFF e outro na Polícia Federal – pro PAD desemperrar.

Resumindo MUITO: em 2022.1 eles me acusaram de ter aprovado alunos demais – que não sabiam o suficiente do conteúdo das matérias – durante a pandemia, e me mandaram reprovar todo mundo que não soubesse o suficiente. Eu fiz isso, e os alunos fizeram um monte de reclamações. Aí a minha chefe na época, a Etel, me mandou dar uma prova final extra, no início do semestre seguinte.

Ela – Etel – acabou abrindo um PAD contra mim, e quando eu finalmente tive acesso aos documentos dele eu descobri que a única acusação bem documentada dele era que eu dei essa prova final extra, que violava um monte de itens do regulamento... ou seja, a Etel tava me punindo por eu ter seguido uma ordem que ela deu.

Isso foi em 2022, e os meus coleguinhas ainda estão me tratando como um incompetente irresponsável que precisa ser vigiado, punido, humilhado, e talvez demitido.

Os meus coleguinhas dizem que "não têm tempo" de ler nada e nem de abrir link nenhum – e aí eles "ainda não sabem" que o PAD foi totalmente absurdo.

Eu tou usando o termo "zumbis" pra pessoas que "não têm tempo" de ler nada e nem de abrir link nenhum.

A condição de zumbi deveria ser incompatível com a condição de professor universitário.

O Apocalipse Zumbi

No "Monty Python and the Holy Grail" tem uma cena em que o Rei Arthur chega numa vila em que os habitantes estão tentando descobrir se uma mulher é uma bruxa ou não, e um cavaleiro está ajudando eles.

Com a ajuda do cavaleiro eles descobrem (???) que se a mulher é uma bruxa então ela é feita de madeira, e se ela é feita de madeira ela flutua, e se ela flutua ela pesa o mesmo que um pato. Aí eles põem ela num prato de uma balança, põem um prato na outra balança, descobrem que os dois pesam a mesma coisa, e aí queimam ela.

Na cena seguinte esse cavaleiro já virou o Sir Bedevere, e ele tá conversando com o Rei Arthur, e ele diz "...e foi assim que eu descobri que a Terra tem o formato de uma banana".

No meu departamento estão acontecendo VÁÁÁÁÁRIAS coisas assim.

Na reunião de março/2025 eu tentei mostrar pra todo mundo uns absurdos do processo administrativo contra mim. Resumindo: dois inimigos meus, o Reginaldo e o Rômulo, tinham criado uma "comissão de acompanhamento" pras minhas disciplinas, com eles dois e mais o Antônio, que quase não acompanhou o que estava acontecendo. O relatório final dessa comissão tinha umas acusações falsas que dava pra mostrar que eram falsas super facilmente – mesmo pra pessoas com attention span de peixinho dourado – e eu preparei uma página com explicações e link pra todos os documentos, mandei pra mailing list do departamento (o "RCN"), e pedi pra apresentar isso na reunião.

Os meus coleguinhas foram contra a apresentação, e o Walter – que é professor titular e que já foi a pessoas mais íntegra e lúcida do nosso departamento – disse mais ou menos isso aqui (vou resumir um pouquinho)...

- O seu problema não está no RCN,
- o seu problema está na sua relação com seus alunos e com as coordenações de cursos,
- não li e não vou ler documento nenhum,
- ...e se eu ler eu não vou entender.

Eu tou usando alguns termos improvisados, por falta de termos melhores...

Os professores que "não têm tempo" de ler nada e nem de abrir link nenhum são "zumbis",

O PURO está infestado de professores zumbis – isso é o Apocalipse Zumbi,

A revelação de que o Walter virou um zumbi é o Sinal do Apocalipse.

Isso tá acontecendo no ensino também – quando eu consigo descobrir algo sobre as técnicas didáticas dos meus coleguinhas eu sempre descubro que eles acham que aulas boas têm que ter o formato de uma banana, e que eu tou fazendo tudo errado.


INTERACTION
RITUAL
ESSAYS ON
FACE-TO-FACE
BEHAVIOR
ERVING GOFFMAN


O Apocalipse Zumbi 2: os aipins

Uma das coisas mais apavorantes de lidar com zumbis é a *impossibilidade de comunicação*. Tipo, a gente diz pro zumbi:

– VOCÊ TÁ COMENDO O BRAÇO DO MEU AMIGO! ISSO É CRIME!

O zumbi olha pra gente, continua mastigando, e só diz:

– HUH?

Muitos alunos viraram zumbis também. Eles me atacam bem menos do que os meus colegas do RCN, mas eu também ficava com a sensação de que a comunicação com eles era impossível, *e eu não sabia porquê*.

Eu vou começar com várias historinhas. Quase todos os meus alunos de C2 erram quando têm que manipular raízes, e eles fazem coisas tipo isso aqui,

$$\sqrt{a^2+b^2} = a+b$$

...que é uma regra *errada*.

Eu vou chamar essas regras erradas de $\boxed{\text{aipins}}$.

Desde 2024.1 eu digo que um dos objetivos do curso é eles aprenderem a fazer contas sem aipins, e a gente passa um tempão vendo técnicas pra isso, mas mesmo assim 80% dos alunos fazem aipins na P2...

Apocalipse Zumbi: 1984

George Orwell, in 1984:
The Party told you to reject the evidence of your eyes and ears. It was their final, most essential command.
Neutro

Process/object duality

[DrouhardTeppo, p.238]:

9.3.2.1 Process/object duality

Many collections of symbols can be interpreted either as expressing a *process* or as denoting a mathematical *object*. For example, the expression $2x-6$ may be viewed procedurally as a set of directions for operating on the variable x. From another perspective, this expression can also be taken as denoting an object in its own right; that which results from carrying out the particular operations. [GrayTall] have coined the term *procept* to describe such symbols that represent both a process and the object of that process.

Sfard and Linchevski (1994) explain the process/object duality of algebraic symbols in terms of hierarchical levels of mathematical understanding involving two modes of thinking–operational and structural. According to their notion of *reification*, moving from a focus on process to seeing that process as an object in its own right (e.g., as an expression or a function) involves a significant cognitive restructuring. Thus, the interpretation of a collection of symbols "depends on what one is *prepared* to notice and *able* to perceive" (p. 192).

Derive como um macaco

Em Cálculo 1 a gente vê um algoritmo pra calcular derivadas de funções elementares que é recursivo, mas ninguém conta pra gente que ele é recursivo...

Em Cálculo 2 eu uso uns trechos de um vídeo do Mathologer – "*Why is Calculus so... Easy?*" – que eu que fiz as legendas em Português pra ele.

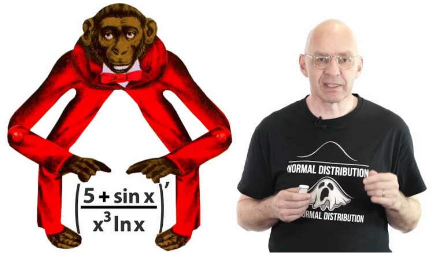
Esse vídeo tem um trecho que mostra um macaco calculando a derivada de uma função elementar complicada – essa aqui:

$$\left(\frac{5+\sin x}{x^3 \ln x}\right)'$$

usando um algoritmo recursivo.

O Mathologer não usa árvores nesse vídeo, mas eu achei que seria bom karma eu fazer uma animação com a tradução dessa conta pra árvores.

Eu até consegui, e eu apresentava essa animação rapidinho na aula sobre "expressões são árvores", e os alunos consultavam ela pra ver exemplos de expressões representadas como árvores.



Critérios de correção

No meu critério de correção...
Multiplicação de números de um dígito
Justificativas “narrativas” valem 0
A P1 ia ter uma questão tipo “justifique este passo”
“Indícios fortes de cola” podem anular a questão

As revisões de prova

Notas:	PR1	P1	PR2	P2	VRP1	VRP2	VS	NF/VS	
Ana Luiza dFBS	-	3.2->5.1	-	4.6	-	-	0.0	4.9/0.0	VS/rep
Bruna BdO	2.0	2.5->7.9	-	1.1	-	-	1.5	5.5/1.5	VS/rep
Bruno HdGF	2.0	2.5->6.0	-	-	-	0.5	0.5	4.3/0.5	VS/rep
Davi dMF	-	1.3->4.6	-	4.8	-	-	0.0	4.7/0.0	VS/rep
Eduardo APRG	2.0	6.0	-	4.5	-	-	-	6.3	AP
Erick GMB	-	6.7	-	6.3	-	-	-	6.5	AP
Gabriel ME	-	2.0->5.8	-	6.7	-	-	-	6.3	AP
Gustavo PdSS	-	3.0->8.5	-	7.6	-	-	-	8.1	AP
João HPV	-	1.5->8.0	-	7.2	-	-	-	7.6	AP
Letícia RH	2.0	10.0	-	5.9	-	-	-	8.0	AP
Marcelo FdSJ	2.0	10.0	2.0	-	-	-	-	6.0	AP
Mari Anna		-	-	7.0	5.8	-	-	6.4	AP
Maria Eduarda CS	-	3.4->8.6	-	0.9	-	-	0.0	4.7/0.0	VS/rep
Mariana CP	-	-	-	2.3	0.3	-	1.3	4.0/1.3	VS/rep
Matheus FR	-	5.8->7.8	-	0.8	-	-	6.0	4.3/6.0	VS/AP
Paulo Sérgio SC	0.0	5.1->5.3	-	1.6	-	-	7.0	4.0/7.0	VS/AP
Renan FM	-	2.0->8.1	-	0.0	-	-	0.3	4.1/0.3	VS/rep
Taynara LCP	2.0	3.3->7.4	-	7.1	-	-	-	8.3	AP
Vinicios FC	2.0	7.0	-	0.8	-	-	6.0	4.9/6.0	VS/AP
Wallace CBM	2.0	9.2	-	4.3	-	-	-	7.2	AP

Cada ‘$\to$’ na coluna da P1 indica uma nota que a banca mudou. Por exemplo, ‘$2.0 \to 8.1$’ na linha do Renan quer dizer que a banca mudou a nota da P1 dele de 2.0 pra 8.1. Logo depois tem um 0.0 e um 0.3, que indicam que o Renan tirou 0.0 na P2 e 0.3 na VS.

Porque não Lean?

Uma das coisas que eu tentei fazer foi mostrar – como curiosidade – o que eram "contas que um computador entende". Eu tentei aprender Lean, mas acabei aprendendo muito pouco.

[OchsEBL2025]
[Yalep]
[YalepSurvey]

```
variable (a b c d e : Nat)
variable (h1 : a = b)
variable (h2 : b = c + 1)
variable (h3 : c = d)
variable (h4 : e = 1 + d)

include h1 h2 h3 h4 in
theorem T1 : a = e :=
  by rw [h1, h2, h3, Nat.add_comm, h4]

include h1 h2 h3 h4 in
theorem T2 :
  a = e     := calc
  a = d + 1 := by rw [h1, h2, h3]
  _ = 1 + d := by rw [Nat.add_comm]
  _ = e     := by rw [h4]

include h1 h2 h3 h4 in
theorem T3 :
  a = e     := calc
  a = b     := by rw [h1]
  _ = c + 1 := by rw [h2]
  _ = d + 1 := by rw [h3]
  _ = 1 + d := by rw [Nat.add_comm]
  _ = e     := by rw [h4]

include h1 h2 h3 h4 in
theorem T4 :
  a = e     := calc
  a = b     := h1
  _ = c + 1 := h2
  _ = d + 1 := congrArg Nat.succ h3
  _ = 1 + d := Nat.add_comm d 1
  _ = e     := Eq.symm h4
```

Porque Maxima?

[OchsEBL2025]
[OchsEmacsConf2024]
Em C2 entram muitos alunos que até sabem usar celular bem, mas que têm pouquíssima experiência com computadores – e que não sabem que o teclado tem uma tecla chamada F8, não sabem o que é um arquivo de texto, e que não sabem que links têm URLs, e que URLs são texto...

Se um desses alunos tiver que ensinar algo pros outros num grupo do Whatspp ele vai fazer estas coisas:

- “É fácil, usa o programa tal”,
- “Procura no YouTube um tutorial sobre [palavras chave]”,
- Vai mandar instruções em português tipo “clica no ícone dos três pontinhos, vai na opção [tal], clica em [blá]”,
- Vai conversar com os colegas no Discord.

E eles costumam preferir os programas que...

- “dá pra aprender em 5 minutos” e que
- “é intuitivo, não tem nada pra aprender”...

Digital Literacy / Letramento Digital

[TallThomas, p.134]: cardboard machine

De: [GuzdialMorrisonGr, p.32]:

> What can we expect a first-year undergraduate to learn in a single term CS class if they have no previous computing experience?
>
> (...)
>
> We first realized in the early 1980s that we often overestimate what firsttime CS students can do.

"Letramento Digital" tem muitos componentes ([NgCanWeTeach]), e eu precisava me focar em alguns, que os alunos dificilmente aprenderiam sozinhos no mundo de hoje em dia, de celulares e interfaces gráficas, em que os alunos costumam escolher o programa que "dá pra aprender em 5 minutos" e que "é intuitivo, não tem nada pra aprender"...
Eu precisava forçar eles a usarem interfaces textuais, em que links fossem URLs e programas e exemplos fossem textos de três linhas – que fossem fáceis de copiar e colar no grupo de WhatsApp ou Telegram da turma.

Variáveis e '='

Algumas referências sobre o '=':
1989: [FilloyRojano]
1989: [FischbeinTacit, p.10]
1999: [FreudenthalDPh, p.477]
1999: [Ma, p.95]
2004: [PuigRojano, p.216]
2011: [WebbAbels, p.102]
2013: [MariaLaura, p.13]
2017: [BoothMcGinn, p.64]

Algumas referências sobre variáveis:
2001: [EllermeijerHeck, p.6]
2004: [PuigRojano, p.216]
2013: [MariaLaura, p.15]

Algumas referências sobre substituição:
1994: [SfardLinchevskiBAA, p.298]
1999: [FreudenthalDPh, p.482 e p.488]
2002: [DrijversLM, p.224]
2008: [HindleySeldin2008, p.7]
2016: [Harper, p.6 e p.9]
2011: [Kindt, p.146, p.149, p.167]

Termos improvisados: três alunos imaginários

O S teve é um aluno S em base.
O T iago é um aluno T otalmente sem base.
O Vic tor é um aluno Vic iado em ChatGPT.

O S teve não sabe, ou não lembra, coisas como $e^a e^b = e^{a+b}$...
Mas o S teve sabe fazer boas perguntas.
O S teve é ótimo, e turmas cheias de S teves são maravilhosas.

O T iago acha que Matemática é decorar métodos.
O T iago acha que Matemática é decorar métodos *o mais rápido possível*.
O T iago sabe resolver $2 + x = 5$, mas quando a gente pede pra ele testar as contas dele ele só sabe fazer as mesmas contas de novo. Idéias como "prova real" e "substituir x por 3" não fazem sentido pra ele.
Lidar com turmas cheias de T iagos já era desesperador & apavorante...

...e agora a gente tem turmas cheias de Vic tors, o que é 1000× pior.

Termos improvisados: três alunos imaginários (2)

O $\boxed{\text{S}}$teve é um aluno $\boxed{\text{S}}$em base.
O $\boxed{\text{T}}$iago é um aluno $\boxed{\text{T}}$otalmente sem base.
O $\boxed{\text{Vic}}$tor é um aluno $\boxed{\text{Vic}}$iado em ChatGPT.

O $\boxed{\text{Vic}}$tor nunca fala comigo nas aulas. As minhas aulas têm uma parte pequena expositiva e o resto é exercícios e discussão, e quando eu passo pelo grupo do $\boxed{\text{Vic}}$tor, que tem ele e os amigos A_1 e A_2, eles só dizem que não têm dúvida nenhuma não, que tá tudo bem.

Na prova o $\boxed{\text{Vic}}$tor chegou no resultado certo na questão 2 mas a solução dele tinha um passo sem pé nem cabeça igualzinho ao do A_1. Eu dou 0 pra ele nessa questão.

Na vista de prova eu peço pra ele me explicar aquilo, e ele só diz coisas como "Tá igual ao livro! TÁ IGUAL! TÁ IGUAL!!!" e "na hora eu sabia, mas agora eu esqueci!!!"

Eu gravo essa cena na câmera do celular, e gravo o dia em que o pai dele vem gritar comigo. Eu digo pra ele fazer um Requerimento de Revisão de Prova (que vai ter uma banca com professores do meu departamento) e uma reclamação na Coordenação de Curso (no depto de Engenharia de Produção). Eu registro tudo, porque eu estou colecionando provas de que tanto o meu departamento quanto a EP estão infestados de zumbis.

Eu ACHO que o Victor e os amigos dele são viciados em ChatGPT, mas eu não tenho provas.

Viciados em ChatGPT

Se eles realmente forem viciados em ChatGPT o nosso problema fica bem mais simples. Eles provavelmente são pessoas pras quais estes conceitos aqui não fazem sentido...

- “treinar”,
- “perguntar” (pra outra pessoa),
- “outro modo de estudar”,
- “outra pessoa”,
- “amigo” (humano – o único amigo dele é o ChatGPT),
- “pega mal” – por exemplo, “colar na prova pega mal”,
- “aqui e agora” – eles não conseguem participar de uma aula no “aqui e agora”, depois de poucos segundos eles pensam “vou estudar isso depois”...

Eu vi que eu posso lidar com os “alunos que não interagem de jeito nenhum” só

Comece por um problema menor

Derivada por regra da cadeia

“Vire-se”

Os livros de Matemática funcionam na base do “vire-se”
Hewitt
De vez em quando eles introduzem até operações novas
Às vezes eles explicam algo só em português e com muito menos detalhes do que deveriam – você tem que expandir o que eles dizem até chegar num nível suficiente de detalhe
Isso é só pra gênios?
Não, o Maxima já vem com um monte de operações definidas, e qualquer pessoa pode definir mais operações nele...
O ‘[:=]’ é “simples” porque pode ser definido em Maxima em duas linhas – exceto pelo truque dos λs

Justificativas ruins

Algumas justificativas / argumentos:
"Pô, professor, a resposta tá certa, eu vi num livro e eu lembrava a fórmula, e eu até conferi ela no computador depois"
"Pô, professor, a resposta tá certa, eu fiz as contas de cabeça e pensei tudo direito, eu só não escrevi"
"Eu aprendi isso no YouTube!" "Onde? Me mostra o vídeo? Me manda o link?" "Eu não lembro!!!"
Eu sempre escrevia "Justifique a sua resposta" nas minhas provas, mas isso não funcionava, ou pelo menos não tava funcionando *comigo*, e eu não conseguia descobrir nada sobre como os meus coleguinhas tavam dando as aulas deles...
Eu tava tentando dar provas com contas complicadas, que eu faria em, tipo, 10 passos, e alguns alunos faziam elas em 3 passos – *e erravam*.
Eu achava que dizer isso aqui pra eles funcionaria: "se você fizer as contas mais devagar e em mais passos você vai conseguir revisar cada passo seu num instante, e não vai errar"... mas não funcionava não.

Aipim

Considere esta fórmula aqui, que eu vou chamar de [Aipim], e que é sobre uma propriedade da raiz quadrada:

$$\sqrt{a^2+b^2} = a+b$$

Ela nem sempre é verdadeira. Por exemplo, quando $a=3$ e $b=4$, temos:

$$\underbrace{\underbrace{\sqrt{\underbrace{\underbrace{\underbrace{a}_{3}{}^{2}}_{9} + \underbrace{\underbrace{b}_{4}{}^{2}}_{16}}_{25}}}_{5} = \underbrace{\underbrace{a}_{3} + \underbrace{b}_{4}}_{7}}_{\mathbf{F}}$$

Em 2024.1 a gente viu várias vezes que a fórmula [Aipim] era falsa, mas mesmo assim um monte de gente usou ela em contas na prova, e essas pessoas chegaram a resultados errados...

Essas pessoas não treinaram as técnicas pra contas fáceis de revisar e nem as técnicas pra revisar contas, então elas fizeram coisas como isso aqui e não conseguiram ver o erro:

$$\begin{array}{rcl} y &=& \sqrt{x^2-16}+5 \\ &=& x+1 \end{array}$$

Compare com isto,

$$\begin{array}{rcl} y &=& \sqrt{x^2-16}+5 \\ &=& \sqrt{x^2-4^2}+5 \\ &=& x-4+5 \\ &=& x+1 \end{array}$$

em que dá pra ver que a justificativa da terceira igualdade é esta,

$$\sqrt{x^2-4^2} \quad = \quad x-4$$

que é um caso particular disto,

$$\sqrt{a^2-b^2} \quad = \quad a-b$$

que é uma espécie de [Aipim] – é uma regra que nem sempre é verdadeira.

ordens-burras

Dois professores titulares

Agora o meu departamento tem dois professores titulares, o Walter Machado Pinheiro e Etel Gimba, e os dois são zumbis...

Em 2022.1, quando as aulas voltaram a ser presenciais, a Etel, que era a minha chefe de departamento na época, me disse pra eu dar provas finais extras pras minhas turmas no "período de ajustes" no início do semestre seguinte, e depois ela abriu um processo administrativo contra mim...

Esse processo era tão mal feito que a única acusação bem documentada dele era que eu dei essas provas finais extras, que violavam um montão de regras. Eu mostrei pra banca do processo administrativo que foi a Etel que inventou e pediu essas provas finais extras, e levei uma advertência por ter seguido ordens absurdas, e só.

Era pra esse processo ter terminado em 2023 mas falta a banca preparar uns últimos documentos

Bibliografia

References

[BoothMcGinn] J. L. Booth et al. “And the Rest is Just Algebra”. In: ed. by S. Stewart. Springer, 2017. Chap. Misconceptions and Learning Algebra, pp. 63–78.

[ChangBeilock] H. Chang and S. L. Beilock. “The math anxiety-math performance link and its relation to individual and environmental factors: a review of current behavioral and psychophysiological research”. In: *Current Opinion in Behavioral Sciences* 10.C (2016), pp. 33–38.

[DrijversBoonReeuwijk] P. Drijvers, P. Boon, and M. van Reeuwijk. "Secondary Algebra Education: Revisiting Topics and Themes and Exploring the Unknown". In: ed. by P. Drijvers. Sense, 2011. Chap. Algebra and Technology, pp. 179–202.

[DrijversLM] P. Drijvers. "Learning Mathematics in a Computer Algebra Environment: Obstacles are Opportunities". In: *ZDM Mathematics Education* 34.5 (2002).

[DrouhardTeppo] J. P. Drouhard and A. R. Teppo. "The Future of the Teaching and Learning of Algebra - The 12th ICMI Study". In: ed. by K. Stacey, H. Chick, and M. Kendal. Kluwer, 2004. Chap. Symbols and Language.

[EllermeijerHeck] T. Ellermeijer and A. Heck. “Differences between the use of mathematical entities in mathematics and physics and the consequences for an integrated learning environment”. In: *Developing Formal Thinking in Physics – First International GIREP seminar 2001*. 2001.

[FerreiroCTL] E. Ferreiro. *Com todas as letras*. Cortez, 2017.

[FeynmanBrinc] R. Feynman. *“Só pode ser brincadeira, sr. Feynman!”* Intrínseca, 2019.

[FilloyRojano] T. Rojano E. Filloy. “Solving Equations: the Transition from Arithmetic to Algebra”. In: *For the Learning of Mathematics* 9.2 (1989), pp. 19–25.

[FischbeinTacit] E. Fischbein. "Tacit Models and Mathematical Reasoning". In: *For the Learning of Mathematics* 9.2 (1989), pp. 19–25.

[FreudenthalChina] H. Freudenthal. *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Kluwer, 2022.

[FreudenthalDPh] H. Freudenthal. *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Kluwer, 1999.

[GrayTall] E. M. Gray and D. O. Tall. "Duality, Ambiguity, and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic". In: *Journal for Research in Mathematics Education* 25.2 (1994).

[GuzdialMorrisonGr] M. Guzdial and B. Morrison. "Growing Computer Science Education Into a STEM Education Discipline". In: *Communications of the ACM* 59.11 (2016).

[Halmos] P. R. Halmos. *I Want to be a Mathematician: an Automathography in Three Parts*. MAA, 1985.

[Harper] R. Harper. *Practical Foundations for Programming Languages, 2nd ed.* Cambridge, 2016.

[Hewitt1] D. Hewitt. "Arbitrary and Necessary Part 1: a Way of Viewing the Mathematics Curriculum". In: *For the Learning of Mathematics* 19.3 (Nov. 1999), pp. 2–9.

[Hewitt2] D. Hewitt. "Arbitrary and Necessary Part 2: Assisting Memory". In: *For the Learning of Mathematics* 21.1 (Mar. 2001), pp. 44–51.

[HindleySeldin2008] J. R. Hindley and J. P. Seldin. *Lambda-Calculus and Combinators, an Introduction*. Cambridge, 2008.

[JonassenRohrerMurphy] D. H. Jonassen and Rohrer-Murphy. “Activity Theory as a Framework for Designing Constructivist Learning Environments”. In: *Educational Technology Research and Development* 47.1 (1999), pp. 61–79.

[Kindt] M. Kindt. “Secondary Algebra Education: Revisiting Topics and Themes and Exploring the Unknown”. In: ed. by P. Drijvers. Sense, 2011. Chap. Principles of Practice, pp. 137–178.

[Krantz] S. G. Krantz. *How to Teach Mathematics, 3rd edition*. AMS, 2015.

[Ma] L. Ma. *Knowing and Teaching Elementary Mathematics (Anniversary Edition)*. Routledge, 2010.

[MariaLaura] M. L. M. Gomes. *Álgebra e Funções na Educação Básica*. CAED-UFMG, 2013.

[McGowen] M. McGowen. "And the Rest is Just Algebra". In: ed. by S. Stewart. Springer, 2017. Chap. Examining the Role of Prior Experience in the Learning of Algebra, pp. 19–39.

[NgCanWeTeach] Can we teach digital natives digital literacy? "W. Ng". In: *Computers and Education* 59.3 (2012).

[OchsEBL2025] E. Ochs. "Adapting Lean tutorials to the Brazilian case (presentation at the EBL 2025)". `https://anggtwu.net/math-b.html#2025-ebl`. May 2025.

[OchsEmacsConf2024] E. Ochs. “Emacs, eev, and Maxima - now! (eev @ EmacsConf 2024)”. https://emacsconf.org/2024/talks/maxima/. Dec. 2024.

[OchsPanic2024] E. Ochs. “Panic! At Equalities (Versão Teresópolis)”. https://anggtwu.net/math-b.html#2024-panic-t. June 2024.

[PuigRojano] L. Puig and T. Rojano. “The Future of the Teaching and Learning of Algebra - The 12th ICMI Study”. In: ed. by K. Stacey, H. Chick, and M. Kendal. Kluwer, 2004. Chap. Symbols and Language, pp. 189–223.

[SchoenfeldWhatCounts] A. H. Schoenfeld. “What Counts in Mathematics (and Other) Classrooms? A Framework for Looking at What Matters, and Thoughts About How One Might Use These Ideas for Professional Development". In: *Proceedings of the Conference on Mathematical Modeling - Teachers College, Columbia University, October 14, 2013*. 2013.

[SchoenfeldWhenGood] A. H. Schoenfeld. "When Good Teaching Leads to Bad Results: The Disasters of 'Well-Taught' Mathematics Courses". In: *Educational Psychologist* 23.2 (1988), pp. 145–166.

[Sfard] A. Sfard. *Thinking as Communicating – Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*. Cambridge, 2008.

[SfardLinchevskiBAA] A. Sfard and L. Linchevski. “Between Arithmetic and Algebra: in the Search of a Missing Link - the Case of Equations and Inequalities”. In: *Rendiconti del Seminario Matematico - Università e Politecnico di Torino* 52.3 (1994), pp. 279–307.

[SfardLinchevskiGPR] A. Sfard and L. Linchevski. “The Gains and the Pitfalls of Reification – the Case of Algebra”. In: *Educational Studies in Mathematics* 26.2 (1994), pp. 191–228.

[Sierpinska] A. Sierpinska. *Understanding in Mathematics*. Falmer, 1994.

[Snover] J. Snover and A. G. Bell. “Navigating Corporate Giants Jeffrey Snover and the Making of Power-

Shell”. https://corecursive.com/building-powershell-with-jeffrey-snover/. July 2024.

[SteffeNesherCobb] L. P. Steffe et al., eds. *Theories of Mathematical Learning*. Lawrence Erlbaum, 1996.

[Steinmetz2025] W. A. C. Steinmetz. “Raciocínio lógico na aprendizagem da matemática”. https://anggtwu.net/tmp/steinmetz__raciocinio_logico_na_aprendizage
da_matematica.pdf. Feb. 2025.

[TallLongTerm] D. Tall. “And the Rest is Just Algebra”. In: ed. by S. Stewart. Springer, 2017. Chap. Long-Term Effects of Sense Making and Anxiety in Algebra, pp. 43–62.

[TallThomas] D. Tall and M. Thomas. “Encouraging versatile thinking in algebra using the computer”. In: *Educational Studies in Mathematics* 22.2 (1991), pp. 125–147.

[WebbAbels] D. Webb and M. Abels. “Secondary Algebra Education: Revisiting Topics and Themes and Exploring the Unknown”. In: ed. by P. Drijvers. Sense, 2011. Chap. Restrictions in Algebra, pp. 137–178.

[Yalep] F. T. Minh, L. Gonnord, and J. Narboux. “A Lean-based Language for Teaching Proof in High School”. In: *Intelligent Computer Mathematics*. Ed. by V. de Paiva and P. Koepke. Springer Nature Switzerland, 2026, pp. 447–467. ISBN: 978-3-032-07021-0.

[YalepSurvey] F. T. Minh, L. Gonnord, and J. Narboux. “Proof assistants for teaching: a survey”. In: *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science (EPTCS)*. Vol. 419. J. Narboux, W. Neuper and P. Quaresma. Nancy, France: Springer, July 2024, pp. 1–27. DOI: `10.4204/EPTCS.419.1`. URL: `https://hal.science/hal-04705580`.